О ТЕРМОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Н. В. Слоновский (Харьков)

В последнее время появилось много работ, посвященных исследованию взаимозависимости процесса трения скольжения и нормального перемещения пар трения (основная литература приведена в [1,2]). Однако в этих работах не рассматривались вопросы, связанные с термоупругими явлениями, которые могут оказывать существенное влияние на процесс трения при наличии связей, ограничивающих нормальное перемещение пар трения. Характер термоупругих процессов, происходящих при трении, определяется балансом между тепловыделением и отводом тепла в зоне трения и зависит, в конечном счете, от физико-геометрических свойств узла трения. В общем случае эффективное аналитическое решение задач, связанных с описанием термоупругих процессов, происходящих при трении, представляет значительные трудности, в связи с этим целесообразно рассмотреть модельную задачу с условием достаточно точно аппроксимирующим некоторые случаи трения и допускающей точное решение.

Ниже рассматривается следующая задача. Тело в виде пластины перемещается между двумя плоскими, параллельными, абсолютно жесткими поверхностями, находящимися на неизменном расстоянии (принадлежащими, например, двум абсолютно твердым телам), трение происходит между первой поверхностью и пластиной, между второй поверхностью и пластиной трение отсутствует; первая поверхность является тепловым изолятором, температура второй поверхности (и соответствующей поверхности пластины) равна нулю. Требуется определить напряжение и распределение температуры в пластине. Условия изотермичности и адиабатичности не обязательны и могут быть заменены другими краевыми условиями.

Полученный результат — существование устойчивого и неустойчивого режимов трения — распространяется на широкий класс пар трения.

Выберем систему координат с началом на поверхности первого тела и осью X, перпендикулярной пластине и направленной во внутрь пластины; используем обозначения λ, a^2, α, E, l, v, f, $T(x, t)$, $\sigma(t)$ для коэффициентов теплопроводности, температуропроводности, линейного расширения, модуля упругости, толщины, скорости перемещения пластины относительно первого тела, коэффициента трения, температуры, нормального напряжения (действующего на площадке, параллельной пластине). Теплофизические параметры, как это принято в теории термического контакта при локальном трении [3–6], предполагаются постоянными.

Рассмотрим два решения задачи, соответствующие двум различным условиям, относящимся к начальному моменту времени

$$T(x, 0) = T_0, \qquad \sigma(0) = 0 \qquad (T_0 = \text{const})$$
$$T(x, 0) = 0, \qquad \sigma(0) = \sigma_0 \qquad (\sigma_0 = \text{const})$$

В первом случае имеем

$$T(x, t) = T_0 \int_0^l G(x, \xi, t)\, d\xi - a^2 \int_0^t T_x'(0, s)\, G(x, 0, t-s)\, ds \tag{1}$$

Здесь $G(x, \xi, t)$ — функция Грина задачи теплопроводности с условиями $T_x'(0, t) = \varphi(t)$, $T(l, t) = 0$.

Функция Грина может быть представлена в виде

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{4l}\left[\vartheta_3\left(\pi\frac{x-\xi}{4l}\,\Big|\,\pi\frac{a^2t}{4l^2}\right) + \vartheta_3\left(\pi\frac{x+\xi}{4l}\,\Big|\,\pi\frac{a^2t}{4l^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \vartheta_3\left(\pi\frac{x-\xi-2l}{4l}\,\Big|\,\pi\frac{a^2t}{4l^2}\right) - \vartheta_3\left(\pi\frac{x+\xi-2l}{4l}\,\Big|\,\pi\frac{a^2t}{4l^2}\right)\right] \tag{2}$$

где $\vartheta_3(z|t)$ — третья тэта — функция Якоби [7] (в работе [8] функция Грина рассматриваемой задачи указана, по-видимому, неточно).

При помощи соотношений

$$\sigma(t) = \frac{\alpha E}{l} \int_0^l T(x, t)\, dx, \qquad T_x'(0, t) = -\frac{fv}{\lambda} \sigma(t)$$

из (1) и (2) находим

$$\Sigma(\tau) = \int_0^\tau k(\tau - s) \Sigma(s)\, ds + q(\tau) \tag{3}$$

Здесь

$$k(\zeta) = \omega \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \zeta\right)$$

$$q(\eta) = \chi_0 \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \eta\right)$$

$$\tau = \frac{a^2}{l^2} t, \qquad \Sigma(\tau) = \frac{1}{E} \sigma\left(\frac{l^2}{a^2} \tau\right), \qquad \omega = \frac{fv\alpha El}{\lambda}, \qquad \chi_0 = \alpha T_0$$

Последние четыре безразмерные величины связаны простыми соотношениями с критериями Пекле и Фурье.

Интегральное уравнение Вольтерра (3) будет уравнением типа свертки и его решение $\Sigma(\tau)$ может быть получено обычным способом, например, при помощи преобразования Фурье [9]. Представим решение в двух видах

$$\Sigma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{Q(w)}{1 - \sqrt{2\pi} K(w)} \exp(-i\tau w)\, dw \tag{4}$$

$$\Sigma(\tau) = q(\tau) + \int_0^\tau q(s)\, m(\tau - s)\, ds \tag{5}$$

$$m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} M(w) \exp(-i\mu w)\, dw, \qquad M(w) = \frac{K(w)}{1 - \sqrt{2\pi} K(w)}$$

Функции, обозначенные одной и той же большой и малой латинскими буквами, будут взаимными преобразованиями Фурье. Используя выражение для $k(\zeta)$, получаем

$$M(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\omega} \frac{iw}{1 - \operatorname{sch} \sqrt{-iw}} + 1\right]^{-1}$$

Ветвь $\sqrt{-iw}$ выбрана так, что $\arg w = 0$ соответствует $\arg \sqrt{-iw} = -{}^1/_4\pi$. Функция $M(w)$ во всей плоскости будет мероморфной с полюсами, находящимися на мнимой оси. При $\omega \to \infty$ нули знаменателя функции $M(w)$ расположены в точках

$$w_m = -4\pi^2 m^2 (1 \pm 2\sqrt{2}\,\omega^{-1})\, i, \qquad w^+ = iJ^+ \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Для J^+ имеет место оценка

$$J^+ = \omega(1 + \rho \operatorname{sch} \sqrt{\omega}), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant {}^1/_2, \qquad \omega \to \infty$$

При $\omega \to 0$ нули располагаются в точках

$$w_m{}^\circ = -\left[\frac{\pi^2}{4}(2m+1)^2 + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1} \omega\right] i$$

Между каждыми двумя соседними точками w_m находятся две точки $w_m{}^\circ$; при изменении ω от ∞ до 0 нули перемещаются из каждой точки w_m (которые при $\omega = \infty$ будут точками ветвления первого порядка) в соседние две точки $w_m{}^\circ$. Нуль w^+ при $\omega = 0$ и $\omega = 2$ находится в точках $-{}^1/_4\pi^2 i$ и 0 соответственно.

ω	$T(x,0)=T_0,\ \Sigma(0)=0$		$T(x,0)=0,\ \Sigma(0)=\Sigma_0$	
	$\Sigma(t)$	$T(0,\tau)$	$\Sigma(\tau)$	$T(0,\tau)$
$\to 0$	$\Sigma(t)$ *	$T(0,\tau)$ **	$(1+{}^1/_2\omega)\Sigma_0$	${}^1/_2\,\omega^2\alpha^{-1}\Sigma_0$
2	${}^4/_5\chi_0$	${}^8/_5 T_0$	${}^{12}/_5\,\Sigma_0\tau$	${}^{24}/_5\alpha^{-1}\Sigma_0\tau$
$\to\infty$	$\chi_0 e^{\omega\tau}$	$2T_0 e^{\omega\tau}$	$\Sigma_0 e^{\omega\tau}$	$2\alpha^{-1}\Sigma_0 e^{\omega\tau}$

$$* \ \Sigma(\tau) = 2\frac{\chi_0}{\omega}\sin\frac{4\omega}{\pi^2}\exp\left[-\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{\pi}\,\omega\right)\tau\right]$$

$$** \ T(0,\tau) = \frac{16}{\pi^2}\,T_0\omega^2\tau^2\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\tau\right)$$

Асимптотическое представление $\Sigma(\tau)$, $\tau\to\infty$ определяется вычетом в точке w^+, фактическое нахождение $\Sigma(\tau)$ выполняется при помощи соотношений (4), (5) (результаты вычислений для значений параметра ω равных 0.2, ∞ приведены в таблице; для промежуточных значений ω интеграл в правой части (5) может быть оценен методом работы [10]). Из (4) находим асимптотическое представление при $\omega\to 2$, $\tau\to\infty$

$$\Sigma(\tau) \sim {}^4/_5\,\chi_0\exp\left[{}^6/_5(\omega-2)\tau\right]$$

Отсюда следует, что устойчивость рассматриваемого процесса трения определяется условием $\omega\leqslant 2$, при $\omega > 2$ имеет место неустойчивость; критическое значение скорости, соответствующее переходу от устойчивого режима трения к неустойчивому, определяется соотношением

$$v_* = \frac{2\lambda}{f\alpha El} \tag{6}$$

Во втором случае, когда начальная температура пластины равна нулю и имеются начальные напряжения, интегральное уравнение (3) принимает вид

$$\Sigma(\tau) = \int_0^\tau k(\tau-s)\,\Sigma(s)\,ds + d(\tau),\quad d(\tau) = \Sigma_0\int_0^\tau k(s)\,ds,\qquad \Sigma_0 = \Sigma(0)$$

решение этого уравнения может быть выполнено тем же путем, что и в первом случае. При $\omega\to 2$, $\tau\to\infty$ имеем

$$\Sigma(\tau) \sim 2\Sigma_0\frac{1}{\omega-2}\{\exp\left[{}^6/_5(\omega-2)\tau\right]-1\}$$

Отсюда при $\omega = 2$ находим

$$\Sigma(\tau) \sim {}^{12}/_5\,\Sigma_0\tau$$

Таким образом, в этом случае устойчивость определяется условием $\omega < 2$.

Температура в зоне трения определяется при помощи соотношения (1), при этом следует использовать не асимптотическое, а точное значение $\Sigma(\tau)$, соответствующее всем полюсам $M(w)$.

Результаты вычислений при $\tau\to\infty$ приводим в таблице.

Поступила 18 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреевский В. М. Измерение сил трения при вибрациях. Изв. вузов, Физика, 1968, № 6 (73) стр. 7—11.
2. Григорова С. Р., Толстой Д. М. О резонансном падении силы трения. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3, стр. 562, 563.
3. Крагельский И. В. Трение и износ. Изд. 2. М., «Машиностроение», 1968.
4. Коровчинский М. В. Локальный термический контакт при квазистационарном тепловыделении в процессе трения. Сб. «Теория трения и износа», М., «Наука», 1965.
5. Коровчинский М. В. Основы теории термического контакта при локальном трении. Сб. «Новое в теории трения». М., «Наука», 1966.
6. Чичинадзе А. В. Расчет и исследование внешнего трения при торможении. М., «Наука», 1967.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2. Изд. 2, М., Физматгиз, 1963.
8. Бабич В. М., Капилевич М. Б. Михлин С. Г., Натансон Г. Н., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.
9. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
10. Слоновский Н. В. Применение одного метода построения неравенств к функциям Бесселя. Изв. вузов, Математика, 1967, № 4, стр. 93—102.

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СПУТНИКА — ГИРОСТАТА

С. Я. Степанов

(Москва)

Рассмотрены два семейства стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил, причем в этих движениях плоскость орбиты (круговой) центра масс спутника смещена относительно притягивающего центра. Получены достаточные условия устойчивости.

Указанные движения дополняют множество исследованных ранее стационарных движений спутника-гиростата, в которых центр круговой орбиты совпадает с притягивающим центром [1]. Как и для уже исследованных стационарных движений, условия устойчивости отличаются от таковых, полученных при ограниченной постановке задачи [1], на величины порядка l^2 / R^2 относительно главных членов (l — характерный размер спутника, R — расстояние от притягивающего центра). Смещение плоскости орбиты имеет порядок l^2 / R. Для реальных искусственных спутников Земли указанные величины весьма малы.

Исследование проведено методом Рауса с использованием некоторых результатов В. В. Румянцева [1].

1. Систему координат $O\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ с началом в притягивающем центре будем предполагать инерциальной. Со спутником свяжем систему координат $Gx_1x_2x_3$, оси которой направим по его главным центральным осям инерции. Введем еще орбитальную систему координат $Gy_1y_2y_3$; ось y_3 направлена по OG, ось y_1 параллельна плоскости $O\zeta_3\zeta_1$ и направлена в сторону движения. Все системы координат правые и прямоугольные.

Положение корпуса спутника в системе координат $O\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ будем определять сферическими координатами $R, \varkappa, \sigma$ центра масс спутника G:

$$\zeta_1 = R \cos \varkappa \sin \sigma, \quad \zeta_2 = R \sin \varkappa, \quad \zeta_3 = R \cos \varkappa \cos \sigma$$

и углами Эйлера θ, ψ, φ, определяющими положение системы координат $Gx_1x_2x_3$ относительно $Gy_1y_2y_3$.

Проекции гиростатического момента k_1, k_2, k_3 на оси x_1, x_2, x_3 считаются постоянными.