КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ДИСКА С ДВУМЯ РАЗЛИЧНЫМИ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ

А. В. Белоконь

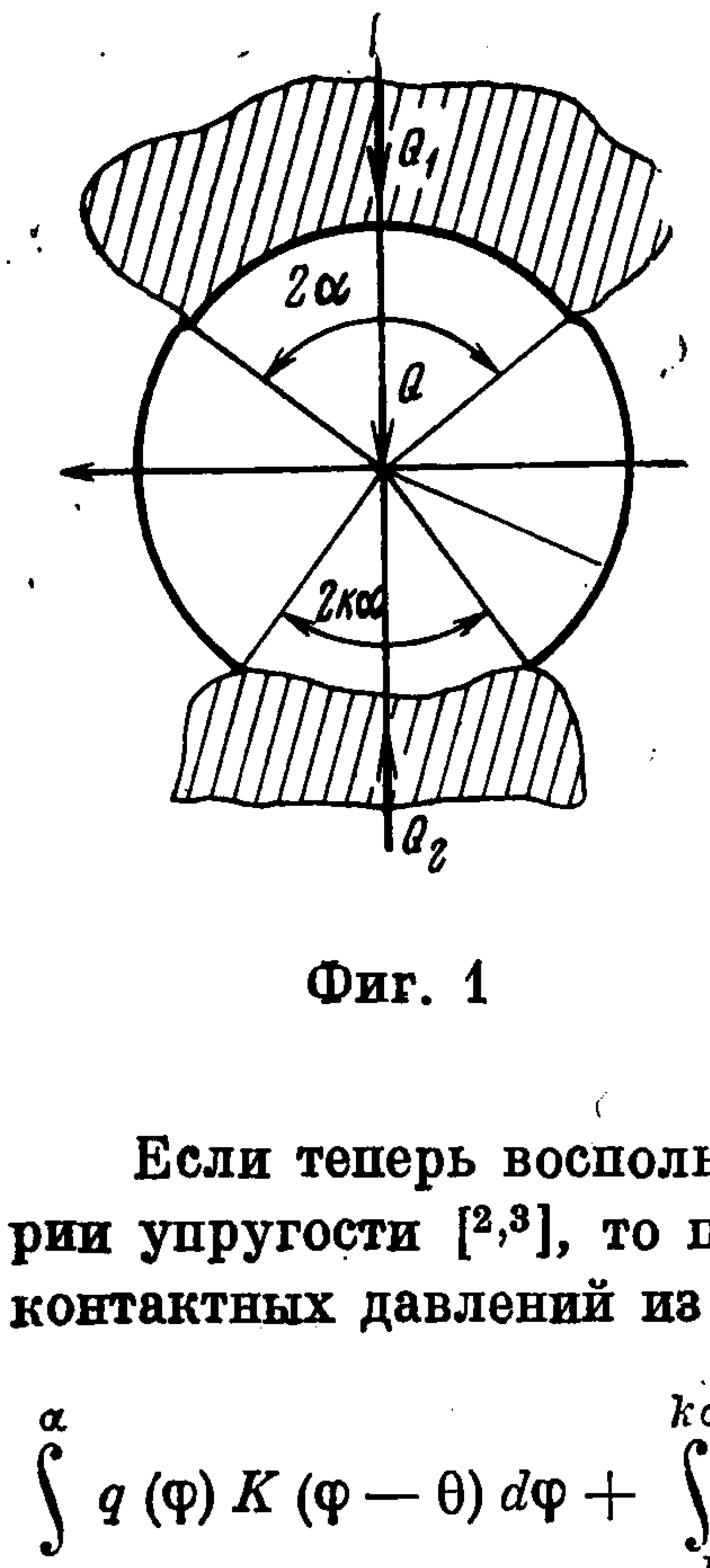
(Ростов-на-Дону)

Рассмотрена плоская контактная задача для упругого диска, взаимодействующего с двумя различными жесткими штампами. Система диск — штампы уравновешена силой, приложенной в центре диска. Предполагается, что в области контакта отсутствуют силы трения, а вне ее отсутствует нагрузка.

Указанная задача сведена к определению контактных давлений из системы интегральных уравнений первого рода. Строится асимптотическое решение системы. Рассмотрены примеры.

Данная работа является дальнейшим развитием и обобщением части результатов, изложенных в [1].

§ 1. Постановка задачи. Сведение ее к системе интегральных уравнений. Асимптотическое решение системы интегральных уравнений. Пусть упругая среда заполняет круговую область S радиуса R (фиг. 1) и взаимодействует с двумя различными жесткими штампами, вдавливаемыми в нее силами Q_1 и Q_2. В центре области S приложена сила $Q = Q_2 - Q_1$. Предположим, что в области контакта отсутствуют силы трения, а вне ее отсутствует нагрузка. В этом случае на границе области S можно записать следующие условия:



Фиг. 1

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad -\pi + k\alpha < \theta < -\alpha,\ \alpha < \theta < \pi - k\alpha$$

$$\tau = 0 \quad \text{при}\ |\theta| \leqslant \pi; \quad u_r = f_1(\theta) \quad \text{при}\ |\theta| \leqslant \alpha$$

$$u_r = f_2(\theta) \quad \text{при}\ \pi - k\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi + k\alpha$$

Относительно функций $f_i(\theta)$ будем предполагать следующее:

$$f_1(\theta) = f_1(-\theta) \quad \text{при}\ |\theta| \leqslant \alpha,$$

$$f_2(\theta + \pi) = f_2(-\theta + \pi) \quad \text{при}\ |\theta| \leqslant k\alpha \qquad (1.1)$$

Очевидно, что при сделанных предположениях (1.1)

$$\sigma_r(r, \theta) = \sigma_r(r, -\theta), \tau(r, \theta) = -\tau(r, -\theta).$$

Если теперь воспользоваться известными методами решения плоской задачи теории упругости [2,3], то поставленная задача легко может быть сведена к определению контактных давлений из системы интегральных уравнений следующего вида:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} q(\varphi) K(\varphi - \theta)\, d\varphi + \int_{-k\alpha}^{k\alpha} q_1(\varphi + \pi) K(\varphi - \theta - \pi)\, d\varphi = \pi\Delta R^{-1} f_1(\theta) - \pi C \cos\theta, \ |\theta| \leqslant \alpha \qquad (1.2)$$

$$\int_{-k\alpha}^{k\alpha} q_1(\varphi + \pi) K(\varphi - \theta)\, d\varphi + \int_{-\alpha}^{\alpha} q(\varphi) K(\varphi - \theta - \pi)\, d\varphi =$$

$$= \pi\Delta R^{-1} f_2(\theta + \pi) + \pi C \cos\theta, \qquad |\theta| \leqslant k\alpha$$

$$K(t) = -{}^1/_2 - {}^1/_{16}(5 - 8\nu)(1 - \nu)^{-2} \cos t - \cos t \ln|2 \sin {}^t/_2| + {}^1/_4 (1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1}$$

$$(\pi \operatorname{sgn} t - t) \sin t, \ \Delta = {}^1/_2 E (1 - \nu^2)^{-1}, \ C = \text{const}, \ t = \varphi - \theta \qquad (1.3)$$

Не нарушая общности, в дальнейшем будем считать, что $k \leqslant 1$.

Произведем замены переменных в системе (1.2) так, чтобы интегралы, стоящие в правых частях уравнений, имели пределы интегрирования от -1 до 1, а также заменим в первом уравнении системы (1.2) θ на αx, во втором θ в $k\alpha x$. Затем представим систему (1.2) в виде эквивалентной ей системы интегральных уравнений второго рода и получим

$$\omega^{(i)}(x) = \frac{P_i}{\pi} - \frac{\Delta}{\pi R}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}g_i'(\delta_i\alpha t)\,dt + \frac{\alpha\delta_i}{\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\int\limits_{-1}^{1}\{a_{20}\operatorname{sgn}(t-y) + F'[\alpha\delta_i(t-y)]\}\frac{\omega^{(i)}(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy + \tag{1.4}$$

$$+\frac{\alpha\delta_j}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\int\limits_{-1}^{1}K'[\alpha\delta_i(t-k\delta_i^{-2}y)]\frac{\omega^{(i)}(x)}{\sqrt{1-y^2}}dy,\quad |x|\leqslant 1\quad (i\neq j,\ i,\ j=1,2)$$

где

$$P_i = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\omega^{(i)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad q(\alpha x) = \frac{\omega^{(1)}(x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad q_1(k\alpha x+\pi) = \frac{\omega^{(2)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_1'(t) = f'_1(\alpha t) + R\Delta^{-1}C\sin\alpha t,\quad g_2'(k\alpha t) = f_2'(k\alpha t+\pi) - R\Delta^{-1}C\sin\alpha t$$

$$F(\tau) = K(\tau) + \ln|\tau| - a_{20}|\tau|,\qquad \tau = t-y,\qquad a_{20} = {}^1/_4(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \tag{1.5}$$

$$(\delta_1 = 1,\ \delta_2 = k)$$

Опишем вкратце процесс перехода от системы (1.2) к (1.4). Учитывая очевидное неравенство $\alpha(1+k) < \pi$, нетрудно заметить, что функция $K(\theta-\varphi)$ имеет лишь логарифмическую особенность на линии $\theta = \varphi$, а функция $K(\theta-\varphi-\pi)$ непрерывна в области изменения своего аргумента. Следовательно, каждое из уравнений системы (1.2) можно представить в виде

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt = \int\limits_{-\beta}^{\beta}\varphi(t)\psi(t-x)\,dt + \int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\varphi_1(t)\psi_1(t-x)\,dt + g(x),\qquad |x|\leqslant\beta$$

$$\psi(t-x)\in C(-2\gamma,2\gamma),\qquad \psi_1(t-x)\in C(-\gamma-\beta,\gamma+\beta)$$

Последнее, следуя [4], нетрудно записать в виде эквивалентного ему интегрального уравнения второго рода.

Если предположить, что

$$f(\alpha x)\in H_p^{\beta}(-1,1),\qquad p\geqslant 1,\qquad \beta>0$$

$$f_2(k\alpha x+\pi)\in H_m^{\gamma}(-1,1),\qquad m\geqslant 1, > \gamma > 0$$

(здесь и далее через $H_n^{\alpha}(-\beta,\beta)$ обозначено пространство функций, n-я производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α при $|x|\leqslant\beta$), то имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. Если решение системы (1.2) в классе функций $L_p(-1,1)$, $1+\delta > p > 1$, $\delta > 0$ существует и единственно, то при любом $\alpha\in(0,\pi)$ оно имеет вид

$$q(\alpha x) = \omega^{(1)}(x)(1-x^2)^{-1/2},\quad q_1(k\alpha x+\pi) = \omega^{(2)}(x)(1-x^2)^{-1/2}$$

$$(\omega^{(i)}(x)\in C(-1,1))$$

На доказательстве теоремы останавливаться не будем, так как она легко доказывается, если воспользоваться следующим свойством [5]

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\gamma(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\in C_m(-1,1),\qquad \text{если } \gamma(t)\in H_m^{\alpha}(-1,1)$$

Перейдем к построению асимптотического при малых α решения системы интегральных уравнений (1.4). Для этого предварительно представим $K(t)$ и $K(t-\pi)$

в виде

$$K(t) = \ln\ |t|\ F_1(t) + |t|\ F_2(t) + F_3(t) + a_{30} + a_{20}\,|t|-\ln|t|$$

$$K(t-\pi) = F_4(t) + a_{40}, \qquad F_i(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, t^{2k} \qquad (t = \varphi - \theta) \tag{1.6}$$

а правые части уравнений (1.2) в виде

$$-\pi C\cos\theta + \frac{\pi\Delta}{R} f_1(\theta) = \pi \sum_{k=0}^{N} b_{1k}\theta^{2k}, \quad \pi C\cos\theta + \frac{\pi\Delta}{R} f_2(\theta+\pi) = \pi\sum_{k=0}^{N} b_{2k}\theta^{2k} \tag{1.7}$$

Будем искать решение системы (1.4) в виде [4]

$$\omega^{(i)}(x) = \sum_{l=0}^{N}\sum_{j=0}^{m}\omega_{lj}^{(i)}(x)\,\alpha^l \ln^j\alpha \tag{1.8}$$

Подставляя (1.6) — (1.8) в систему (1.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях α и $\ln\alpha$, получим уравнения для последовательного определения $\omega_{lj}{}^{(i)}(x)$, решая которые, получим

$$\omega_{00}{}^{(i)}(x) = \pi^{-1}P_i,\ \omega_{10}{}^{(i)}(x) = [-b_{i2}(1-2x^2) + \pi^{-3}a_{20}S_1(x)\,P_i]\,\delta_i$$

$$\omega_{20}{}^{(i)}(x) = \pi^{-1}(1-2x^2)\,(P_jka_{41} + P_ia_{11}\delta_i\ln\delta_i) - 2\pi^{-1}a_{20}\,b_{i2}\delta_i^2\ S_4(x) + \pi^{-1}P_i\ \times$$
$$\times\ [(0.8069\ a_{11} + a_{31})\,(1-2x^2) + 32\pi^{-4}\,a_{20}{}^2\,(S_2(x) - 0.1508)]\ \delta_i^2$$

$$\omega_{21}{}^{(i)}(x) = \pi^{-1}\,P_ia_{11}\,(1-2x^2)\ \delta_i^2,\ \omega_{31}{}^{(i)}(x) = P_if_{31}(x)\ \delta_i^3 \tag{1.9}$$

$$\omega_{41}{}^{(i)}(x) = \pi^{-1}P_if_{41}(x)\delta_i^4, \quad \omega_{30}{}^{(i)}(x) = \{(f_{31}(x)\ln\delta_i + f_{30}(x))\,P_i + ({}^2/_3\,a_{11}b_{i2} + 4b_{i4})\ \times$$
$$\times(x^4 - {}^1/_2\,x^2 - {}^1/_8) + [{}^1/_2 a_{11}(1-2x^2) - {}^4/_3\,\pi^{-4}a_{20}{}^2\ N_9(x)]\,b_{i2}\}\,\delta_i^3 + 2\pi^{-3}a_{41}a_{20}P_jk\delta_i$$

$$\omega_{40}{}^{(i)} = \{P_i\,(f_{40}(x) + f_{41}(x)\ln\delta_i) + [{}^8/_3\,a_{20}{}^2\pi^{-5}N_5(x) - a_{20}a_{11}\pi^{-1}N_3(x) - a_{21}\pi^{-1}N_1(x)]\,b_{i2} -$$
$$-\ a_{20}\pi^{-1}\ [(1-2x^2)\ S_4(x) + {}^8/_{15}]\ b_{i4}\}\ \pi^{-1}\delta_i^4 + \pi^{-1}k\ P_j[{}^4/_3\ \pi^{-4}\ a_{41}a_{20}N_9(x) +$$
$$+\ ({}^2/_3 a_{41}a_{11} + 4a_{42})\,(-x^4 + {}^1/_2\ x^2 + {}^1/_8) - {}^1/_2\,a_{11}a_{41}\,(1-2x^2)]\ \delta_i^2 + 6\pi^{-2}\alpha_{42}P_jk\delta_j^2$$

Здесь

$$f_{31}(x) = 2\pi^{-3}a_{11}a_{20}S_4(x),\ f_{30}(x) = \pi^{-3}\,\{{}^8/_9\,a_{11}a_{20}S_3(x) + [6a_{21}(1+2x^2) - 19.3\,\pi^{-4}\ \times$$
$$\times a_{20}{}^3]\,S_1(x) + [9a_{21} + (1.614\,a_{11} + 2a_{31})\,a_{20}]\,S_4(x) + {}^8/_3\,a_{21} + 64\pi^{-4}a_{20}{}^3\,S_5(x)\}$$

$$f_{41}(x) = 4\,(x^4 + x^2 - {}^7/_8)\,a_{12} + {}^2/_3\,(x^4 - 2x^2 + {}^5/_8)\,a_{11}{}^2 - {}^4/_3\ \pi^{-4}a_{11}a_{20}{}^2\,N_9(x)$$

$$f_{40}(x) = -4\,(x^4 + x^2 - {}^7/_8)a_{32} - (5.561x^4 - 0.4384x^2 - 1.866)a_{12} + 8\pi^{-4}a_{20}a_{21}N_2(x) +$$
$$+{}^2/_3\,\pi^{-4}\,a_{20}{}^2\,(1.614a_{11} + 2a_{31})\,N_9(x) + 64\pi^{-8}a_{20}{}^4N_6(x) - (1.614a_{11} + 2a_{31})\,(x^4 - 2x^2 + {}^5/_8) +$$
$$+16\pi^{-4}a_{11}a_{20}{}^2N_4(x)$$

$$N_1(x) = {}^4/_{15} + (x^2 - {}^5/_2)\ S_4(x) - 3S_1(x),\ N_2(x) = -{}^4/_3\,S_1(x) + 12\,(1 + x^2)\ \times$$
$$\times\ S_2(x) + 6S_7(x) - {}^3/_4\,S_6(x) + 4.189x^2 - 5.570$$

$$N_3(x) = {}^8/_9\,(1 - 2x^2) - S_1(x) + {}^2/_3\,(x^2 - {}^5/_2)\ S_4(x) + {}^8/_{45} \tag{1.10}$$

$$N_4(x) = S_8(x) + (0.08312x^2 - 1.208)S_4(x) - 0.2494S_1(x) - 0.0264x^6 + 0.09928x^4 -$$
$$-\ 0.5635\ x^2 - 0.2986$$

$$N_5(x) = (0.8896 - 0.1657x^2 - 0.05714x^4)\,S_6(x) - (3.146 - 1.156x^2 + 0.01905x^4)\times$$
$$\times S_4(x) - 0.0192S_1(x) + 0.3723 + 0.01523x^2,\ N_6(x) = (0.4583 - 0.1658x^2 + 0.003168x^4)\times$$
$$\times S_4(x) - (0.1245 - 0.01435x^2 - 0.003502\ x^4)S_6(x) + 0.00478S_1(x) - 0.05016 -$$
$$-\ 0.002534x^2,\ \ N_7(x) = (0.2360 + 0.06605x^2)S_4(x) + 0.3948 - 1.308\ x^2 + 0.8207x^4 +$$
$$+\ 0.08315\ (1 - x^2)^2\ln^2(1 - x)\ (1 + x)^{-1}$$

$$N_8(x) = 9S_4(x) + 6(1 + 2x^2) S_1(x) + 8/3, \quad N_9(x) = 2S_4(x) - S_6(x)$$

$$U_{2n+3}(x) + U_{2n-1}(x) + 2(1 - 2x^2) U_{2n+1}(x) - 8x / (2n + 1) = 0$$

$$-U_{-1}(x) = U_1(x) = -\ln(1 + x)(1 - x)^{-1}$$

$$S_6(x) = 2/3 + (1 - 2x^2) + 1/2 (1 - x^2)^2 \left(\ln^2 (1 - x)(1 + x)^{-1} - \pi^2\right)$$

$$S_7(x) = (1 - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3U_{2k}(x)}{(4k^2 - 9)^2} - \frac{4xU_{2k-1}(x)}{(2k + 1)^2 (2k - 3)^2}\right]$$

$$S_8(x) = 96(1 - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{2k}(x)}{(4k^2 - 1)^2 (4k^2 - 9)^2}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1 \\ k, & \text{если } i = 2 \end{cases} \quad i \neq j; \; i, j = 1, 2$$

Выражения для функций $S_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, а также $U_{2k}(x)$ приведены в работе [4], см. формулу (1.15). Там же даны таблицы функций $S_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,5$ для значений $|x| \leqslant 1$ с шагом $h = 0.1$.

Итак, получено асимптотическое решение системы (1.4) или, что одно и то же, продифференцированной системы (1.2). Очевидно, что класс решений продифференцированной системы (1.2) будет включать в себя весь класс решений исходной системы (1.2), а также посторонние для системы (1.2) решения, удовлетворяющие решению системы (1.2) с произвольной постоянной правой частью. Используя имеющийся произвол в решении системы (1.4), можно потребовать, чтобы полученное решение системы (1.4) удовлетворяло исходной системе (1.2). При этом получим уравнения для определения роизвольных постоянных P_i.

Займемся теперь определением P_i. Для этого подставим найденные значения $\omega^{(i)}(x)$ в систему (1.2). Затем положим $\theta = 0$ и, вычислив все интегралы, получим систему уравнений для определения P_i, а именно:

$$P_1 \sum_{l=0}^{4} (A_{l0} + A_{l1} \ln\alpha)\, \alpha^l + P_2 \left[\sum_{l=0}^{4} B_{l2} \alpha^l - 1/4\, a_{41}{}^2 k^3 \alpha^4 \ln k\alpha\right] = \sum_{l=-1}^{3} C_{l1} \alpha^l - 1/4\, a_{11} b_{12} \pi \alpha^3 \ln \alpha \tag{1.11}$$

$$P_1 \left[\sum_{l=0}^{4} B_{l1} \alpha^l - 1/4\, a_{41}{}^2 k \alpha^4 \ln \alpha\right] + P_2 \sum_{l=0}^{4} (A_{l0} + A_{l1} \ln k\alpha)(k\alpha)^l =$$

$$= \sum_{l=-1}^{3} C_{l2} \alpha^l - 1/4\, \pi a_{11} b_{22} k^3 \alpha^3 \ln k\alpha$$

Здесь

$$A_{00} = a_{30} + \ln 2, \quad A_{10} = 0.8106 a_{20}, \quad A_{20} = a_{31} + 0.3069 a_{11} - 0.03288 a_{20}{}^2$$

$$A_{30} = 1.442 a_{21} - 0.1454 a_{11} a_{20} - 0.1802 a_{31} a_{20} - 0.01775 a_{20}{}^3$$

$$A_{40} = 2.025 a_{32} + 1.066 a_{12} - (0.8545 a_{11} + 0.6254 a_{31} - 0.0220 a_{20}{}^2)\, 10^{-1} a_{20}{}^2 - 0.3004 a_{20} a_{21} -$$
$$- 0.1628\, a_{11}{}^2 - 0.4103 a_{11} a_{31} - 0.25\, (a_{31}{}^2 + k^2 a_{41}{}^2)$$

$$A_{01} = -1, \quad A_{11} = 0, \quad A_{21} = a_{11}, \quad A_{31} = -0.1801 a_{11} a_{20}, \quad A_{41} = 2.025 a_{12} - 0.4039\, a_{11}{}^2 -$$
$$- 0.0653 a_{11} a_{20}{}^2 - 0.5 a_{31} a_{11}, \quad B_{0i} = k^{-1} a_{40} \delta_i{}^2 \tag{1.12}$$

$$B_{1i} = 0, \quad B_{2i} = 1/2 a_{41} (1 + k^2) k \delta_j^{-2}, \quad B_{3i} = -0.09006 a_{41}\, a_{20}\, k (1 + k^2) \delta_j^{-2}, \quad C_{0i} = 0$$

$$B_{4i} = -a_{41} (0.2017\, a_{11} + 0.25\, a_{31} + 0.04927 a_{20}{}^2), \quad \delta^{-2}{}_j\; k\,(1 + k)^2, \quad C_{-1i} = \pi b_{i0} \delta_i^{-1}$$

$$C_{1i} = -1/2\, \pi b_{i2} \delta_i, \quad C_{2i} = -0.2829 a_{20} b i_2\, \delta_i{}^2, \quad C_{3i} = -[(0.6337 a_{11} + 0.06051 a_{20}{}^2 + 0.7854 a_{31}) \times$$
$$\times b_{i2} - 1.178\, b_{i4}]\; \delta_i{}^3 - 1/4\, \pi\, a_{41}\, k b_{j2} \delta_j \quad (i \neq j; \; i, j = 1,2; \; \delta_1 = 1, \; \delta_2 = k)$$

И, наконец, для определения Q_j, получим следующую формулу:

$$Q_i = R\alpha\delta_i \{P_i \, [1 - {}^1/_4\, \alpha^2\delta_i^2 + {}^4/_9\, \pi^{-2}\, a_{20}\, \alpha^{-3}\delta_i^3 - (0.1008a_{11} + 0.125a_{31} + 0.02464a_{20}^2 - {}^1/_{64} - {}^1/_8\, a_{11} \ln \delta_i)\, \alpha^4\delta_i^4 - {}^1/_8\, ka_{41}P_j\, \alpha^4\delta_i^4 - {}^1/_8\, \pi\, b_{i2}\alpha^3\delta_i^3\} \quad (i \neq j,\ i,\ j = 1{,}2) \tag{1.13}$$

Формула (1.13) дает значение силы, отнесенной к единице длины диска. Чтобы получить силы, которые нужно приложить к диску длины l, надо значения, даваемые формулой (1.13), умножить на l.

Выпишем ряд коэффициентов a_{ik}, входящих в формулы (1.6)

$$a_{11} = 0.5,\ \ a_{12} = -{}^1/_{24},\ \ a_{20} = 0.25\pi a,\ \ a_{21} = -{}^1/_{24}\pi a,\ \ a_{30} = -0.5 - b$$
$$a_{31} = 0.5({}^1/_{12} + b - 0.5a),\ a_{32} = {}^1/_{24}\,(a - b - {}^{113}/_{240}) \tag{1.14}$$
$$a_{40} = -0.5 + \ln 2 + b,\ a_{41} = 0.5\,(0.5a - b - \ln 2 - 0.25),\ a_{42} = {}^1/_{24}\,(b - a + \ln 2 + {}^{19}/_{16}),\ (a = (1 - 2\nu)\,(1 - \nu)^{-1},\ b = {}^1/_{16}\,(5 - 8\nu)\,(1 - \nu)^{-2})$$

Общая схема расчета по предложенным формулам следующая.

1. Задавая ν по формулам (1.14), находим a_{ik}.

2. Задавая α и k и используя формулы (1.12), из системы (1.11) находим значения P_i $(i = 1{,}2)$, затем по формуле (1.13) находим Q_i $(i = 1{,}2)$.

3. Задавая Q, из условия $Q = Q_2 - Q_1$ найдем произвольную постоянную C. Подставляя ее в формулу (1.13), найдем Q_2, а также $Q_1 = Q_2 - Q$.

4. Подставляя C в найденные значения P_i и формулы (1.9), находим напряжения по формулам (1.8), (1.5).

На этом заканчивается расчет, если ищем решение системы не ограниченное на краях штампов. Если же требуется найти решение, ограниченное на краях одного, либо обоих штампов, то, потребовав, чтобы $\omega^{(i)}(1) = 0$, $i = 1$ (или $i = 2$, в зависимости от того, для какого из штампов ищется ограниченное решение на краях), либо $i = 1{,}2$, получим соответственно одно, либо два уравнения, налагающих определенные условия на функцию $f_i(\theta)$, $i = 1$ (или 2), либо на функцию $f_i(\theta)$, $i = 1,\ 2$. Как правило, в этом случае получается уравнение, либо система уравнений для определения осадки под штампом в точке $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, либо в обоих этих точках.

Замечание 1.1. Для определения ограниченных решений можно не задавать область (области) контакта, а задать силы Q_1, Q_2. В этом случае область (области) контакта можно определить из условия ограниченности решения на краях штампа (штампов). Однако, при этом придется решать сложное трансцендентное уравнение (систему трансцендентных уравнений) относительно угла (углов) контакта, поэтому предложенная схема расчета предполагает задание угла (углов) контакта. Построив зависимость силы Q_1, либо Q_2 от угла (углов) контакта и силы Q, всегда можно определить угол (углы) контакта при данной силе Q_1, либо Q_2.

Замечание 1.2. Если имеется один штамп, либо два штампа одинаковой формы, то нужно рассматривать только одно уравнение системы (1.2). При этом в решении нужно положить в первом случае $P_2 = k = 0$, а во втором $P_1 = P_2$, $\quad Q = C = 0$.

Замечание 1.3. Рассмотрим систему интегральных уравнений несколько более общего вида, чем система (1.2), рассмотренная в работе, а именно:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \{-\ln|x - t| + {}^1/_2\,\mu_1\,|x - t| + K_1(x - t)\}\, q(t)\, dt + \int_{-k\alpha}^{k\alpha} q_1(t)\, [K_{14}(x - t) + b_1]\, dt = f_1(x), \qquad |x| \leqslant \alpha \tag{1.15}$$
$$\int_{-k\alpha}^{k\alpha} \{-\ln|x - t| + {}^1/_2\,\mu_2\,|x - t| + K_2(x - t)\}\, q_1(t)\, dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} q(t)\, [K_{24}(x - t) + b_2]\, dt = f_2(x), \qquad |x| \leqslant k\alpha$$

Здесь

$$K_i(\tau) = \ln|\tau| F_{i1}(\tau) + |\tau| F_{i2}(\tau) + F_{i3}(\tau) + c_i$$

$$F_{il}(\tau) = \sum_{m=1}^{N} a_{ilm}\tau^m, \qquad \tau = x - t, \quad a_{111} = a_{211} = 0 \tag{1.16}$$

Нетрудно заметить, что метод, используемый в работе для решения системы (1.2), применим и к системе (1.15), а также к системе, полученной из (1.15) дифференцированием один раз по x, т. е. к системе интегральных уравнений вида

$$\begin{gathered}
\mu_1 \int_{-\alpha}^{x} q(t)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q(t)}{t-x}\,dt = f_1'(x) - \int_{-\alpha}^{\alpha} q(t) K_1'(x-t)\,dt - \\
- \int_{-k\alpha}^{k\alpha} q_1(t) K_{14}'(x-t)\,dt + \frac{\mu_1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(t)\,dt, \qquad |x| \leqslant \alpha \\
\mu_2 \int_{-k\alpha}^{x} q_1(t)\,dt + \int_{-k\alpha}^{k\alpha} \frac{q_1(t)}{t-x}\,dt = f_2'(x) - \int_{-k\alpha}^{k\alpha} q_1(t) K_2'(x-t)\,dt - \\
- \int_{-\alpha}^{\alpha} q(t) K_{24}'(x-t)\,dt + \frac{\mu_2}{2}\int_{-k\alpha}^{k\alpha} q(t)\,dt, \qquad |x| \leqslant k\alpha
\end{gathered} \tag{1.17}$$

Последнее следует из того, что, как уже отмечалось ранее для системы (1.2), прежде чем найти решение системы (1.15), необходимо решить сначала систему вида (1.17).

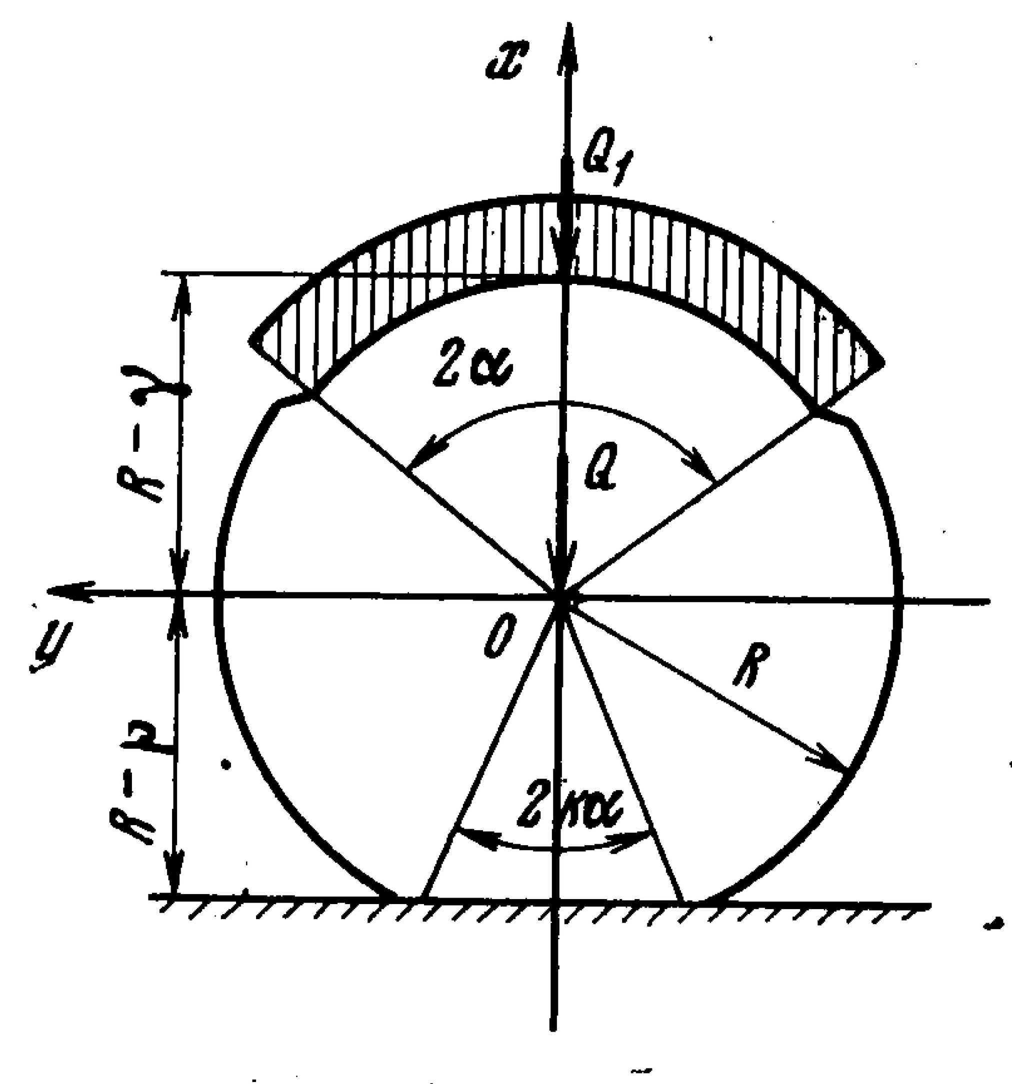
Заметим, что если в формуле (1.16) функции $F_{i1}(\tau) = 0$, то решение системы (1.15), либо (1.17), нужно искать в виде ряда только по степеням α.

Замечание 1.4. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\mu\gamma(x) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma'(t)}{t-x}\,dt = f(x), \qquad |x| \leqslant \alpha \tag{1.18}$$

Если в (1.18) положить $\gamma'(x) = q(x)$, тогда $\gamma(x) = \int_{-\alpha}^{x} q(t)\,dt + C$, и уравнение (1.18) можно записать так:

$$\mu \int_{-\alpha}^{x} q(t)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q(t)}{t-x}\,dt = f(x) - \mu C$$



Фиг. 2

Уравнение (1.19) совпадает по виду с первым из уравнений системы (1.17) и, следовательно, если α мало, то к уравнению (1.19) можно применить метод, изложенный в предлагаемой работе, при этом получим решение и уравнения (1.18). Произвольная постоянная C может быть определена из условия, которое получится, если потребовать, чтобы решение уравнения (1.19) удовлетворяло исходному уравнению (1.18).

§ 2. Примеры. Пусть

$$(1)\ f_1(\theta) = \gamma = \text{const},\ f_2(\theta) = R + (R - \beta)\cos^{-1}\theta$$

В этом случае

$$b_{10} = \Delta\gamma R^{-1} - C,\ b_{12} = {}^1/_2\,C,\ b_{14} = -{}^1/_{24}\,C,\ b_{20} = \beta\Delta R^{-1} + C$$

$$b_{22} = -{}^1/_2\,(\Delta + \beta\Delta R^{-1} + C),\ b_{24} = {}^1/_{24}\,(C - 5\Delta - 5\,\beta\Delta\,R^{-1})$$

Положим $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $k = 0.1$; получим, пользуясь предложенной схемой расчета

$$Q_2 = (3.728\Delta R + 5.656\Delta\gamma + 3.591 Q)\, 10^{-3}$$

$$\Delta\beta = 1.440 Q_2 - 0.9593\Delta\gamma - 0.4023 Q - 0.5873\, 10^{-3}\, \Delta R$$

$$CR = 0.2235 Q - 0.3457 Q_2 + 01.9544\Delta\gamma - 0.3667\cdot 10^{-4}\, \Delta R$$

$$(2)\ f_1(\theta) = \gamma_1,\ f_2(\theta) = \gamma_2,\ \gamma_i - \mathrm{const}$$

В этом случае

$$b_{10} = \Delta\gamma_1 R^{-1} - C,\ b_{12} = {}^1/_2\, C,\ b_{14} = -{}^1/_{24}\, C$$

$$b_{20} = \Delta\gamma_2 R^{-1} + C,\ b_{22} = -{}^1/_2\, C,\ b_{24} = {}^1/_{24}\, C$$

Положим $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $k = 1$ и получим

$$Q_2 = 0.428\,\pi\Delta\,(\gamma_1 + \gamma_2) + {}^1/_2\, Q,\ CR = 0.15\,\pi\Delta\,(\gamma_1 - \gamma_2) + 0.04371\, Q$$

Если теперь $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то $P_1 = P_2$, $Q = C = 0$; тогда получим

$$Q_i = 0.856\, D,\ P_i = 1.819\ (1.820)\, D,\ \omega^{(i)}\ (0) = 1.755\ (1.787)\, D$$

$$\omega^{(i)}\,(0.5) = 1.796\ (1.819)\, D, \omega^{(i)}\,(1) = 1.852\ (1.821)\, D,\ D = \pi\Delta\gamma$$

В скобках приведены значения этих величин, вычисленных методом, изложенным в работе [6].

x	N_1	N_2	N_3	$N_4\cdot 10^4$	N_5	$N_6\cdot 10^4$	N_7	N_8	N_9
0.0	—5.562	4.208	—1.987	—4324	—5.855	8472	1.024	19.66	4.934
0.1	—5.406	4.077	—1.916	—4179	—5.622	8140	0.9907	19.31	4.756
0.2	—4.949	3.698	—1.853	—3724	—4.948	7177	0.8920	18.26	4.235
0.3	—4.214	3.077	—1.377	—3018	—3.893	5647	0.7333	16.50	3.410
0.4	—3.239	2.165	—0.9546	—2097	—2.529	3709	0.5235	13.98	2.310
0.5	—2.076	1.199	—0.4746	—1052	—1.063	1594	0.2777	10.64	1.111
0.6	—0.789	0.687	—0.0172	—0019	0.4130	—0632	0.0067	6.429	—0.157
0.7	0.557	—0.751	—0.4707	1016	1.697	—2432	—0.2576	1.239	—1.327
0.8	1.886	—1.380	0.8277	1809	2.590	—3756	—0.4808	— 5.017	—2.219
0.9	3.133	—1.367	1.029	2737	2.887	—4217	—0.6108	—12.49	—2.606
1.0	4.267	—0.057	0.9553	2102	2.191	—3216	—0.4961	—21.33	—2.000

Для удобства практического использования полученных в данной работе результатов в таблице приведены значения функций $N_i(x)$, $i = 1,2,\ldots, 9$, определяемых соотношениями (1.10).

В заключение отметим, что, как показали расчеты, формулы, полученные в данной работе, можно с успехом применять для значений $\alpha \leqslant 0.6$.

Поступила 25 III 1968 Ростовский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Белоконь А. В. Контактные задачи теории упругости для цилиндрических тел. Аннот. докл. III Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., «Наука», 1968.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
3. Папкович П. Ф. Теория упругости. М.— Л., Оборонгиз, 1939.
4. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
6. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.