Прикладная математика и механика, Том 33, 1969

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев

(Москва)

Излагаются результаты исследования устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Доказывается, что треугольные точки либрации устойчивы при всех отношениях масс в области устойчивости по первому приближению, за исключением некоторых отношений, при которых имеет место неустойчивость.

§ 1. В 1772 г. Лагранж [1] установил, что дифференциальные уравнения движения задачи трех тел имеют частное решение, соответствующее треугольным точкам либрации: три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся в своей плоскости вокруг центра масс тел.

В ограниченной круговой задаче два тела (S — массы m_1 и J — массы m_2) движутся по окружностям вокруг их общего центра масс O с постоянной угловой скоростью n. Третье тело P движется в плоскости OSJ, не оказывая влияния на движение тел S, J.

Известно [2-4], что при $(m_1 + m_2)^2 > 27m_1m_2$ треугольные точки либрации в ограниченной круговой задаче трех тел устойчивы по первому приближению. Используя результаты работы [5], А. М. Леонтович показал [6], что для всех m_1, m_2 в области $(m_1 + m_2)^2 > 27\, m_1m_2$, кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль, точки либрации устойчивы. В работе [7] при помощи теоремы Арнольда об устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [8] показано, что точки либрации устойчивы для всех отношений масс m_1 / m_2 в области $(m_1 + m_2)^2 > 27m_1m_2$ кроме, быть может, трех отношений, при которых теорема Арнольда неприменима.

Здесь задача об устойчивости треугольных точек либрации решается для всех отношений масс, удовлетворяющих условию устойчивости по первому приближению.

§ 2. Рассмотрим устойчивость положения равновесия канонической системы с двумя степенями свободы.

1°. Пусть начало координат будет положением равновесия системы

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

Здесь H — не зависящая от t, аналитическая по q_i, p_i, функция Гамильтона, разлагающаяся в ряд

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots + H_k + \ldots \tag{2.2}$$

где H_k — однородная функция степени k относительно q_i, p_i.

Если H_2 — знакоопределенная функция, то согласно теореме Ляпунова [9] положение равновесия устойчиво. Если же H_2 не будет знакоопределенной функцией, то при исследовании устойчивости можно применить теорему Арнольда [8]. Пусть функция Гамильтона (2.2) удовлетворяет следующим трем условиям:

1) характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет чисто мнимые корни $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$;

2) частоты ω_1, ω_2 удовлетворяют неравенствам

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \qquad \text{при } 0 < |k_1| + |k_2| \leqslant 4 \tag{2.3}$$

где k_1 и k_2 — целые числа;

3) выполняется неравенство

$$c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0 \tag{2.4}$$

тогда положение равновесия устойчиво.

В формулировке теоремы предполагается, что функция Гамильтона (2.2) приведена к виду

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + O((r_1+r_2)^{5/2}), (2r_i = p_i^2 + q_i^2) \tag{2.5}$$

Такое приведение возможно [10] при выполнении условия (2.3).

При полном исследовании задачи об устойчивости положения равновесия системы (2.1) необходимо рассмотреть случаи, когда условия (2.3) или (2.4) не выполняются. Пусть $\omega_1 > \omega_2$. Тогда неравенства (2.3) нарушаются при $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. Исследование устойчивости в этих случаях резонанса проведено в [11]. Приведем здесь основные результаты, необходимые для дальнейшего исследования.

2°. В случае $\omega_1 = 2\omega_2$ при соответствующем выборе переменных q_i, p_i функция Гамильтона (2.2) примет вид

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - \sqrt{(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\,\omega_2 r_2 \sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2) \tag{2.6}$$

Здесь x_{1002}, y_{1002} — постоянные величины, зависящие от коэффициентов форм H_2 и H_3 в разложении (2.2), а

$$q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \qquad p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \; (i = 1.2) \tag{2.7}$$

Если $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

3°. При $\omega_1 = 3\omega_2$ функцию Гамильтона можно привести к виду

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 +$$
$$+ {}^1/_3\omega_2\sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}\,r_2\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \tag{2.8}$$

Постоянные величины c_{20}, c_{11}, c_{02}, x_{1003}, y_{1003} в (2.8) зависят от коэффициентов форм H_2, H_3, H_4. При выполнении неравенств

$$x_{1003}^2 + y_{1003}^2 \neq 0, \qquad 3\omega_2\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} \geqslant |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}|$$

положение равновесия неустойчиво.

4°. Рассмотрим теперь устойчивость положения равновесия, когда не выполняется условие (2.4).

Если $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ при целых k_1 и k_2, удовлетворяющих условию $0 < |k_1| + |k_2| \leqslant 2m$, то при помощи аналитической канонической замены переменных гамильтониан (2.2) можно привести [10] к виду

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \sum_{i+j=2}^{m} c_{ij} r_1{}^i r_2{}^j + H^*(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$(H^* = O((r_1 + r_2)^{m+1/2}) \tag{2.9}$$

где r_i, φ_i определяются по формулам (2.7), функция H^* имеет период 2π по φ_1 и φ_2.

Коэффициенты c_{ij} будут инвариантами функции Гамильтона (2.2) относительно канонических преобразований. Рассмотрим многочлен

$$h(\varepsilon) \equiv \sum_{i+j=2}^{m} c_{ij} \omega_1{}^j \omega_2{}^i \varepsilon^{i+j} \tag{2.10}$$

Если $h(\varepsilon) \not\equiv 0$, то говорят, что имеет место общий эллиптический случай. В теореме Арнольда неравенство $h(\varepsilon) \not\equiv 0$ обнаруживается по коэффициенту при ε^2 в многочлене (2.10). Если же этот коэффициент равен нулю, т. е. условие (2.4) не выполняется, то в многочлене (2.10) надо получать коэффициенты при более высоких степенях ε. При этом на ω_1 и ω_2 надо накладывать более жесткие требования отсутствия резонанса, нежели требование (2.3).

Пусть первый отличный от нуля коэффициент многочлена (2.10) обнаруживается при ε^m. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функция Гамильтона (2.2) удовлетворяет условиям:

1) характеристическое уравнение системы с гамильтонианом H_2 имеет чисто мнимые корни $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$;

2) частоты ω_1 и ω_2 удовлетворяют неравенствам

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \quad \text{при } 0 < |k_1| + |k_2| \leqslant 2m \tag{2.11}$$

3) выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{m} c_{m-i,\,i} \omega_1{}^i \omega_2{}^{m-i} \neq 0 \tag{2.12}$$

тогда положение равновесия устойчиво.

Укажем основные моменты доказательства. Сначала надо привести функцию Гамильтона (2.2) к виду (2.9) и, используя интеграл $H = \text{const}$, свести систему (2.1) к системе с одной степенью свободы [4]. Применяя затем теорему Мозера об инвариантных кривых [12] к отображению, порождаемому полученной гамильтоновой системой дифференциальных уравнений [13], можно показать, что при выполнении условий сформулированной теоремы на каждом уровне $H = \text{const}$ в любой окрестности начала координат существуют двумерные инвариантные торы системы (2.1). Отсюда следует устойчивость положения равновесия. Аналогичное применение теоремы Мозера к задачам динамики можно найти, например, в работах [14, 15].

§ 3. Докажем следующую теорему об устойчивости точек либрации.

Теорема 3.1. Треугольные точки либрации устойчивы при всех отношениях масс в области $(m_1 + m_2)^2 > 27 m_1 m_2$

за исключением отношений

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{643+15\sqrt{1833}}{32}, \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{73+5\sqrt{213}}{2}$$

при которых имеет место неустойчивость.

Введем вращающуюся с угловой скоростью n систему координат, начало которой совпадает с центром масс O тел S и J, а ось x—с прямой OJ. Если обозначить через x, y координаты точки P в этой системе, а через u, v — проекции на оси x, y скорости P относительно неподвижной системы координат, то гамильтониан задачи запишется в виде [4]

$$H=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+n(uy-vx)-\frac{m_1}{SP}-\frac{m_2}{JP} \tag{3.1}$$

Обозначим через l длину SJ. Тогда, как известно, $n^2l^3 = m_1 + m_2$, и для системы уравнений с гамильтонианом (3.1) решение, соответствующее треугольной точке либрации, будет положением равновесия [4]

$$x = a, \quad y = b, \quad u = -nb, \quad v = na \tag{3.2}$$

где

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{l}{2}, \qquad b=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

После замены переменных

$$x = a + q_1l, \quad y = b + q_2l, \quad u = -nb + p_1nl, \quad v = na + p_2nl, \quad \tau = nt$$

исследуемое решение примет вид $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$.

Разлагая функцию Гамильтона (3.1) в окрестности начала координат $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ в ряд по степеням q_i, p_i, получаем

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots + H_k + \ldots \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}
H_2 = {}^1/_2\, p_1^2 + {}^1/_2\, p_2^2 + q_2p_1 - q_1p_2 + {}^1/_8\, q_1^2 - kq_1q_2 - {}^5/_8\, q_2^2 \\
H_3 = -\frac{7\sqrt{3}k}{36}q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_1^2q_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12}q_1q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_2^3 \\
H_4 = \frac{37}{128}q_1^4 + \frac{25k}{24}q_1^3q_2 - \frac{123}{64}q_1^2q_2^2 - \frac{15k}{8}q_1q_2^3 - \frac{3}{128}q_2^4 \\
H_5 = \frac{23\sqrt{3}k}{576}q_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256}q_1^4q_2 - \frac{215\sqrt{3}k}{288}q_1^3q_2^2 + \frac{345\sqrt{3}}{128}q_1^2q_2^3 + \\
+\frac{555\sqrt{3}k}{576}q_1q_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256}q_2^5 \\
H_6 = -\frac{331}{1024}q_1^6 + \frac{49k}{128}q_1^5q_2 + \frac{6105}{1024}q_1^4q_2^2 - \frac{35k}{64}q_1^3q_2^3 - \frac{7965}{1024}q_1^2q_2^4 - \\
-\frac{119k}{128}q_1q_2^5 + \frac{383}{1024}q_2^6 \\
k = 3\sqrt{3}(m_1 - m_2)\,/\,4(m_1 + m_2)
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Постоянный член в (3.3) отброшен. Условие устойчивости по первому приближению записывается в виде неравенств

$$ {}^{23}/_{16} < k^2 < {}^{27}/_{16} \tag{3.5}$$

Частоты колебательной системы с функцией Гамильтона удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 + ({}^{27}/_{16} - k^2) = 0 \tag{3.6}$$

В области (3.5) можно принять $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

При помощи теоремы Арнольда убеждаемся в том, что положение равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ будет устойчивым в области (3.5) за исключением, быть может, тех случаев, когда выполняется одно из равенств

$$\omega_1 = 2\omega_2, \quad \omega_1 = 3\omega_2, \quad c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$$

Расчеты показывают, что

$$\omega_1 = 2\omega_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{при } k^2 = \frac{611}{400}\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{643 + 15\sqrt{1833}}{32}\right)$$

$$\omega_1 = 3\omega_2 = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \text{при } k^2 = \frac{639}{400}\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{73 + 5\sqrt{213}}{2}\right)$$

$$c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0 \quad \text{при } k^2 = 1.6146 \ (m_1 / m_2 = 90.6282)$$

При найденных трех отношениях масс теорема Арнольда неприменима. Для полного решения задачи об устойчивости воспользуемся результатами § 2.

При $\omega_1 = 2\omega_2$ функция Гамильтона (3.3) приводится к виду (2.6), где

$$x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 4.108 \neq 0$$

Положение равновесия неустойчиво.

При $\omega_1 = 3\omega_2$ функция Гамильтона преобразуется к виду (2.8). В этом случае

$$3\omega_2\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} = 23.2826, \qquad |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| = 4.1705$$

и положение равновесия также неустойчиво.

Рассмотрим теперь отношение $m_1 / m_2 = 90.6282$, когда не выполняется условие (2.4) теоремы Арнольда. Расчеты показывают, что для функции Гамильтона (3.3), приведенной к виду (2.9), будем иметь

$$\omega_1 = 0.9596, \quad \omega_2 = 0.2813, \quad c_{20} = 0.0978, \quad c_{11} = -1.3892, \quad c_{02} = 0.3988$$
$$c_{30} = -0.2193, \quad c_{21} = 7.7942, \quad c_{12} = -209.9311, \quad c_{03} = -14.5289$$

Проверяя неравенства (2.11) и (2.12) при $m = 3$, получаем, что

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_1 \neq 2\omega_2, \quad \omega_1 \neq 3\omega_2, \quad \omega_1 \neq 4\omega_2, \quad \omega_1 \neq 5\omega_2, \quad 2\omega_1 \neq 3\omega_2$$
$$c_{30}\omega_2^3 + c_{21}\omega_2^2\omega_1 + c_{12}\omega_2\omega_1^2 + c_{03}\omega_1^3 = -66.6312 \neq 0$$

Все условия теоремы 2.1 выполнены, и положение равновесия устойчиво.

Автор признателен В. А. Сарычеву за внимание к работе.

Поступила 26 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Lagrang J. L. Essais sur le probléme des trois corps. Paris, 1772.
2. Gascheau G. Comptes Rendus, 1843, vol. 16, p. 393.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
4. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.— Л., ОНТИ, 1937.
5. Арнольд В. И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, стр. 255.
6. Леонтович А. М. Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 3, стр. 525.
7. Deprit A. Deprit — Bartholomé, Stability of the Triangular Lagrangian Points. Astronom. Journ., 1967, vol. 72, No 2, p. 173.
8. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной мехнике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, № 6, стр. 91.
9. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
10. Биркгоф Д. Д. Динамические системы. М., Гостехтеориздат, 1941.
11. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 738.
12. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь. М., Изд-во иностр. лит., Сб. «Математика», 1962, т. 6, вып. 5, стр. 51.
13. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
14. Kyner W. T. Qualitative properties of orbits about an oblate planet, Comm. Pure Appl. Math, 1964, vol. 17, No. 2, p. 227.
15. Проктор Т., Страйл Р. Движение двух нелинейных осцилляторов со слабой взаимосвязью. М., Изд-во иностр. лит., Сб. «Механика», 1966, вып. 2, стр. 38.