Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ЗАДАЧА О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

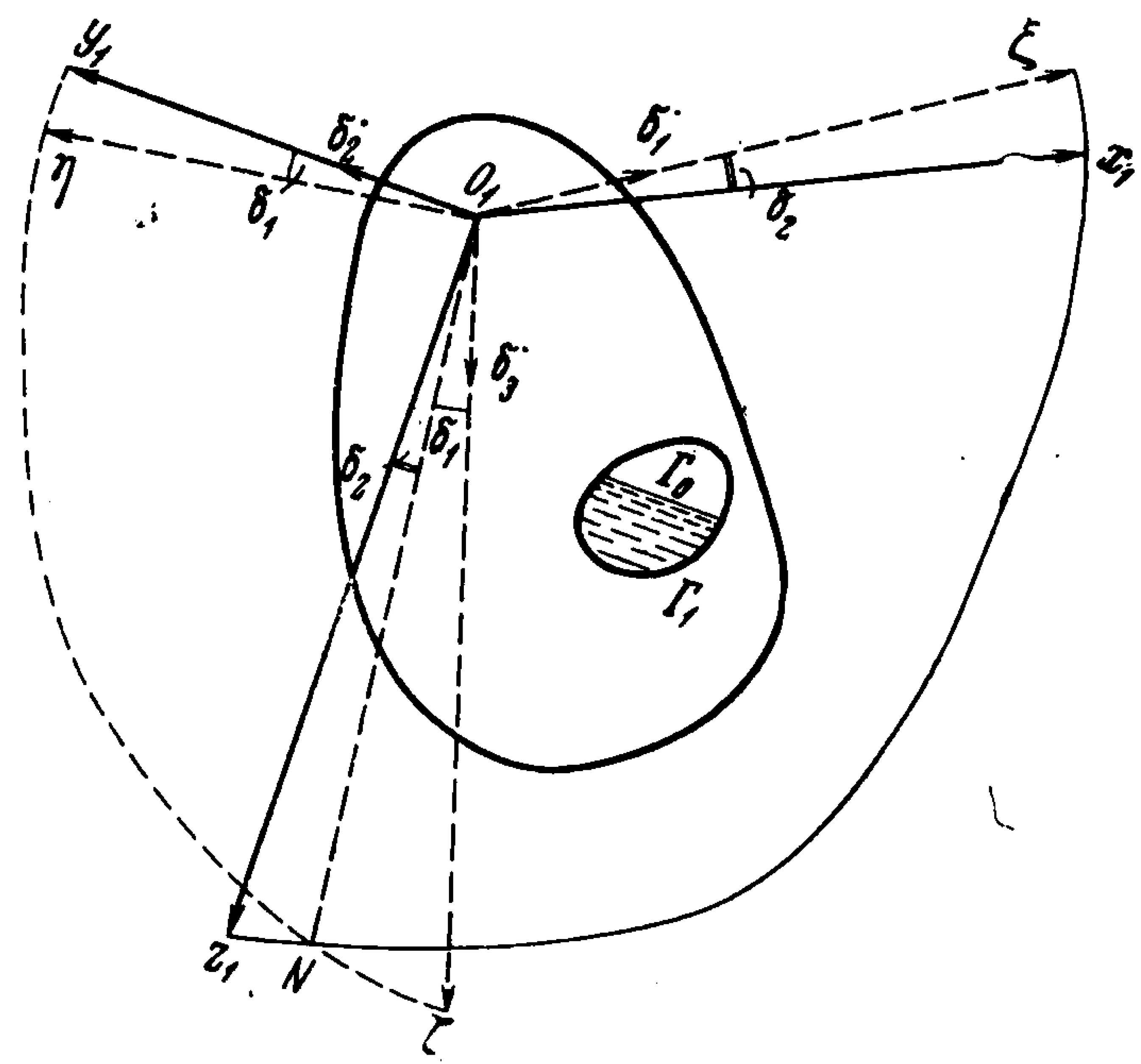
С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан

(Воронеж)

Изучается в линейной постановке общая задача о движении вокруг неподвижной точки O_1 твердого тела, имеющего полость, частично или целиком заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, под действием силы тяжести. Силы поверхностного натяжения не учитываются.

Для случая движения вокруг центра масс тела с целиком заполненной полостью эта задача рассмотрена в [1]. Общая задача при условии малой вязкости жидкости изучена в работе Ф. Л. Черноусько [2].

1. Уравнения движения жидкости. Обозначим через Ω область в подвижной жестко связанной с телом системе координат O_1xyz, заполненную невозмущенной жидкостью, через Γ_0 — невозмущенную свободную поверхность жидкости, через Γ_1 — часть стенки полости, смоченную жидкостью. В линейной постановке уравнения Навье — Стокса движения жидкости в системе координат O_1xyz принимают вид



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = -\nabla q + \nu \Delta \mathbf{u} \qquad \left(q = \frac{p}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{r}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости частиц жидкости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частиц жидкости относительно точки O_1, p — давление в жидкости, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, ν — кинематический коэффициент вязкости.

К уравнениям (1.1) нужно еще добавить:

уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

условие прилипания жидкости к стенкам полости Γ_1

$$\mathbf{u}\,|_{\Gamma_1} = 0 \tag{1.3}$$

условия отсутствия напряжений на свободной поверхности Γ_0

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(q - 2\nu \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = g u_z \tag{1.4}$$

2. Уравнения движения тела. Для определения положения тела введем неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ и жестко связанную с телом систему координат O_1xyz с общим началом в неподвижной точке O_1. Для того чтобы совместить подвижный и неподвижный трехгранники, можно осуществить три поворота (фигура):

1) вокруг $O_1\zeta$ на угол δ_3, при этом подвижные оси O_1x, O_1y переходят в полуподвижные оси $O_1\xi$, $O_1\eta$;

2) вокруг O_1y_1 на угол δ_2, при этом

$$O_1\xi \to O_1x_1, \quad O_1N \to O_1z_1;$$

3) вокруг $O_1\zeta$ на угол δ_1, при этом $O_1\zeta \to O_1z_1$, $O_1\eta \to O_1y_1$.

Таким образом, положение тела определяется тремя независимыми углами δ_1, δ_2, δ_3. Назовем вектор $\boldsymbol{\delta}(t) = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ с компонентами на оси O_1xyz равными величинам δ_1, δ_2, δ_3, вектором углового перемещения.

Для того, чтобы найти проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ тела на оси O_1xyz, сначала найдем его проекции на полуподвижные оси $O_1\xi\eta\zeta$. С точностью до членов второго порядка малости они равны $\omega_\xi = \delta_1^\cdot$, $\omega_\eta = \delta_2^\cdot$, $\omega_\zeta = \delta_3^\cdot$. При переходе от системы $O_1\xi\eta\zeta$ к O_1xyz они меняются следующим образом:

$$\omega_x = \delta_1^\cdot \cos\delta_3 + \delta_2^\cdot \sin\delta_3 = \delta_1^\cdot, \; \omega_y = -\delta_1^\cdot \sin\delta_3 + \delta_2^\cdot \cos\delta_3 = \delta_2^\cdot,$$

$$\omega_z = \delta_3^\cdot.$$

Итак, вектор угловой скорости тела в системе O_1xyz имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}\delta_1^\cdot + \mathbf{j}\delta_2^\cdot + \mathbf{k}\delta_3^\cdot \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей O_1x, O_1y, O_1z.

Для вектора углового ускорения тела в этой системе координат с точностью до членов второго порядка малости получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{i}\delta_1^{\cdot\cdot} + \mathbf{j}\delta_2^{\cdot\cdot} + \mathbf{k}\delta_3^{\cdot\cdot} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем использовать (2.1), (2.2) в виде

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \int_0^\tau \boldsymbol{\omega}(t)\,dt + \boldsymbol{\delta}(0), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt} \tag{2.3}$$

Пусть на тело действует только момент силы тяжести, который складывается из момента сил тяжести $\mathbf{M}_1$, вычисленного для тела с затвердевшей жидкостью, и момента сил тяжести $\mathbf{M}_2$, возникающего вследствие перемещения массы жидкости в полости. Вычислим момент $\mathbf{M}_1$

$$\mathbf{M}_1 = mg\mathbf{r}_c \times \mathbf{k}_1 \tag{2.4}$$

где $\mathbf{k}_1$ — единичный вектор неподвижной оси O_1z_1, а $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс системы относительно точки O_1. В системе O_1xyz он равен $\mathbf{r}_c = \{0, 0, a\}$, где a — расстояние между точкой подвеса и центром масс.

Непосредственным вычислением получаем

$$\mathbf{M}_1 = -mga(\mathbf{i}\delta_1 + \mathbf{j}\delta_2) \tag{2.5}$$

Момент силы $\mathbf{M}_2$ равен (см., например, [2])

$$\mathbf{M}_2 = -g\rho\mathbf{k}_1 \times \int_{\Gamma_0} \mathbf{r} f d\Gamma_0 \tag{2.6}$$

Здесь $z = f(t, x, y) + z_0$ — уравнение возмущенной свободной поверхности в подвижной системе координат (f — величина первого порядка малости).

Уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \qquad (\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{L}_1$ — момент количества движения тела с затвердевшей жидкостью, $\mathbf{L}_2$ — момент количества относительного движения жидкости.

При помощи (2.5), (2.6) уравнение (2.7) можно записать в развернутом виде так:

$$\mathrm{J}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + mga(\mathbf{i}\delta_1 + \mathbf{j}\delta_2) + g\rho\mathbf{k}_1 \times \int_{\Gamma_0} \mathbf{r} f d\Gamma_0 = 0 \tag{2.8}$$

Здесь J — тензор момента инерции системы тело+жидкость относительно центра O_1.

3. Постановка задачи. Будем исследовать задачу (1.1) — (1.4), (2.8) об определении движения системы тело+жидкость по заданным начальным условиям (3.1)

$$\mathbf{u}(0, x, y, z) = \mathbf{u}_0(x, y, z), f(0, x, y) = f_0(x, y), \boldsymbol{\delta}(0) = 0, \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$$

Для замкнутости системы к ней нужно присоединить кинематическое соотношение

$$u_z = df/dt, \qquad f(\tau, x, y) = \int_0^\tau u_z dt + f_0(x, y) \tag{3.2}$$

При заданных $\mathbf{u}_0$ и f_0 на свободной поверхности Γ_0 определяется q_0, а этого, как показано в [3], достаточно для нахождения начальных значений тех функций, из которых слагается искомая скорость $\mathbf{u}$. Действительно, из граничного условия на Γ_0

$$q + \mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = 2\nu\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \text{или} \quad q_0 = 2\nu\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_0 + g(f_0 + z_0)$$

4. Сведение к операторным уравнениям. Для исследования уравнений задачи введем функциональные пространства, рассмотренные в [3]. Через $W_2^{1\circ}(\Omega)$ обозначается замыкание в норме пространства С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ совокупности всех соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v}$ из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности поверхности Γ_1. Под $L_2^\circ(\Omega)$ понимаем пополнение $W_2^{1\circ}(\Omega)$ по норме пространства $L_2(\Omega)$. Ортогональное дополнение к $L_2^\circ(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ будет замыканием потенциальных в Ω вектор-функций, равных нулю на Γ_0 (см., например, [4]). Отметим, что для вектор-функций из $L_2^0(\Omega)$ нормальная составляющая на границе Γ_1 равна нулю.

Вектор-функция $\varepsilon \times \mathbf{r}$ не принадлежит пространству $L_2^\circ(\Omega)$, поэтому ее можно разложить на две взаимно-ортогональные части

$$\varepsilon \times \mathbf{r} = \operatorname{grad}\varphi + \Pi(\varepsilon \times \mathbf{r}), \qquad \Pi(\varepsilon \times \mathbf{r}) \in L_2^\circ(\Omega)$$

Из сказанного выше следует, что функция φ может быть найдена как решение следующей граничной задачи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (\varepsilon \times \mathbf{r}) \quad \text{на } \Gamma_1$$

Применяя метод, изложенный в [3], можно уравнения (1.1), (1.2) с условиями (1.3), (1.4) свести к двум операторным уравнениям в $L_2^\circ(\Omega)$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{s} + \Pi(\varepsilon \times \mathbf{r}) = 0 \tag{4.1}$$

$$\nu\frac{d\mathbf{w}}{dt} + gT\Gamma\mathbf{u} = 0 \qquad (\mathbf{u} = \mathbf{s} + \mathbf{w}) \tag{4.2}$$

Здесь Γ — оператор взятия следа вектор-функции на свободной поверхности Γ_0, A и T — операторы, порожденные вспомогательными граничными задачами, описанными в [5]. При этом оператор A будет самосопряженным положительно определенным оператором в $L_2^\circ(\Omega)$, имеющим вполне непрерывный обратный.

Учитывая (2.3), (3.3), уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\varepsilon + \rho \mathrm{J}^{-1}\int\limits_\Omega \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right] d\Omega = -mga\mathrm{J}^{-1}\int\limits_0^\tau (\mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y)\,dt -$$
$$- g\rho\mathrm{J}^{-1}\int\limits_0^\tau \left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{\Gamma_0} \mathbf{r}\Gamma\mathbf{u}\,d\Gamma_0\right] dt - g\rho\mathrm{J}^{-1}\left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{\Gamma_0} \mathbf{r}f_0\,d\Gamma_0\right] \tag{4.3}$$

Уравнения (4.1) — (4.3) дают полную систему операторных дифференциальных уравнений для трех искомых функций $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$.

5. Интегральные уравнения. Теорема существования. Преобразуем наиболее сложное в системе (4.1) — (4.3) уравнение (4.1). Сначала при помощи (4.3) исключим ε из уравнения (4.1). С точностью до членов второго порядка малости получим

$$(I + B)\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{s} = -\int\limits_0^\tau F_1(\omega, t)\,dt - \int\limits_0^\tau F_2(\mathbf{r}, \Gamma u)\,dt - F_2(0) \tag{5.1}$$
$$\left(B\mathbf{v} = \Pi\left[\mathbf{r} \times \rho\mathrm{J}^{-1}\int\limits_\Omega \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}\,d\Omega\right]\right)$$

$$F_1(\omega, t) = mga\,\Pi\left[\mathbf{r} \times \mathrm{J}^{-1}(\mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y)\right]$$

$$F_2(r, \Gamma u) = g\rho\Pi\left[\mathbf{r} \times \mathrm{J}^{-1}\left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{\Gamma_0} \mathbf{r}\Gamma u\,d\Gamma_0\right]\right]$$

$$F_2(0) = g\rho\Pi\left[\mathbf{r} \times \mathrm{J}^{-1}\left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{\Gamma_0} \mathbf{r}f(0)\,d\Gamma_0\right]\right]$$

Здесь r_1 — радиус-вектор переменной точки интегрирования относительно точки O_1.

В [1] доказано, что оператор переноса B будет самосопряженным оператором в $L_2^\circ(\Omega)$ и при условии

$$J_1 < J_{33} \tag{5.2}$$

где J_1 — полярный момент инерции жидкости относительно неподвижной точки O_1, а J_{33} — наименьшая компонента тензора момента инерции системы тело + жидкость относительно O_1, норма оператора B меньше единицы.

Предполагая выполненными (5.2), применим к уравнению (5.1) оператор $(I+B)^{-1}$ и, кроме того, во всех уравнениях (5.1), (4.2), (4.3) сделаем замену

$$\mathbf{u} = A^{-1/2}\xi, \quad \mathbf{s} = A^{-1/2}\eta, \quad \mathbf{w} = A^{-1/2}\zeta$$

Заметим, что возникающий при этом оператор $\Gamma A^{-1/2}$ вполне непрерывен [3]. Наконец, подставляя из уравнения (4.2) в преобразованное уравнение (5.1) выражение для $d\zeta\,/\,dt$, получим

$$A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt} + \nu(1+B)^{-1}A^{1/2}\eta = \frac{g}{\nu}\,T\Gamma A^{-1/2}(\eta+\zeta) - (I+B)^{-1}F_2(0) -$$
$$-(I+B)^{-1}\int_0^\tau F_1(\omega, t)\,dt - (I+B)^{-1}\int_0^\tau F_2(r, \Gamma A^{-1/2}\xi)\,dt \tag{5.3}$$

Введем теперь в рассмотрение оператор $A_0 = A^{1/2}(\Gamma+B)^{-1}A^{1/2}$, который будет самосопряженным положительно определенным оператором на естественной области определения и будет иметь ограниченный обратный $A^{-1/2}(I+B)A^{-1/2}$. Пусть $e^{-\nu A_0 t}$ — полугруппа ограниченных операторов, для которой оператор νA_0 будет производящим. Напомним (см., например, [6], стр. 106), что оператор $A_0 e^{-\nu A_0 t}$ будет при $t > 0$ ограниченным и его норма удовлетворяет неравенству

$$\| A_0 e^{-\nu A\, t} \| \leqslant c\,/\,t$$

Из сказанного вытекает, что оператор $e^{-\nu A_0(t-\tau)}A^{1/2}$ при $t > \tau$ допускает замыкание до ограниченного оператора. Действительно, при $\mathbf{v} \in D\,(A^{1/2})$

$$\| e^{-\nu A_0(t-\tau)}A^{1/2}\mathbf{v} \| = \| e^{-\nu A_0(t-\tau)}A_0 A^{-1/2}(I+B)\,\mathbf{v} \| \leqslant \frac{c_2\|\mathbf{v}\|}{t-\tau} \tag{5.4}$$

Применим оператор $\exp\,[-\nu A_0(t-\tau)]\,A^{1/2}$ к обеим частям уравнения (5.3), заменяя в уравнении t на τ. Тогда в левой части получится производная

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\nu A_0(t-\tau)}\eta\right) = e^{-\nu A_0(t-\tau)}\frac{d\eta}{dt} + \nu e^{-\nu A_0(t-\tau)}A_0\eta$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения в пределах от 0 до $t-\varepsilon$. Интеграл от левой части дает выражение

$$e^{-\nu A_0\varepsilon}\eta - e^{-\nu A_0 t}\eta_0$$

Подынтегральное выражение в первом члене справа будет иметь вид

$$\frac{g}{\nu} e^{-\nu A_0 (t-\tau)} Q(\eta + \zeta), \qquad Q = A^{1/2} T \Gamma A^{-1/2}$$

Здесь Q — вполне непрерывный оператор в $L_2^\circ(\Omega)$ (см., например, [3]). Интеграл от этого члена будет существовать в пределах от 0 до t. Интегралы от следующих членов справа будут иметь вид

$$\int_0^{t-\varepsilon} \overline{\exp[-\nu A_0(t-\tau)]\, A^{1/2}(I+B)^{-1}} \int_0^{\tau} \Phi(\alpha)\, d\alpha\, d\tau$$

где $\Phi(\alpha)$ — непрерывная функция от α. Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\int_0^{t-\varepsilon} A_0 e^{-\nu A_0 (t-\tau)} \int_0^{\tau} A^{-1/2}\Phi(\alpha)\, d\alpha\, d\tau = \int_0^{t-\varepsilon} \Big[\int_{\alpha}^{t-\xi} A_0 e^{-\nu A_0 (t-\tau)}\, d\tau \Big] A^{-1/2}\, \Phi(\alpha)\, d\tau\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\nu} \int_0^{t-\varepsilon} [e^{-\nu A_0 \varepsilon} - e^{\nu A_0 (t-\alpha)}]\, A^{-1/2} \Phi(\alpha)\, d\alpha$$

Наконец, последние члены справа после интегрирования дают выражения вида

$$\frac{1}{\nu}[e^{-\nu A_0 \varepsilon} - e^{-\nu A_0 t}]\, A^{-1/2} \Phi(0)$$

Таким образом, приходим к выводу, что после интегрирования в пределах от 0 до $t - \varepsilon$ все члены как слева, так и справа имеют пределы при $\varepsilon \to 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ окончательно приводим рассматриваемое уравнение к следующей форме:

$$\eta = e^{-\nu A_0 t}\eta_0 - \frac{g}{\nu} \int_0^t e^{-\nu A_0 (t-\tau)} Q(\eta + \zeta)\, d\tau - \tag{5.5}$$

$$- \frac{1}{\nu} \int_0^t [I - e^{-\nu A_0 (t-\tau)}]\, A^{-1/2} [F_1(\omega, t) +$$

$$+ F_2(r, \Gamma A^{-1/2}(\eta + \zeta))]\, d\tau - \frac{1}{\nu}[I - e^{-\nu A_0 t}]\, A^{-1/2} F_2(0)$$

В уравнениях (4.2), (4.3) делаем замену $t = \tau$ и интегрируем по τ в пределах от 0 до t. Тогда

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{g}{\nu} \int_0^t Q(\eta + \zeta)\, d\tau \tag{5.6}$$

$$\omega + B_1 A^{-1/2}(\eta + \zeta) = \omega_0 + B_1 A^{-1/2}(\eta_0 + \zeta_0) -$$

$$- \int_0^t (t - \tau)\, [F_3(\omega, \tau) + F_4(r, \Gamma A^{-1/2}(\eta + \zeta))]\, d\tau - t F_4(0) \tag{5.7}$$

Здесь

$$B_1\mathbf{v} = \rho \mathrm{J}^{-1} \int\limits_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]\, d\Omega, \qquad F_3(\omega, \tau) = mga\mathrm{J}^{-1}\{i\omega_x + j\omega_y\}$$

$$F_4(r, \Gamma A^{-1/2}\xi) = g\rho \mathrm{J}^{-1}\left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{\Gamma_0} \mathbf{r}\Gamma A^{-1/2}\xi d\Gamma_0\right], \qquad F_4(0) = g\rho \mathrm{J}^{-1}\left[\mathbf{k}_1 \times \int\limits_{0} \mathbf{r}f(0)\, d\Gamma_0\right]$$

Умножая уравнения (5.5), (5.6) на ограниченный оператор $-B_1A^{-1/2}$ и добавляя к уравнению (5.7), сведем систему уравнений (5.5) — (5.7) к системе уравнений вольтеррового типа с ограниченными операторными ядрами, для которой существование единственного непрерывного решения доказывается обычным методом последовательных приближений.

Решение системы (5.5) — (5.7) будет состоять из непрерывных функций со значениями, соответственно, в пространствах $L_2{}^{\circ}(\Omega)$ и R_3. Построенная по формуле

$$\mathbf{u} = A^{-1/2}(\eta + \zeta)$$

функция будет при каждом t принадлежать пространству $W_2{}^{1\circ}(\Omega)$. Дальнейшие дифференциальные свойства функций $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и $\omega(t)$ не исследуются, поэтому эти функции следует считать обобщенными решениями исходной задачи.

6. Случай целиком заполненной полости. В этом случае $\mathbf{u} = \mathbf{s}$, уравнение (5.6) отпадает и система (5.5) — (5.7) значительно упрощается, а именно

$$\eta = e^{-\nu A_0 t}\eta_0 + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^t [I - e^{-\nu A_0(t-\tau)}]\, F_1(\omega, \tau)\, d\tau \tag{6.1}$$

$$\omega + B_1A^{-1/2}\eta = \omega_0 + B_1A^{-1/2}\eta_0 - \int\limits_0^t (t-\tau)\, F_3(\omega, \tau)\, d\tau \tag{6.2}$$

Поступила 16 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Н г о З у й К а н. О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4, стр. 914—917.
2. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 977—992.
3. К р е й н С. Г., Л а п т е в Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Функциональный анализ и его приложения, 1968, т. 2, вып. 1, стр. 40—50.
4. К о п а ч е в с к и й Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 1, стр. 128—146.
5. К р е й н С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 262—265.
6. К р е й н С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.