

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Известны исследования ударных волн в газе [1,2], упругой среде [3] и многие другие. Эти исследования принадлежат к тому случаю, когда можно непосредственно получить в разрывах замкнутую систему уравнений. Для большинства реологических сред невозможно непосредственно записать в разрывах определяющие уравнения. Такая ситуация возникает из-за того, что необходимо знать характер изменения какой-нибудь разрывной величины  $f$  на ударной волне в зависимости от другой разрывной величины  $\varphi$ . В работе предлагается зависимость  $f(\varphi)$  находить из анализа ударного перехода.

1. Предположим, что поверхность разрыва можно заменить тонким переходным слоем толщиной  $2h$ . Обозначим через  $x_3$  декартову координату, направленную по нормали к некоторой срединной поверхности  $\Sigma$ , расположенной внутри переходного слоя. Пусть поверхность  $\Sigma$  совпадает с поверхностью сильного разрыва, в которую стягивается переходный слой при  $h \rightarrow 0$ .

Плавное изменение в переходном слое ранее «разрывных» величин на ударной волне может быть найдено из решения задачи о структуре ударной волны в рассматриваемой среде. После решения этой задачи будут найдены зависимости «разрывных» величин от координаты  $x_3$  в виде

$$f = f(x_3), \quad \varphi = \varphi(x_3) \quad (1.1)$$

Функции  $f$  и  $\varphi$  в (1.1) могут зависеть от времени  $t$  и трех пространственных координат  $x_i$ , причем  $t$ ,  $x_1$  и  $x_2$  будут играть роль параметров. Исключая  $x_3$  из первой зависимости в (1.1) при помощи второй зависимости, найдем искомую зависимость  $f(\varphi)$ , справедливую внутри ударного слоя.

Структура переходного слоя зависит от неизвестной скорости распространения ударной волны  $G$ . Таким образом, приходим к необходимости совместного решения двух задач: задачи о структуре ударной волны и задачи о распространении ударной волны в данной сплошной среде. Структура ударного слоя может быть описана диссипативными процессами вязкости. Устремляя коэффициенты вязкости к нулю, толщина переходного слоя  $2h$  стремится к нулю. В пределе плавное изменение величин переходит в скачкообразное, а зависимость  $f(\varphi)$  устремится к некоторому своему предельному выражению.

Комплексная задача о структуре и распространении ударной волны может оказаться очень трудной. В связи с этим предлагается приближенный метод решения задачи.

Зависимость  $f(\varphi)$  представим в виде суммы

$$f(\varphi) = f^+ + \frac{\varphi - \varphi^+}{[\varphi]} [f] + \psi(\varphi) \quad (1.2)$$

Значок плюс вверху над величинами в (1.2) означает, что эта величина вычисляется на переднем ударном фронте, квадратными скобками обозначен разрыв. Если аппроксимировать зависимость (1.2) в пространстве переменных  $(f, \varphi)$  прямой линией, проходящей через две точки  $(f^+, \varphi^+)$  и  $(f^-, \varphi^-)$ , то слагаемым  $\psi$  в (1.2) следует пренебречь.

Из (1.2) вытекает, что

$$\psi^+ = \psi(\varphi^+) = 0, \quad \psi^- = \psi(\varphi^-) = 0 \quad (1.3)$$

В дальнейшем в зависимостях (1.2) будем пренебрегать величинами  $\psi$ , которые удовлетворяют условиям (1.3). Такая аппроксимация справедлива для ударных волн малой интенсивности, когда точки  $(f^+, \varphi^+)$  и  $(f^-, \varphi^-)$  в пространстве  $(f, \varphi)$  расположены близко одна от другой.

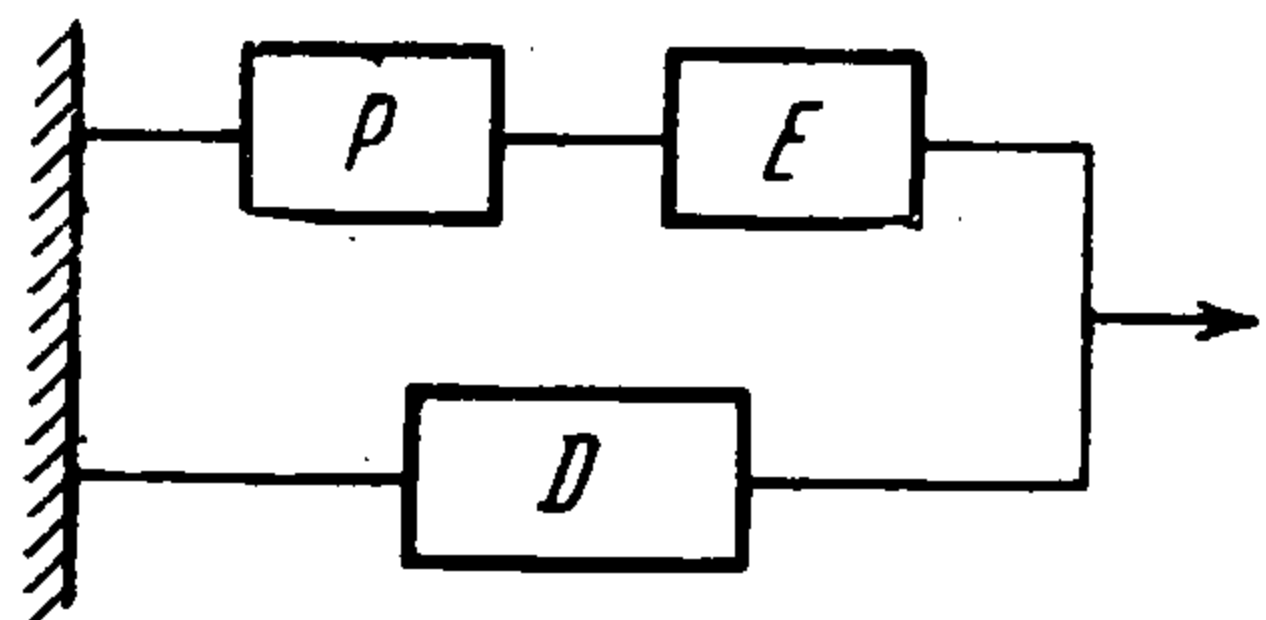
Пусть течение вне переходного слоя упруго-пластической среды описывается системой определяющих уравнений Прандтля — Рейса [3] при условии пластичности Мизеса [4]. Существование переходного слоя обусловлено проявлением дополнительных свойств среды внутри ударного слоя. Реологическая модель упруго-пластической среды внутри переходного слоя представлена на фигуре, дополнительные свойства среды определяются структурой элемента  $D$ . Обычно этим элементом будет элемент вязкости [5,6].

Условие пластичности Мизеса и определяющие уравнения для такой среды запишем в виде

$$(\sigma_{ij}^* - d_{ij}^*) (\sigma_{ij} - d_{ij}) = 2k^2 \quad (1.4)$$

$$\frac{D(\sigma_{ij} - d_{ij})}{Dt} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu \left\{ v_{i,j} + v_{j,i} - 2 \frac{d\varphi}{dt} (\sigma_{ij}^* - d_{ij}^*) \right\} \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений в среде;  $d_{ij}$  — тензор напряжений на реологическом элементе  $D$ ;  $v_i$  — скорость материальных частиц;  $k$  — предел текучести;  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ляме. Звездочкой сверху над тензорами обозначена девиаторная часть этих тензоров,  $D/Dt$  — ковариантная производная по времени в смысле Яумана [7]



$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} (v_{k,j} - v_{j,k}) + \frac{1}{2} \sigma_{jk} (v_{k,i} - v_{i,k}) \quad (1.6)$$

Предполагается, что диссипативные свойства среды, которые описываются реологическим элементом  $D$ , проявляются только внутри переходного слоя. При подходе к переднему или заднему ударному фронту они постепенно исчезают, так что можно считать справедливыми равенства

$$d_{ij}^+ = d_{ij}^- = 0 \quad (1.7)$$

Введем подвижную систему прямоугольных координат так, чтобы ее начало двигалось вместе с поверхностью  $\Sigma$ . В произвольной рассматриваемой материальной точке на  $\Sigma$  направим ось  $x_3$  по нормали к этой поверхности, тогда оси  $x_1$  и  $x_2$  будут расположены в касательной плоскости. Пусть греческие индексы  $\alpha, \beta, \dots$  принимают значения 1 или 2, а латинские  $i, j, k, \dots$  — значения 1, 2 или 3. Все величины будут вычисляться в неподвижной системе координат, а проектировать их будем на оси подвижной системы.

В (1.5) нужно отделить производные по нормали к поверхности разрыва от производных по касательным направлениям, а материальную производную по времени заменим  $\delta$ -производной. Для этого потребуются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{i3} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - G \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.8)$$

Запишем динамические условия для разрывов плотности  $\rho$ , скорости и напряжений

$$[\sigma_{i3}] = \rho^+ (v_3^+ - G) [v_i], \quad [\rho (v_3 - G)] = 0 \quad (1.9)$$

Чтобы получить замкнутую систему одиннадцати уравнений относительно скачков величин  $\rho, \varphi, v_i$  и  $\sigma_{ij}$ , проинтегрируем определяющие уравнения (1.5) поперек переходного слоя, после чего в пределе при  $h \rightarrow 0$  найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{ij}^-}^{\sigma_{ij}^+} (v_3 - G) d(\sigma_{ij} - d_{ij}) + \frac{1}{2} \int_{v_\alpha^-}^{v_\alpha^+} \{ (\sigma_{i\alpha} - d_{i\alpha}) \delta_{j3} + (\sigma_{j\alpha} - d_{j\alpha}) \delta_{i3} - \\ & \quad - (\sigma_{i3} - d_{i3}) \delta_{j\alpha} - (\sigma_{j3} - d_{j3}) \delta_{i\alpha} \} dv_\alpha = \\ & = \lambda [v_3] \delta_{ij} + \mu [v_i \delta_{j3} + v_j \delta_{i3}] - 2\mu \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} (\sigma_{ij}^* - d_{ij}^*) (v_3 - G) d\varphi \quad (1.10) \end{aligned}$$

Согласно (1.2), (1.3) и (1.7) величинами  $d_{ij}$  в (1.10) следует пренебречь в данном приближении ввиду их малости по сравнению с остальными слагаемыми. Используя это обстоятельство и линейную аппроксимацию для зависимостей между разрывными величинами (1.2), после интегрирования уравнение (1.10) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & [^{1/2}(v_3^+ + v_3^-) - G] [\sigma_{ij}] + ^{1/4} \{ (\sigma_{i\alpha}^+ + \sigma_{i\alpha}^-) \delta_{j3} + (\sigma_{j\alpha}^+ + \sigma_{j\alpha}^-) \delta_{i3} - (\sigma_{i3}^+ + \sigma_{i3}^-) \delta_{j\alpha} - \\ & - (\sigma_{j3}^+ + \sigma_{j3}^-) \delta_{i\alpha} \} [v_\alpha] = \lambda [v_3] \delta_{ij} + \mu [v_i \delta_{j3} + v_j \delta_{i3}] - \\ & - \mu \{ \sigma_{ij}^{*+} (v_3^+ - G) + \sigma_{ij}^{*-} (v_3^- - G) \} [\varphi] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Условие пластичности (1.4), записанное в разрывах с учетом (1.7), запишем в форме

$$(\sigma_{ij}^{*+} + \sigma_{ij}^{*-}) [\sigma_{ij}] = 0 \quad (1.12)$$

Система одиннадцати нелинейных уравнений (1.9), (1.11) и (1.12) содержит одиннадцать скачков величин  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $v_i$ ,  $\sigma_{ij}$  и неизвестную скорость  $G$ . Чтобы найти  $G$ , простыми преобразованиями сведем эту систему к трем уравнениям, содержащим из разрывов только скачки скорости  $v_i$ .

В (1.11) приравняем индексы  $i, j$  и просуммируем по повторяющемуся индексу, после чего получим

$$[\sigma_{kk}] = 2(3\lambda + 2\mu) [v_3] (v_3^+ + v_3^- - 2G)^{-1} \quad (1.13)$$

После умножения (1.11) на  $(\sigma_{ij}^{*+} + \sigma_{ij}^{*-})$ , используя при этом (1.4) и (1.12), придем к уравнению

$$(\sigma_{i3}^{*+} + \sigma_{i3}^{*-}) [v_i] = 2k^2 (v_3^+ + v_3^- - 2G) [\varphi] \quad (1.14)$$

Если в (1.11) положить  $i = \alpha$  и  $j = \beta$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} & [^{1/2}(v_3^+ + v_3^-) - G] [\sigma_{\alpha\beta}] - ^{1/4} (\sigma_{\alpha 3}^+ + \sigma_{\alpha 3}^-) [v_\beta] - ^{1/4} (\sigma_{\beta 3}^+ + \sigma_{\beta 3}^-) [v_\alpha] = \\ & = \lambda [v_3] \delta_{\alpha\beta} - \mu \{ \sigma_{\alpha\beta}^{*+} (v_3^+ - 2G + v_3^-) - (v_3^- - G) [\sigma_{\alpha\beta}] + ^{1/3} (v_3^- - G) [\sigma_{kk}] \delta_{\alpha\beta} \} [\varphi] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для  $j = 3$  из (1.11) находим

$$\begin{aligned} & [^{1/2}(v_3^+ + v_3^-) - G] [\sigma_{i3}] + \frac{1}{4} \{ \sigma_{i\alpha}^+ + \sigma_{i\alpha}^- + (\sigma_{3\alpha}^+ + \sigma_{3\alpha}^-) \delta_{i3} - (\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-) \delta_{i\alpha} \} [v_\alpha] = \\ & = \lambda [v_3] \delta_{i3} + \mu [v_i + v_3 \delta_{i3}] - \mu \{ \sigma_{i3}^{*+} (v_3^+ - G) + \sigma_{i3}^{*-} (v_3^- - G) \} [\varphi] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из уравнений (1.13) — (1.15) последовательно можно выразить скачки  $[\sigma_{kk}]$ ,  $[\varphi]$  и  $[\sigma_{\alpha\beta}]$  через скачки  $[v_i]$ , используя при этом соотношения (1.9). Подставив эти скачки в (1.16), получим систему трех нелинейных уравнений относительно скачков  $[v_i]$  и скорости  $G$ . Считая один из этих скачков заданным, из трех уравнений после исключения двух других скачков скорости получим уравнение относительно  $G$ . Из полученного уравнения  $G$  следует находить с точностью до первой степени заданного скачка скорости частиц среды, что вытекает из линейной аппроксимации в (1.2). Не выписывая эту систему, заметим, что для ударных волн очень малой интенсивности, если ее можно линеаризировать, она примет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho^+ (v_3^+ - G)^2 \delta_{ij} - (\lambda + \mu) \delta_{i3} \delta_{j3} - \mu \delta_{ij} + \frac{\mu}{k^2} \sigma_{i3}^{*+} \sigma_{j3}^{*+} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{i3} \delta_{j3}) \right\} [v_j] = 0, \quad a_{i\alpha} = \sigma_{i\alpha}^+ + \sigma_{3\alpha} \delta_{i3}^+ - \sigma_{33}^+ \delta_{i\alpha} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Члены  $a_{i\alpha}$  учитывают эффект вращения окрестности материальной точки среды. Приравнивая определитель однородной линейной системы уравнений (1.17) нулю, получим кубическое уравнение для нахождения  $\rho^+ (G - v_3^+)^2$ . В случае безвихревой волны из (1.17) находим

$$\rho^+ (G - v_3^+)^2 = \lambda + 2\mu - \mu \left( \frac{\sigma_{33}^{*+}}{k} \right)^2 \quad (1.18)$$

Если ударная волна эквиволюминальная, то из (1.17) для частного случая, когда  $[v_2] = 0$ , получим

$$\rho^+ (G - v_3^+)^2 = \mu - \mu (\sigma_{13}^+ / k)^2 + 1/2 (\sigma_{33}^+ - \sigma_{11}^+) \quad (1.19)$$

В общем случае, когда  $[v_i] \neq 0$ , из решений кубического уравнения имеют смысл только положительные корни.

На распространение ударных волн накладывает ограничение второй закон термодинамики [8]. Согласно этому закону мощность диссипации энергии вследствие пластического течения не может быть отрицательной, т. е. [4]

$$\frac{d\varphi}{dt} \geq 0 \quad (1.20)$$

Чтобы неравенство (1.20) записать в разрывах, проинтегрируем его поперек переходного слоя. Знак неравенства при этом не изменится, так как верхний предел интегрирования  $h$  больше нижнего предела  $-h$ . В пределе при  $h \rightarrow 0$  будем иметь

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \frac{d\varphi}{dt} dx_3 = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} (v_3 - G) d\varphi = (v_3^* - G) [\varphi] \geq 0$$

$$\max(v_3^+, v_3^*) \geq v_3^* \geq \min(v_3^+, v_3^-) \quad (1.21)$$

Из закона сохранения массы на поверхности разрыва (1.9) вытекает, что  $(G - v_3^+)$  и  $(G - v_3^-)$ , следовательно, и  $(G - v_3^*)$  имеют одинаковые знаки. В связи с этим, из (1.14) и (1.21) получаем

$$(\sigma_{i3}^{*+} + \sigma_{i3}^{*-}) [v_i] \geq 0 \quad (1.22)$$

Таким образом, распространение ударной волны в упруго-пластической среде с точки зрения термодинамики возможно, если на поверхности разрыва выполняется неравенство (1.22).

2. Кроме рассмотренного общего случая распространения ударной волны, в упруго-пластической среде представляет интерес рассмотреть частный случай, когда на поверхности разрыва

$$[\sigma_{33}^*] = 0, \quad 3 [\sigma_{33}] = [\sigma_{kk}] \quad (2.1)$$

В этом случае легко найти скорость  $G$ . Решая совместно (2.1), (1.13) и уравнение (1.9) при  $i = 3$ , получим

$$G - v_3^+ = -1/2 [v_3] \pm \{(\lambda + 2\mu/3) \rho^+\}^{1/2} \quad (2.2)$$

Предположение (2.1) накладывает ограничение на распространение ударной волны со скоростью (2.2). Для ударной волны очень малой интенсивности это ограничение имеет вид

$$4k^2 - 3\sigma_{i3}^{*+}\sigma_{j3}^{*+}\omega_i\omega_j = 1/2 a_{i\alpha}\omega_i\omega_\alpha, \quad [v_i] = \omega\omega_i \quad (2.3)$$

Это уравнение получено умножением (1.17) на  $\omega_i$  с использованием (2.2). Здесь  $\omega$  — интенсивность ударной волны,  $\omega_i$  — направляющие косинусы вектора  $[v_i]$ . Пренебрегая членами  $a_{i\alpha}$ , запишем (2.3) в инвариантной форме в неподвижной системе координат

$$2\sigma_{ij}^{*+}\sigma_{ij}^{*+} = 3(\sigma_{ij}^{*+}v_i\omega_j)^2 \quad (2.4)$$

где  $v_i$  — направляющие косинусы нормали к поверхности разрыва.

Выражение (2.4) запишем в системе координат, совпадающей с главными направлениями тензора  $\sigma_{ij}$

$$2\sigma_k^{*+}\sigma_k^{*+} = 3(\sigma_1^{*+}v_1\omega_1 + \sigma_2^{*+}v_2\omega_2 + \sigma_3^{*+}v_3\omega_3)^2 \quad (2.5)$$

Здесь  $\sigma_k$  — главные значения тензора напряжений. Найдем экстремум правой части этого уравнения  $z$  в зависимости от направлений векторов  $v_k$  и  $\omega_k$

$$z = \sigma_1^{*+} v_1 \omega_1 + \sigma_2^{*+} v_2 \omega_2 + \sigma_3^{*+} v_3 \omega_3, \quad v_k v_k = \omega_k \omega_k = 1 \quad (2.6)$$

В пространстве переменных  $(z, v_k, \omega_k)$  поверхность (2.6) будет замкнутой и гладкой, поэтому больший экстремум дает максимум для  $z$ . Опуская вычисления, после исследования максимума для  $z$ , найдем, что решение уравнения (2.5) относительно  $v_k, \omega_k$  возможно только в случае, когда два из трех главных значений  $\sigma_k$  совпадают, а векторы  $v_k$  и  $\omega_k$  совпадают с третьим главным направлением.

Переходя снова к подвижной системе координат, этот результат будет иметь вид

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{22}^* = -1/2 \sigma_{33}^* = \pm 1/3 \sqrt{3} k, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0, \quad [v_\alpha] = 0 \quad (2.7)$$

Последнее равенство из (2.7) говорит о том, что рассматриваемая ударная волна будет безвихревой. Условия (2.7) могут быть выполнены в области одномерного течения, когда напряженное состояние на поверхности разрывов обладает сферической симметрией. Для скачков пластической части деформаций  $[e^p_{ij}]$  из (1.11), (1.14) и (2.7) находим выражение

$$[e_{11}^p] = [e_{22}^p] = -1/2 [e_{33}^p] = \frac{[v_3]}{3(G - v_3^+)}, \quad [e_{12}^p] = [e_{13}^p] = [e_{23}^p] = 0 \quad (2.8)$$

Второй закон термодинамики в виде (1.22) преобразуется в неравенство

$$\sigma_{33}^* [v_3] \geq 0 \quad (2.9)$$

Предлагаемый в данной работе приближенный метод позволяет записать определяющие уравнения для упруго-пластической среды с точностью до квадратов разрывных величин. Из полученной системы уравнений можно определить скорость распространения ударной волны с точностью до первой степени скачка заданной величины. Все эти результаты могут быть получены, не решая задачу о структуре ударной волны. Для более точного решения задачи о распространении ударной волны требуется предварительно решить задачу о структуре этой волны. Непосредственными вычислениями можно показать, что ударные волны очень малой интенсивности и волны слабого разрыва обладают одинаковыми свойствами, за исключением неравенства (1.22). Для слабых волн разрывов оно не имеет места.

Подобный подход может быть использован для решения задачи о распространении ударных волн в других сложных средах.

Поступила 1 II 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1961.
2. К у л и к о в с к и й А. Г., Л ю б и м о в Г. А. О структуре магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. T h o m a s T. Plastic flow and fracture in solids. New York — London, Acad. Press, 1961 (Рус. пер.: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах, М., «Мир», 1964.)
4. И в л е в Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
5. M o r d u c h o v M., L i b b y P. A. On a complete solution of the one-dimensional flow equations of a viscous, heat-conducting, compressible gas. J. Aeronaut. Sci., 1949, vol. 16, No 11, p. 674.
6. Ч е р н ы ш о в А. Д. О распространении ударных волн в средах с вязкостью. ПМТФ, 1967, № 1.
7. С е д о в Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
8. P r o o t C. P. de, M a z u r П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.