

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОСОБЕННОСТИ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ ВБЛИЗИ УГЛОВ

А. И. Каландия (Тбилиси)

1. Известно, что упругие смещения и напряжения в плоском случае выражаются через функцию напряжения Эри $U(x, y)$ и одну гармоническую функцию $p(x, y)$ в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q \quad (1.2)$$

причем функции U и p связаны между собой соотношением

$$\Delta U = 4 \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.3)$$

а q означает сопряженную с p гармоническую функцию.

Введем в рассмотрение плоскость комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Вильямс [1] изучал напряжения вблизи вершины сектора с прямолинейными сторонами $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$, где α — произвольный угол; $0 < \alpha \leq 2\pi$. Исходными для рассмотрений Вильямса являлись частные решения уравнений теории упругости вида

$$U = r^{\lambda+1} [b_1 \sin(\lambda + 1)\theta + b_2 \cos(\lambda + 1)\theta + b_3 \sin(\lambda - 1)\theta + b_4 \cos(\lambda - 1)\theta] \quad (1.4)$$

$$p = r^m [a_1 \cos m\theta + a_2 \sin m\theta] \quad (1.5)$$

где λ, b_i — произвольные комплексные постоянные, m, a_1, a_2 — также постоянные, определяемые через предыдущие из (1.3).

Составляя напряжения и смещения по предыдущим формулам, названный автор удовлетворял на радиальных сторонах сегмента однородным условиям плоской задачи и получал линейные уравнения для определения неизвестных b_i . Построив затем характеристическое уравнение для λ и определив его надлежащий корень λ , он находил нетривиальное поле упругих элементов, дающее при некоторых значениях угла α бесконечные напряжения у вершины. Этим путем Вильямсом для данного материала была установлена зависимость между порядком сингулярности напряжений вблизи угла и величиной этого угла в случаях, когда на образующих угол сторонах сектора задаются внешние усилия или смещения, либо когда на одной стороне заданы усилия, а на другой — смещения (основная смешанная задача).

Ниже указывается несколько иной подход к построению характеристического уравнения и исследование Вильямса дополняется рассмотрением других возможных видов граничных условий¹.

2. Формулы (1.4) и (1.5) представим, прежде всего, в виде

$$2U = c_1 \bar{z} z^\lambda + c_2 z \bar{z}^\lambda + c_3 z^{\lambda+1} + c_4 \bar{z}^{\lambda+1} \quad (2.1)$$

$$2p = c_1 z^\lambda + c_2 \bar{z}^\lambda \quad (2iq = c_1 z^\lambda - c_2 \bar{z}^\lambda) \quad (2.2)$$

где c_i — произвольные комплексные постоянные.

Необходимыми и достаточными условиями вещественности правых частей предыдущих формул, очевидно, будут

$$c_1 = \bar{c}_2, \quad c_3 = \bar{c}_4, \quad \text{Im } \lambda = 0 \quad (2.3)$$

При этих лишь условиях формулы (1.1) и (1.2) определяют вещественное поле смещений и напряжений.

Поэтому характеристические уравнения Вильямса могут быть построены, исходя из граничных условий задач в комплексной форме, если в качестве потенциалов Колосова — Мусхелишвили брать

$$\varphi(z) = az^\lambda, \quad \psi(z) = bz^\lambda \quad (2.4)$$

¹ Следует заметить, что в сообщении И. И. Воровича на III Всесоюзном съезде механиков (Москва, январь — февраль, 1968) был изложен общий результат о построении решения плоских задач вблизи углов.

при комплексных a, b, λ , считать формально λ вещественным числом, а постоянные числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}$ рассматривать как не зависящие одно от другого неизвестные.

К примеру, в случае первой задачи, когда граничное условие имеет вид [2]

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \quad (2.5)$$

будем иметь на прямолинейных краях сектора ¹

$$az^\lambda + \bar{a}\lambda z\bar{z}^{\lambda-1} + \bar{b}\bar{z}^\lambda = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \alpha$$

Присоединив к предыдущим уравнениям еще два других, полученных переходом в них к сопряженным значениям, будем иметь систему из четырех однородных уравнений. Требование наличия нетривиального решения a, \bar{a}, b, \bar{b} у системы приводит к характеристическому уравнению относительно λ

$$\sin \lambda\alpha = \pm \lambda \sin \alpha \quad (2.6)$$

совпадающему с уравнением работы [1] для этого случая.

Определив, согласно Вильямсу (вообще говоря, комплексный) корень λ уравнения (2.6) с минимальной положительной вещественной частью и найдя соответствующие неизвестные a, b, \bar{a}, \bar{b} , можно построить решение плоской задачи

$$2U = a\bar{z}z^\lambda + \bar{a}z\bar{z}^\lambda + \frac{b}{\lambda+1}z^{\lambda+1} + \frac{\bar{b}}{\lambda+1}\bar{z}^{\lambda+1}$$

$$2p = az^\lambda + \bar{a}\bar{z}^\lambda \quad (2iq = az^\lambda - \bar{a}\bar{z}^\lambda)$$

удовлетворяющее всем требованиям классической упругости. Напряжения, соответствующие этому решению, будут при $\text{Re } \lambda < 1$ обладать у вершины сингулярностью порядка $1 - \text{Re } \lambda$.

Наряду с основными задачами плоской теории упругости будем рассматривать случай, когда на радиальных сторонах сектора осуществляется условие соприкасания с жестким профилем заданной формы без трения. Это условие, как известно, заключается в задании нормального смещения и касательного напряжения

$$v_\vartheta = f(t), \quad \tau_{r\vartheta} = 0 \quad (\vartheta = \text{const}) \quad (2.7)$$

Граничные условия плоской задачи при заданных внешних усилиях будем обозначать символом I, условия задачи при заданных смещениях — символом II, а условия давления жесткого штампа без трения — символом III. Случай, когда на одной стороне сектора задаются условия I, а на другой — условия II, будем обозначать через I—II и т. д.

Напишем известные формулы комплексного представления в полярных координатах

$$2\mu v_\vartheta = \text{Im} \{e^{-i\vartheta} [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]\} \quad (2.8)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \text{Im} \{e^{2i\vartheta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\} \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.8) по r вдоль луча $\vartheta = \text{const}$ и складывая с (2.9), находим

$$2\mu \frac{dv_\vartheta}{dr} - \tau_{r\vartheta} = \text{Im} \{\kappa\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\}$$

Следовательно, граничные условия (2.7) задачи о жестком штампе в рассматриваемом случае могут быть представлены в виде

$$\text{Im } \varphi'(t) = \frac{2\mu}{\kappa+1} e^{i\vartheta} f'(t), \quad \text{Im} \{e^{-i\vartheta} [\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\} = 2\mu f(t) \quad (2.10)$$

$$\vartheta = 0, \quad \alpha(t = re^{i\vartheta})$$

¹ Условия на дуговой части границы, не влияющего на характер напряжений вблизи вершины сектора, во внимание принимать не будем.

Исходя из однородных условий (2.10) и потенциалов (2.4), совершенно так же, как при выводе (2.6), находим следующее характеристическое уравнение для случая соприкасания со штампом вдоль обеих сторон

$$\sin \lambda \alpha = \pm \sin \alpha \quad (2.11)$$

Характеристические уравнения для остальных случаев I-III и II-III могут быть построены тем же путем, если на одной радиальной стороне задавать условие (2.10), а на другой — условие (2.5), либо условие II

$$\kappa \varphi(t) - \overline{t \varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 0$$

Эти уравнения имеют вид

$$\sin 2\lambda \alpha = -\lambda \sin 2\alpha \quad (\text{для случая I-III}) \quad (2.12)$$

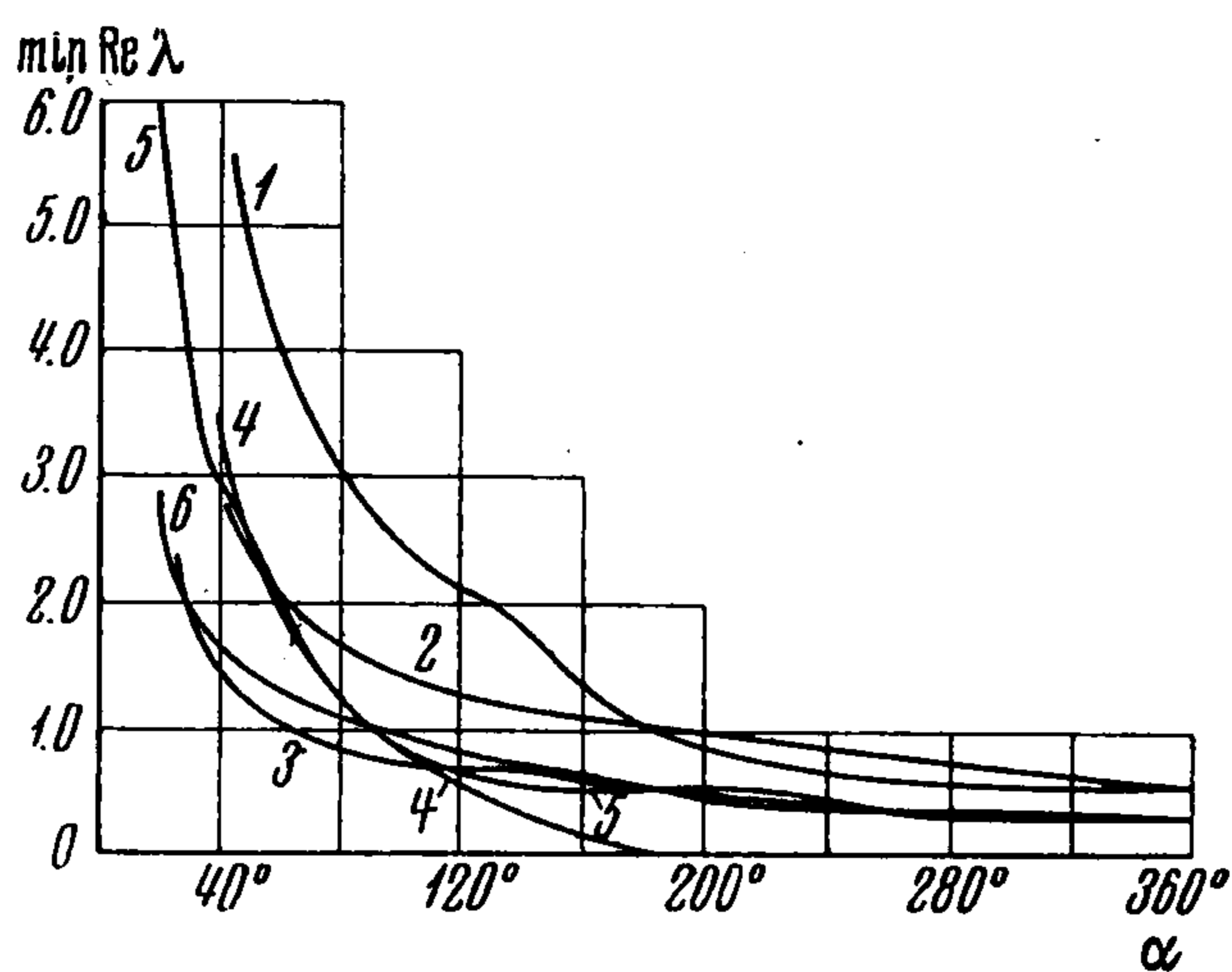
$$\sin 2\lambda \alpha = \frac{\lambda}{\kappa} \sin 2\alpha \quad (\text{для случая II-III}) \quad \left(\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) \quad (2.13)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона.

Были найдены корни уравнений (2.11) — (2.13) с минимальными положительными вещественными частями при различных значениях угла α и $\nu = 0.3$. Графики функции $\min \operatorname{Re} \lambda$ показаны для всех шести случаев ¹ на фигуре.

В случае III-III (уравнение (2.11)) график показан лишь в интервале $(0, \pi)$. Корень $\lambda = 0$, соответствующий $\alpha = \pi$, тривиален и его следует исключить.

В случае III-III, а также в случаях, когда вершина угла будет точкой смены гра-



ничных условий, сингулярность в напряжениях может появиться при любом угле α , превосходящем прямой угол ($\alpha > 1/2\pi$, $\alpha \neq \pi$). Исключение представляет случай I-II (Вильямс [1]), где сингулярность появляется уже при $\alpha > 63^\circ$.

Максимальный порядок сингулярности в напряжениях одинаков для всех трех смешанных случаев. Он достигается при $\alpha = 2\pi$ (кончик разреза) и равен $3/4$ ($\operatorname{Re} \lambda = 1/4$).

3. В случае, когда при составлении основных уравнений упругости учитываются, согласно концепции братьев Коссера [3], моментные напряжения (моменты на единицу площади), нетрудно при заданном значении угла α , отличном от π и превосходящем некоторый α_0 , построить решение корректно поставленной плоской задачи с неограниченными напряжениями вблизи углов.

Рассмотрим для примера задачу о соприкасании упругого тела с жестким профилем заданной формы при отсутствии сил трения (задача III предыдущего пункта). В качестве третьего условия на границе поставим условие задания поворота ее точек.

Напишем формулы общего представления элементов упругих полей в несимметричном случае в полярных координатах [4]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + i(\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) = 2 \left[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) + m \varphi'''(z) + 2i \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] e^{2i\theta}$$

$$\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r} = -\frac{1}{l^2} H$$

$$2\mu(\nu_r + i\nu_\theta) = \left[\kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - m \overline{\varphi''(z)} + 2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right] e^{-i\theta}$$

¹ Кривые для случаев I-I, II-II, I-II взяты из цитированной выше работы Вильямса. Для кривых принята следующая нумерация: 1 (I-I), 2 (II-II), 3 (I-II), 4 (III-III), 5 (I-III), 6 (II-III).

$$M_{\vartheta} + iM_r = \left[m\varphi''(z) + 2i \frac{\partial H}{\partial z} \right] e^{i\vartheta}, \quad 2\mu\omega = \operatorname{Im} \left\{ (\kappa + 1)\varphi'(z) + \frac{i}{2l^2} H \right\} \quad (3.1)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad m = 8(1 - \nu) l^2 \quad (3.2)$$

Здесь M_r , M_{ϑ} — полярные компоненты моментного напряжения, ω — вращение элемента среды.

Функция H удовлетворяет в области, занятой упругой средой, уравнению Гельмгольца

$$\Delta H - k^2 H = 0, \quad k^2 = \frac{1}{l^2} \quad (3.3)$$

где l^2 — новая константа материала, равная отношению модуля изгиба к модулю сдвига μ . Остальные обозначения прежние, либо общеизвестны. Из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\vartheta r} &= \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\vartheta} \left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) + m\varphi'''(z) + 2i \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] + \frac{ik^2}{2} H \right\} \\ -2\mu v_{\vartheta} &= \operatorname{Im} \left\{ e^{i\vartheta} \left[\kappa\overline{\varphi'(z)} - \bar{z}\varphi'(z) - \psi(z) - m\varphi''(z) - 2i \frac{\partial H}{\partial z} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Дифференцируя второе равенство вдоль прямой $\vartheta = \text{const}$ и складывая с первым, находим

$$2\mu \frac{dv_{\vartheta}}{dr} - \tau_{\vartheta r} = \operatorname{Im} \{ (\kappa + 1)\varphi'(z) \} \quad (3.5)$$

Следовательно, однородные граничные условия рассматриваемой задачи, задаваемые вдоль радиальных сторон сектора, т. е. условия

$$v_{\vartheta} = \tau_{\vartheta r} = \omega = 0$$

могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ e^{i\vartheta} [\kappa\overline{\varphi'(t)} - t\varphi'(t) - \psi(t) - m\varphi''(t)] \} - \frac{dH}{dr} &= 0 \\ \operatorname{Im}\varphi'(t) = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \alpha \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко убедиться, что предыдущим условиям удовлетворяют функции

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = z^{\lambda-1}, \quad H(z, \bar{z}) = I_{\lambda}(kr) \sin \lambda\vartheta \quad (3.7)$$

где I_{λ} — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, и $\lambda = \pi/\alpha$.

При значениях угла α , удовлетворяющих условию $1/2\pi < \alpha < \pi$, решение (3.7) дает при $r \rightarrow 0$ ограниченные смещения и моментные напряжения, а обычные напряжения будут бесконечными порядка ниже единицы; точнее, напряжения будут иметь порядок $O(r^{\lambda-2})$, где $0 < 2 - \lambda < 1$. Ту же самую картину получим, если при $\pi < \alpha < 2\pi$ взять в (3.7) значение $\lambda = 2\pi/\alpha$.

Поступила 19 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No 4, p. 526—528.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
3. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, Hermann, et Fils, 1909
4. Миндлин Р. Д. Комплексное представление смещений и напряжений в плоском деформированном состоянии с учетом моментных напряжений. В сб.: «Приложения теории функции в механике сплошной среды. М., «Наука», 1965, стр. 256—259.