

СОУДАРЕНИЕ СТРУЙ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ КАНАЛОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Ф. С. Владимиров

(Томск)

За последние несколько лет приложено много усилий для исследования, разработки и конструирования цифровых вычислительных машин, схем для выполнения логических операций и функций управления, построенных на струйных элементах и выполняющих те же операции, что и электронные схемы. Струйные элементы применяются также при построении различных датчиков и исполнительных устройств [1,2].

Имеется два фундаментальных механизма, на которых могут быть построены струйные элементы: взаимодействие струй жидкости или газа и взаимодействие потока со стенкой — так называемый эффект Коанда. Обычно в струйных элементах сочетаются оба эти механизма [2].

Задача о соударении струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками, для случая несжимаемой жидкости применительно к струйным усилителям, методом конформных отображений решена Крониным Р. Т. [3]. Однако в работе [3] не получено для искомых величин аналитических выражений в конечной форме, и расчет для случая, когда угол между осями каналов равен 18° , проведен методом численного интегрирования.

В данной статье в предположении, что течение дозвуковое, плоское, установившееся, потенциальное и адиабатическое рассматривается соударение газовых струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками, оси которых сходятся под произвольным углом. Решение задачи проводится методом Чаплыгина [4] обобщенным С. В. Фальковичем [5] на случай нескольких характерных скоростей. В результате найдены выражения для функции тока, коэффициента сжатия струи и геометрических элементов потока. Предельным переходом решение задачи распространено на случай несжимаемой жидкости. Когда оси каналов образуют прямой угол, для искомых величин получены аналитические формулы в конечной форме, по которым проведен подробный численный расчет.

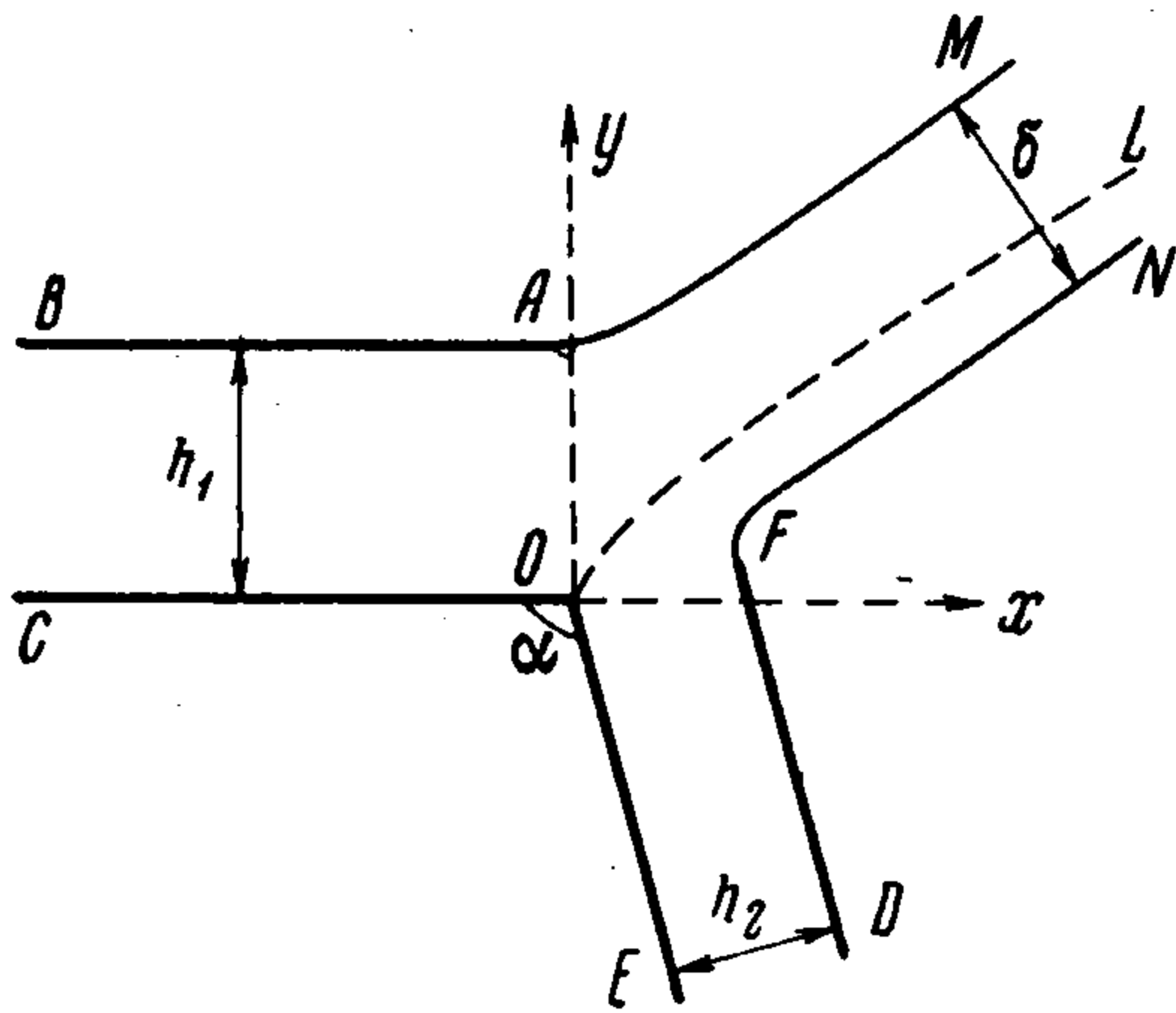
Полученные результаты могут быть использованы для расчета геометрических характеристик струйных усилителей дискретного действия, а также аналоговых струйных усилителей [2].

§ 1. Рассмотрим соударение газовых струй, вытекающих из каналов конечной ширины с параллельными стенками, две из которых сходятся в точке O под углом $\alpha = \sigma\pi$ ($0 < \sigma \leq 1$) (фиг. 1).

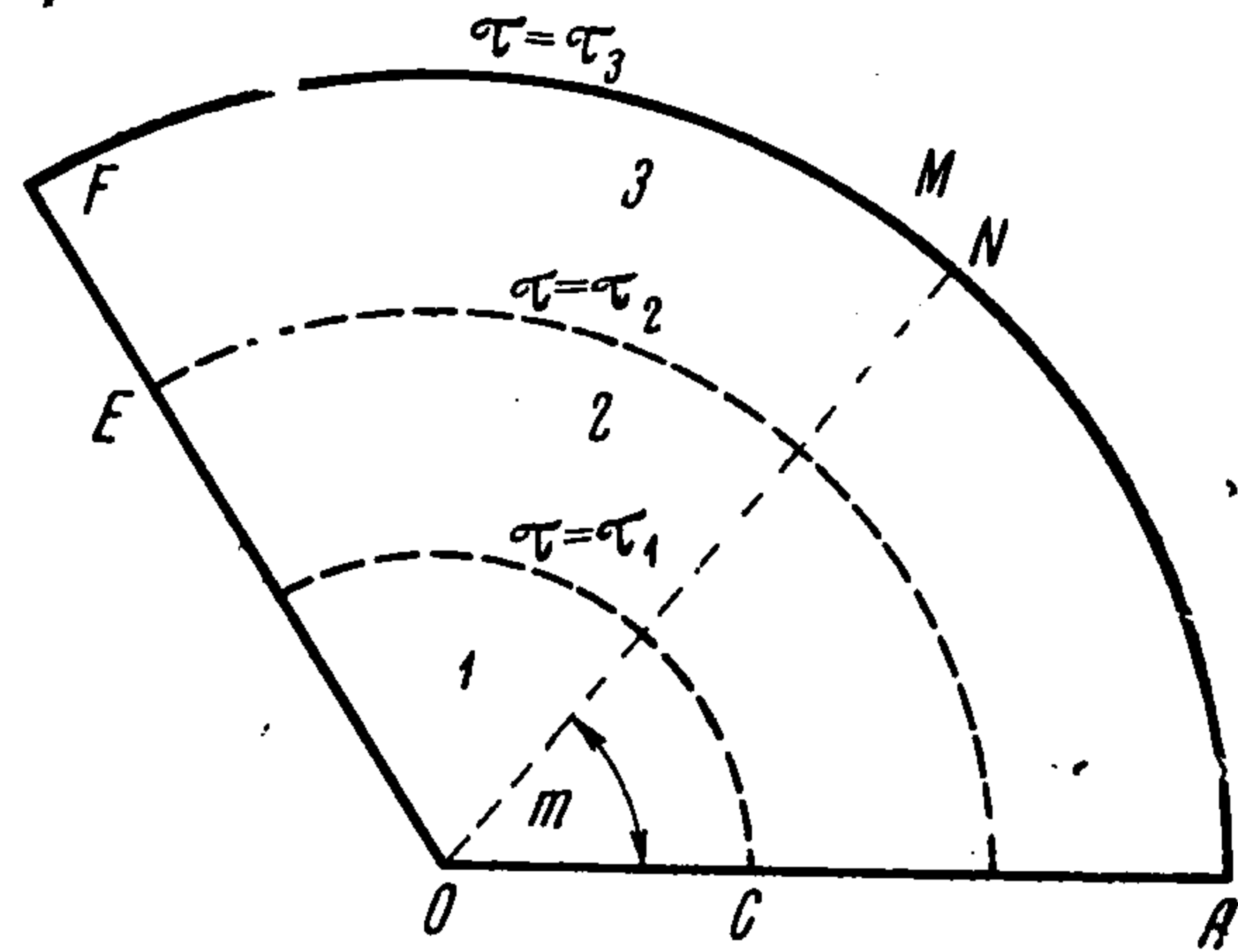
Здесь OC , AB , OE , FD — стенки каналов; AM , FN — свободные поверхности струи; v_1 , v_2 , v_3 — скорость газа в бесконечно удаленных сечениях каналов BC , ED и струи MN ; ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 — плотность газа в тех же сечениях; h_1 , h_2 , δ — ширина каналов и слившейся струи на бесконечности; m — угол наклона струи на бесконечности к оси x .

Предполагается, что течение плоское, дозвуковое, установившееся, потенциальное, адиабатическое и газ в каналах одной и той же природы. Ограничимся случаем, когда граница струй OL не есть линия разрыва, а будет линией тока общей обоим течениям с непрерывным изменением па-

раметров газа вдоль этой границы, а поэтому потенциальные решения для обеих струй будут аналитическими продолжениями одно другого и, следовательно, аналитическое решение для обоих течений вместе можно получить обычным методом, применяемым в задачах о потенциальных течениях. Критерий непрерывности параметров течения вдоль границы OL для частного случая дан в работе [6].



Фиг. 1



Фиг. 2

Примем, что вдоль линий тока COL и EOL , которые сливаются в точке O , функция тока $\psi = 0$. Тогда, если расходы газа в сечениях BC и ED обозначить через Q_1 и Q_2 соответственно, а расход газа в сечении MN через Q

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (1.1)$$

то на линии тока BAM функция тока $\psi = Q_1$ и $\psi = -Q_2$ на линии тока DFM .

В плоскости годографа скорости с полярными координатами τ, θ , т. е. переменных $\tau = v^2 / v_{\max}^2$ (v — скорость, v_{\max} — максимальная скорость, θ — угол наклона скорости к оси x (фиг. 1)) рассматриваемая область течения представится круговым сектором радиуса τ_3 и углом раствора α (фиг. 2). Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= 0 && \text{при } \theta = 0, 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \psi &= Q_1 && \text{при } \theta = 0, \tau_1 \leq \tau \leq \tau_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \psi &= 0 && \text{при } \theta = \alpha, 0 \leq \tau \leq \tau_2 \\ \psi &= -Q_2 && \text{при } \theta = \alpha, \tau_2 \leq \tau \leq \tau_3 \\ \psi &= Q_1 && \text{при } \tau = \tau_3, 0 \leq \theta \leq m \\ \psi &= -Q_2 && \text{при } \tau = \tau_3, m \leq \theta \leq \alpha \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к нахождению решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau] \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + [1-(2\beta+1)\tau] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.4)$$

в соответствующих подобластях кругового сектора. Здесь $\beta = 1 / (\kappa - 1)$, $\kappa = C_p / C_v$. Так как $\tau < 1 / (2\beta + 1)$, то в рассматриваемой области уравнение (1.4) будет эллиптического типа.

Следуя [5], решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}\psi_1(\tau, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta, \quad \lambda = \frac{n}{5} \\ \psi_2(\tau, \theta) &= Q_1 \frac{\sigma\pi - \theta}{\sigma\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n z_\lambda(\tau) + B_n \zeta_\lambda(\tau)] \sin \lambda \theta \\ \psi_3(\tau, \theta) &= Q_1 - Q \frac{\theta}{\sigma\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n z_\lambda(\tau) + D_n \zeta_\lambda(\tau)] \sin \lambda \theta\end{aligned}\quad (1.5)$$

Здесь индекс при ψ соответствует номеру подобласти кругового сектора, в которой ищется решение; $z_\lambda(\tau)$ — интеграл уравнения

$$4\tau^2(1-\tau)Z_\lambda'' + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]Z_\lambda' - \lambda^2[1-(2\beta+1)\tau]Z_\lambda = 0 \quad (1.6)$$

регулярный при $\tau = 0$; $\zeta_\lambda(\tau)$ — второй линейно независимый интеграл уравнения (1.6), полученный Лайтхиллом [7] и Черри [8,9] и впервые использованный в теории газовых струй С. В. Фальковичем [5]. Для вронскиана этих интегралов имеем

$$w_\lambda(\tau) = z_\lambda'(\tau)\zeta_\lambda(\tau) - \zeta_\lambda'(\tau)z_\lambda(\tau) = \lambda(1-\tau)^\beta \tau^{-1} \quad (1.7)$$

Коэффициенты a_n, A_n, \dots, D_n подлежат определению.

Функции тока, определяемые посредством (1.5), удовлетворяют граничным условиям (1.2). Потребуем теперь выполнения граничных условий (1.3), а также условий аналитического продолжения через границы подобластей, т. е.

$$\begin{aligned}\psi_1(\tau_1, \theta) &= \psi_2(\tau_1, \theta), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_1, 0 \leq \theta \leq \sigma\pi \\ \psi_2(\tau_2, \theta) &= \psi_3(\tau_2, \theta), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_2, 0 \leq \theta \leq \sigma\pi\end{aligned}\quad (1.8)$$

Условия (1.3) и (1.8) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}C_n z_\lambda(\tau_3) + D_n \zeta_\lambda(\tau_3) &= -(2Q/n\pi) \cos \lambda m \\ (A_n - a_n) z_\lambda(\tau_1) + B_n \zeta_\lambda(\tau_1) &= -2Q_1/n\pi \\ (A_n - a_n) z_\lambda'(\tau_1) + B_n \zeta_\lambda'(\tau_1) &= 0 \\ (A_n - C_n) z_\lambda(\tau_2) + (B_n - D_n) \zeta_\lambda(\tau_2) &= (-1)^n 2Q_2/n\pi \\ (A_n - C_n) z_\lambda'(\tau_2) + (B_n - D_n) \zeta_\lambda'(\tau_2) &= 0\end{aligned}$$

Разрешая эту систему уравнений и используя (1.7), найдем коэффициенты a_n, A_n, \dots, D_n . Тем самым определятся функции тока (1.5) и окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned}\psi_1(\tau, \theta) &= \frac{2Q}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta, \quad \psi_2(\tau, \theta) = Q_1 \frac{\sigma\pi - \theta}{\sigma\pi} + \frac{2Q}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} g_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta \\ \psi_3(\tau, \theta) &= Q_1 - Q \frac{\theta}{\sigma\pi} + \frac{2Q}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \chi_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta\end{aligned}\quad (1.9)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} f_\lambda(\tau) &= \left[-\cos \lambda m + \varepsilon_1 \frac{T_\lambda'(\tau_1, \tau_3)}{w_\lambda(\tau_1)} + (-1)^n \varepsilon_2 \frac{T_\lambda'(\tau_2, \tau_3)}{w_\lambda(\tau_2)} \right] \frac{z_\lambda(\tau)}{z_\lambda(\tau_3)} \\ g_\lambda(\tau) &= \varepsilon_1 \frac{z_\lambda'(\tau_1)}{z_\lambda(\tau_3)} \frac{T_\lambda(\tau, \tau_3)}{w_\lambda(\tau_1)} + \left[-\cos \lambda m + (-1)^n \varepsilon_2 \frac{T_\lambda'(\tau_2, \tau_3)}{w_\lambda(\tau_2)} \right] \frac{z_\lambda(\tau)}{z_\lambda(\tau_3)} \\ \chi_\lambda(\tau) &= -\frac{z_\lambda(\tau)}{z_\lambda(\tau_3)} \cos \lambda m + \left[\varepsilon_1 \frac{z_\lambda'(\tau_1)}{w_\lambda(\tau_1)} + (-1)^n \varepsilon_2 \frac{z_\lambda'(\tau_2)}{w_\lambda(\tau_2)} \right] \frac{T_\lambda(\tau, \tau_3)}{z_\lambda(\tau_3)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где для удобства записи положено [10]

$$T_\lambda(\tau, \tau_3) = z_\lambda(\tau) \zeta_\lambda(\tau_3) - \zeta_\lambda(\tau) z_\lambda(\tau_3), \quad T_\lambda(\tau_i, \tau_i) = 0 \quad (1.11)$$

$$T_\lambda'(\tau_i, \tau_3) = [T_\lambda'(\tau, \tau_3)]_{\tau=\tau_i}, \quad T_\lambda'(\tau_i, \tau_i) = w_\lambda(\tau_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{Q_1}{Q} = \frac{h_1 v_1 (1 - \tau_1)^\beta}{\delta v_3 (1 - \tau_3)^\beta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{Q_2}{Q} = \frac{h_2 v_2 (1 - \tau_2)^\beta}{\delta v_3 (1 - \tau_3)^\beta} \quad (1.12)$$

Легко убедиться на основании (1.10)–(1.12), что

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(\tau_3) &= -\cos \lambda m \\ \chi_\lambda'(\tau_3) &= \frac{\lambda}{\tau_3} \left[-x_\lambda(\tau_3) \cos \lambda m + \frac{h_1}{\delta} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \frac{z_\lambda(\tau_1)}{z_\lambda(\tau_3)} x_\lambda(\tau_1) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{h_2}{\delta} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \frac{z_\lambda(\tau_2)}{z_\lambda(\tau_3)} x_\lambda(\tau_2) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Последнее выражение получим, если продифференцируем (1.10), положим $\tau = \tau_3$, используем (1.7) и введем функции Чаплыгина

$$x_\lambda(\tau) = \frac{\tau z_\lambda'(\tau)}{\lambda z_\lambda(\tau)}$$

Из решения (1.9) при $\sigma = 1$ следует решение Н. Н. Макеева [10] и другие частные случаи, отмеченные в этой работе.

При $h_1 = h_2$, $v_1 = v_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $Q_1 = Q_2$ из (1.9) получим решение Ден Ган Хо [11] для симметричного случая.

§ 2. Определим коэффициент сжатия и угол отклонения струи. Поскольку в дальнейшем потребуются только функции $\psi_3(\tau, \theta)$, будем ее обозначать просто $\psi(\tau, \theta)$. Вдоль любой струйной поверхности имеют место

$$dy = 2\tau \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta d\theta, \quad dx = 2\tau \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cos \theta d\theta \quad (2.1)$$

Вставив функцию тока $\psi(\tau, \theta)$ из (1.9) в (2.1), а затем проинтегрировав по θ от 0 до θ и положив $\tau = \tau_3$, найдем параметрические уравнения контура струи AM

$$\begin{aligned} y &= h_1 + \frac{4Q}{\sigma \pi} \frac{\tau_3 (1 - \tau_3)^{-\beta}}{v_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda'(\tau_3)}{2\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} - \frac{\sin(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right] \quad (2.2) \\ x &= \frac{4Q}{\sigma \pi} \frac{\tau_3 (1 - \tau_3)^{-\beta}}{v_3} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda'(\tau_3)}{\lambda^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda'(\tau_3)}{2\lambda} \left[\frac{\cos(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} + \frac{\cos(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Аналогичным путем находятся уравнения контура FN

$$\begin{aligned}
 y' &= -h_2 \cos \sigma\pi + \frac{4Q}{\sigma\pi} \frac{\tau_3 (1 - \tau_3)^{-\beta}}{\nu_3} \times \\
 &\times \left\{ \sin \sigma\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{\lambda}'(\tau_3)}{\lambda^2 - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\lambda}'(\tau_3)}{2\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} - \frac{\sin(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right] \right\} \\
 x' &= h_2 \sin \sigma\pi + \frac{4Q}{\sigma\pi} \frac{\tau_3 (1 - \tau_3)^{-\beta}}{\nu_3} \times \\
 &\times \left\{ \cos \sigma\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{\lambda}'(\tau_3)}{\lambda^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\lambda}'(\tau_3)}{2\lambda} \left[\frac{\cos(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} + \frac{\cos(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь x' , y' — координаты точек, расположенных на контуре FN . Для получения связей между параметрами задачи воспользуемся предположением Н. Е. Жуковского [12] о том, что точки M и N лежат на эквипотенциальных линиях. При таком допущении имеем

$$y_M - y_N' = \delta \cos m, \quad x_N' - x_M = \delta \sin m \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.2), (2.3), преобразуем (2.4) к виду

$$\delta \cos m = h_1 + h_2 \cos \sigma\pi - 4\delta\tau_3 \frac{\sin \sigma\pi}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - 1} \chi_{\lambda}'(\tau_3) \quad (2.5)$$

$$\delta \sin m = h_2 \sin \sigma\pi + \frac{4\delta\tau_3}{\sigma\pi} \left[\cos \sigma\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - 1} \chi_{\lambda}'(\tau_3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\lambda}'(\tau_3)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (2.6)$$

К этим равенствам добавим уравнение неразрывности (1.1), которое перепишем в виде

$$\delta\nu_3 (1 - \tau_3)^{\beta} = h_1\nu_1 (1 - \tau_1)^{\beta} + h_2\nu_2 (1 - \tau_2)^{\beta}$$

из которого следует

$$\delta = h_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_3} \right)^{\beta} + h_2 \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_3} \right)^{\beta} \quad (2.7)$$

Поделив (2.6) на (2.5) и приняв во внимание (1.13), (2.7), получим

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} m &= \{ \Omega_{\lambda}(\tau_1, m) - \Pi_{\lambda}(\tau_1) + \nu [\sin \sigma\pi + \Omega_{\lambda}(\tau_2, m) + H_{\lambda}(\tau_2)] + \\
 &+ [\Phi_{\lambda}(\tau_1, m) - H_{\lambda}(\tau_1) + \nu \Phi_{\lambda}(\tau_2, m) + \nu \Pi_{\lambda}(\tau_2)] \cos \sigma\pi \} \times \\
 &\times \{ 1 + \nu \cos \sigma\pi - [\Phi_{\lambda}(\tau_1, m) - H_{\lambda}(\tau_1) + \nu \Phi_{\lambda}(\tau_2, m) + \\
 &+ \nu \Pi_{\lambda}(\tau_2)] \sin \sigma\pi \}^{-1}
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 H_{\lambda}(\tau) &= \frac{4}{\sigma\pi} \left(\frac{\tau}{\tau_3} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \frac{z_{\lambda}(\tau)}{z_{\lambda}(\tau_3)} x_{\lambda}(\tau) \\
 \Pi_{\lambda}(\tau) &= \frac{4}{\sigma\pi} \left(\frac{\tau}{\tau_3} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \frac{z_{\lambda}(\tau)}{z_{\lambda}(\tau_3)} x_{\lambda}(\tau) \\
 \Phi_{\lambda}(\tau, m) &= \frac{4\Delta(\tau, \tau_3)}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} x_{\lambda}(\tau_3) \cos \lambda m
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Omega_{\lambda}(\tau, m) = \frac{4\Delta(\tau, \tau_3)}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} x_{\lambda}(\tau_3) \cos \lambda m,$$

$$\nu = \frac{h_2}{h_1}, \quad \Delta(\tau, \tau_3) = \left(\frac{\tau}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_3} \right)^{\beta}$$

Из (2.5) с учетом (1.13), (2.7), (2.9) найдем

$$v = \frac{1 - \Delta(\tau_1, \tau_3) \cos m + [H_\lambda(\tau_1) - \Phi_\lambda(\tau_1, m)] \sin \sigma\pi}{\Delta(\tau_2, \tau_3) \cos m - \cos \sigma\pi + [\Pi_\lambda(\tau_2) + \Phi_\lambda(\tau_2, m)] \sin \sigma\pi} \quad (2.10)$$

Под коэффициентом сжатия слившейся несимметричной струи будем понимать отношение наименьшей ширины этой струи δ к сумме $h_1 + h_2$. Тогда, непосредственно, из уравнения (2.7) будем иметь

$$k = \frac{\delta}{h_1 + h_2} = \frac{1}{1 + v} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_3} \right)^\beta + \frac{v}{1 + v} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_3} \right)^\beta \quad (2.11)$$

Соотношения (2.8), (2.10) и (2.11) определяют m , v , k в зависимости от τ_1 , τ_2 , τ_3 , $\sigma\pi$. Рассмотрим частные случаи.

Первый случай. Положим $\sigma = 1$, $\lambda = n$. Заметим, что из (2.9) следуют равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 1} [\Omega_\lambda(\tau, m) + \Phi_\lambda(\tau, m) \cos \sigma\pi] &= \Omega_{2n}(\tau, m) \\ \lim_{\sigma \rightarrow 1} [\Pi_\lambda(\tau) + H_\lambda(\tau) \cos \sigma\pi] &= \Pi_{2n}(\tau) \\ \lim_{\sigma \rightarrow 1} [H_\lambda(\tau) + \Pi_\lambda(\tau) \cos \sigma\pi] &= -\Pi_{2n}(\tau) \\ \lim_{\sigma \rightarrow 1} \Phi_\lambda(\tau, m) \sin \sigma\pi &= 2\Delta(\tau, \tau_3) x_1(\tau_3) \cos m \\ \lim_{\sigma \rightarrow 1} H_\lambda(\tau) \sin \sigma\pi &= 2 \left(\frac{\tau}{\tau_3} \right)^{1/2} \frac{z_1(\tau)}{z_1(\tau_3)} x_1(\tau) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функция $z_1(\tau)$ будет элементарной [7]

$$z_1(\tau) = \frac{1 - (1 - \tau)^{\beta+1}}{(\beta + 1) \tau^{1/2}}$$

Следовательно, имеем

$$x_1(\tau) = -\frac{1}{2} + (\beta + 1) \frac{\tau(1 - \tau)^\beta}{1 - (1 - \tau)^{\beta+1}} \quad (2.13)$$

$$\frac{z_1(\tau)}{z_1(\tau_3)} x_1(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_3}{\tau} \right)^{1/2} \frac{(1 - \tau)^\beta [1 + (2\beta + 1)\tau - 1]}{1 - (1 - \tau_3)^{\beta+1}}$$

Приняв во внимание (2.12), (2.13), преобразуем (2.10), (2.8), соответственно, к виду

$$\begin{aligned} \cos m &= \frac{1 + (2\beta + 1)\tau_1}{2(\beta + 1)(\tau_1\tau_3)^{1/2}} \left[1 - v \frac{1 + (2\beta + 1)\tau_2 \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1} \right)^\beta}{1 + (2\beta + 1)\tau_1 \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1} \right)^\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - v)(1 - \tau_3)}{1 + (2\beta + 1)\tau_1} \left(\frac{1 - \tau_3}{1 - \tau_1} \right)^\beta \right] \left[1 + v \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1} \right)^\beta \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$v = \frac{\Omega_{2n}(\tau_1, m) - \Pi_{2n}(\tau_1) - \Delta(\tau_1, \tau_3) \sin m}{\Delta(\tau_2, \tau_3) \sin m + \Pi_{2n}(\tau_2) - \Omega_{2n}(\tau_2, m)} \quad (2.15)$$

В этом частном случае равенство (2.14) можно получить непосредственно из известной теоремы Эйлера.

Второй случай. Положим $\sigma = 1/2$, $\lambda = 2n$. В этом случае (2.8), (2.10) принимают вид

$$\operatorname{tg} m = \frac{\Omega_{2n}(\tau_1, m) - \Pi_{2n}(\tau_1) + v[1 + \Omega_{2n}(\tau_2, m) + H_{2n}(\tau_2)]}{1 + H_{2n}(\tau_1) - \Phi_{2n}(\tau_1, m) - v[\Pi_{2n}(\tau_2) + \Phi_{2n}(\tau_2, m)]} \quad (2.16)$$

$$v = \frac{1 - \Delta(\tau_1, \tau_2) \cos m + H_{2n}(\tau_1) - \Phi_{2n}(\tau_1, m)}{\Delta(\tau_2, \tau_1) \cos m + \Pi_{2n}(\tau_2) + \Phi_{2n}(\tau_2, m)} \quad (2.17)$$

§ 3. В случае несжимаемой жидкости

$$\lim_{v_{\max} \rightarrow \infty} \frac{z_\lambda(\tau)}{z_\lambda(\tau_3)} = \left(\frac{v}{v_3}\right)^\lambda; \quad \lim_{v_{\max} \rightarrow \infty} x_\lambda(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{v_{\max} \rightarrow \infty} \Delta(\tau, \tau_3) = \frac{v}{v_3}$$

и выражения (2.8), (2.10) и (2.11) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} m &= \{ \Omega_\lambda^\circ(v_1, m) - \Pi_\lambda^\circ(v_1) + v[\sin \sigma\pi + \Omega_\lambda^\circ(v_2, m) + H_\lambda^\circ(v_2)] + \\ &+ [\Phi_\lambda^\circ(v_1, m) - H_\lambda^\circ(v_1) + v\Phi_\lambda^\circ(v_2, m) + v\Pi_\lambda^\circ(v_2)] \cos \sigma\pi \} \times \\ &\times \{ 1 + \cos \sigma\pi - [\Phi_\lambda^\circ(v_1, m) - H_\lambda^\circ(v_1) + v\Phi_\lambda^\circ(v_2, m) + \\ &+ v\Pi_\lambda^\circ(v_2)] \sin \sigma\pi \}^{-1} \\ v &= \frac{1 - q \cos m + [H_\lambda^\circ(v_1) - \Phi_\lambda^\circ(v_1, m)] \sin \sigma\pi}{t \cos m - \cos \sigma\pi + [\Pi_\lambda^\circ(v_2) + \Phi_\lambda^\circ(v_2, m)] \sin \sigma\pi}, \quad k = \frac{t + qv}{1 + v} \quad (3.1) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_\lambda^\circ(v) &= \lim H_\lambda(\tau) = \frac{2}{\sigma\pi} \frac{v}{v_3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{v}{v_3}\right)^\lambda \quad (v_{\max} \rightarrow \infty) \\ \Pi_\lambda^\circ(v) &= \lim \Pi_\lambda(\tau) = \frac{2}{\sigma\pi} \frac{v}{v_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{v}{v_3}\right)^\lambda \quad (v_{\max} \rightarrow \infty) \\ \Phi_\lambda^\circ(v, m) &= \lim \Phi_\lambda(\tau, m) = \frac{2}{\sigma\pi} \frac{v}{v_3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda m \quad (v_{\max} \rightarrow \infty) \\ \Omega_\lambda^\circ(v, m) &= \lim \Omega_\lambda(\tau, m) = \frac{2}{\sigma\pi} \frac{v}{v_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda m \quad (v_{\max} \rightarrow \infty) \\ q &= \frac{v_1}{v_3}, \quad t = \frac{v_2}{v_3} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Соотношения (3.1) дают решение поставленной задачи в случае несжимаемой жидкости. В частном случае $\sigma = 1$ ряды легко суммируются и (2.14), (2.15) принимают вид

$$\cos m = \frac{1 + q^2 - v(1 + t^2)}{2(q + vt)}$$

$$v = \frac{\pi q \sin m + 2(1 + q^2) \operatorname{ar} \operatorname{th} q + 2q \cos m \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}m}{2t \cos m \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}m - 2(1 + t^2) \operatorname{ar} \operatorname{th} t - \pi t \sin m}$$

При $\sigma = 1/2$, $\lambda = 2n$, суммируя ряды (3.2), из (3.1) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} m &= \frac{v[\pi - 2tC - 2(1 - t^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} t] - 2[qC + (1 + q^2) \operatorname{ar} \operatorname{th} q]}{\pi + 2v[tS - (1 + t^2) \operatorname{ar} \operatorname{th} t] + 2[qS - (1 - q^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} q]} \\ v &= \frac{\pi(1 - q \cos m) + 2[qS - (1 - q^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} q]}{\pi t \cos m - 2[tS - (1 + t^2) \operatorname{ar} \operatorname{th} t]}, \quad k = \frac{t + qv}{1 + v} \quad (3.3) \\ C &= \cos m \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}m, \quad S = \sin m \ln \operatorname{tg} (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}m) \end{aligned}$$

Таблица

t	v_2/v_1	v	m	k	t	v_2/v_1	v	m	k
$q = 0.20$					$q = 0.50$				
0.55	2.750	0.106	32°04'	0.517	0.40	0.800	1.225	54°37'	0.469
0.60	3.000	1.652	61 05	0.351	0.45	0.900	0.237	26 17	0.460
0.60	3.000	2.471	64 57	0.315	0.45	0.900	3.388	60 12	0.489
0.65	3.250	0.812	53 14	0.448	0.50	1.000	0.192	25 22	0.500
0.70	3.500	0.589	50 00	0.515	0.50	1.000	5.217	63 46	0.500
0.70	3.500	1.947	62 03	0.370	0.55	1.100	0.159	24 42	0.543
0.75	3.750	0.455	47 46	0.578	0.55	1.100	8.715	68 17	0.505
0.75	3.750	1.055	56 55	0.468	0.60	1.200	0.133	24 12	0.588
0.80	4.000	0.359	45 55	0.642	0.60	1.200	1.252	43 56	0.544
0.80	4.000	0.716	53 42	0.550	0.60	1.200	6.159	63 11	0.514
0.85	4.250	0.283	44 10	0.707	0.65	1.300	0.113	23 47	0.635
0.85	4.250	0.512	50 58	0.630	0.65	1.300	0.864	39 47	0.580
0.90	4.500	0.219	42 16	0.774	0.70	1.400	0.096	23 26	0.682
0.90	4.500	0.366	48 11	0.712	0.70	1.400	0.650	37 07	0.621
$q = 0.30$					$q = 0.60$				
0.55	1.833	0.760	46°34'	0.442	0.20	0.333	0.405	25°03'	0.315
0.55	1.833	3.120	64 16	0.361	0.20	0.333	0.606	28 55	0.351
0.60	2.000	0.538	42 35	0.495	0.25	0.417	0.191	21 00	0.306
0.60	2.000	7.529	70 03	0.335	0.25	0.417	1.265	40 11	0.446
0.65	2.167	0.418	40 15	0.547	0.30	0.500	0.133	19 57	0.335
0.65	2.167	2.163	58 51	0.411	0.30	0.500	1.860	47 25	0.495
0.65	2.167	4.456	65 11	0.364	0.35	0.583	0.102	19 24	0.373
0.70	2.333	0.337	38 33	0.599	0.35	0.583	2.588	53 15	0.530
0.70	2.333	1.077	51 36	0.493	0.40	0.667	0.081	19 03	0.415
0.75	2.500	0.275	37 11	0.653	0.40	0.667	3.580	58 08	0.556
0.75	2.500	0.745	48 04	0.558	0.45	0.750	0.067	18 49	0.459
0.80	2.667	0.225	35 59	0.708	0.45	0.750	5.057	62 15	0.575
0.80	2.667	0.549	45 22	0.623	0.50	0.833	0.056	18 31	0.505
0.85	2.833	0.183	34 48	0.765	0.50	0.833	7.500	65 48	0.588
0.85	2.833	0.411	42 59	0.690	0.55	0.917	0.048	18 30	0.552
0.90	3.000	0.145	33 32	0.824	0.55	0.917	1.424	40 50	0.579
0.90	3.000	0.304	40 33	0.760	0.55	0.917	4.770	57 54	0.591
$q = 0.40$					$q = 0.60$				
0.45	1.125	0.646	39°28'	0.430	0.20	0.333	0.405	25°03'	0.315
0.45	1.125	1.804	54 45	0.418	0.20	0.333	0.606	28 55	0.351
0.50	1.250	0.445	35 23	0.469	0.25	0.417	0.191	21 00	0.306
0.50	1.250	3.260	62 17	0.423	0.25	0.417	1.265	40 11	0.446
0.55	1.375	0.345	33 17	0.512	0.30	0.500	0.133	19 57	0.335
0.55	1.375	5.807	67 12	0.422	0.30	0.500	1.860	47 25	0.495
0.60	1.500	0.279	31 51	0.556	0.35	0.583	0.102	19 24	0.373
0.65	1.625	0.230	30 50	0.603	0.35	0.583	2.588	53 15	0.530
0.65	1.625	1.141	47 25	0.517	0.40	0.667	0.081	19 03	0.415
0.70	1.750	0.192	29 59	0.652	0.40	0.667	3.580	58 08	0.556
0.70	1.750	0.792	43 37	0.567	0.45	0.750	0.067	18 49	0.459
0.75	1.875	0.161	29 16	0.701	0.45	0.750	5.057	62 15	0.575
0.75	1.875	0.592	40 58	0.620	0.50	0.833	0.056	18 31	0.505
0.80	2.000	0.134	28 36	0.753	0.50	0.833	7.500	65 48	0.588
0.80	2.000	0.454	38 48	0.675	0.55	0.917	0.048	18 30	0.552
0.85	2.125	0.111	27 56	0.805	0.55	0.917	1.424	40 50	0.579
0.85	2.125	0.349	36 49	0.734	0.55	0.917	4.770	57 54	0.591
0.90	2.250	0.090	27 13	0.859	0.60	1.000	0.041	18 23	0.600
0.90	2.250	0.263	34 48	0.796	0.60	1.000	0.970	36 14	0.600
$q = 0.50$					$q = 0.60$				
0.35	0.700	0.443	30°35'	0.396	0.60	1.000	9.687	64 48	0.600
0.35	0.700	1.400	46 49	0.438	0.65	1.083	0.035	18 17	0.648
0.40	0.800	0.307	27 43	0.424	0.65	1.083	0.734	33 31	0.620
					0.70	1.167	0.030	18 12	0.697
					0.70	1.167	0.575	31 31	0.664
					0.75	1.250	0.026	18 07	0.740
					0.75	1.250	0.458	29 53	0.703
					0.80	1.333	0.022	18 02	0.796
					0.80	1.333	0.366	28 26	0.746
					0.85	1.417	0.018	17 57	0.846
					0.85	1.417	0.291	27 04	0.794
					0.90	1.500	0.015	17 52	0.896
					0.90	1.500	0.226	25 41	0.845

Таблица (окончание)

t	v_2/v_1	v	m	k	t	v_2/v_1	v	m	k
$q = 0.70$					$q = 0.80$				
0.15	0.214	1.200	32°56'	0.450	0.50	0.625	7.342	56 38	0.764
0.20	0.286	1.698	40 00	0.515	0.55	0.688	1.003	25 23	0.675
0.25	0.357	2.268	46 08	0.562	0.60	0.750	0.804	23 27	0.689
0.30	0.428	2.971	51 27	0.599	0.65	0.812	0.655	21 57	0.709
0.35	0.500	3.896	56 02	0.628	0.70	0.875	0.538	20 41	0.735
0.40	0.571	5.194	60 01	0.652	0.75	0.938	0.444	19 34	0.765
0.45	0.643	7.156	63 29	0.669	0.80	1.000	0.364	18 32	0.800
0.50	0.714	1.659	37 42	0.625	0.85	1.062	0.296	17 31	0.839
0.50	0.714	4.227	52 41	0.662	0.90	1.125	0.235	16 28	0.881
0.55	0.786	1.118	32 35	0.629	$q = 0.90$				
0.55	0.786	7.755	60 32	0.683	0.15	0.167	3.724	41 50	0.741
0.60	0.857	0.851	29 48	0.646	0.20	0.222	4.571	47 44	0.774
0.65	0.928	0.673	27 49	0.670	0.25	0.278	5.593	52 30	0.801
0.70	1.000	0.542	26 14	0.700	0.30	0.333	6.899	56 28	0.824
0.75	1.071	0.440	24 54	0.735	0.35	0.389	8.660	59 50	0.843
0.80	1.143	0.356	23 41	0.774	0.40	0.444	1.965	24 56	0.732
0.85	1.214	0.286	22 31	0.817	0.40	0.444	5.781	47 04	0.826
0.90	1.286	0.225	21 18	0.863	0.45	0.500	1.474	21 09	0.718
$q = 0.80$					0.45	0.500	8.469	54 02	0.852
0.15	0.186	2.171	37°47'	0.595	0.50	0.556	1.176	18 52	0.716
0.20	0.250	2.789	44 05	0.642	0.55	0.611	0.962	17 12	0.722
0.25	0.312	3.522	49 27	0.678	0.60	0.667	0.798	15 54	0.733
0.30	0.375	4.447	54 01	0.708	0.65	0.722	0.667	14 48	0.750
0.35	0.438	5.684	57 58	0.733	0.70	0.778	0.558	13 50	0.772
0.40	0.500	7.434	61 24	0.753	0.75	0.834	0.467	12 58	0.798
0.45	0.562	1.886	33 15	0.679	0.80	0.889	0.389	12 08	0.828
0.45	0.562	4.380	48 27	0.735	0.85	0.945	0.320	11 19	0.862
0.50	0.625	1.300	28°08'	0.670	0.90	1.000	0.257	10 27	0.900

По формулам (3.3) произведен подробный численный расчет, результаты которого представлены в таблице.

Поступила 14 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Струйные приборы контроля и управления и техника печатных схем (информация). Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 8, стр. 1155—1162.
2. Струйная пневмогидроавтоматика. Сб. статей, М., «Мир», 1966.
3. Stopin R. T. Hydrodynamic study of the free-yet class of fluid-yet amplifiers. Proc. Fluid Amplification Symposium, Harry Diamond Labs, Army Material Command, Washington D. C., May 1964, vol. 1, p. 157—178.
4. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Гостехтеориздат, 1948.
5. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
6. Ting L., Ruger C. J. Oblique injection of a jet into stream. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 3. (Рус. пер.: Тинг Л., Руджер К. Вдув струи под углом к основному потоку. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 3, стр. 203, 204).
7. Lighthill M. J. The hodograph transformation in transonic flow. II Auxiliary theorems of the hypergeometric functions Ψ_n . Proc. Roy. Soci., ser. A, 1947, vol. 191, p. 341—351.
8. Cherry T. M. Flow of a compressible fluid about a cylinder. II. Flow with circulation. Proc. Roy. Soc. ser. A, 1949, vol. 196, No. 1044.
9. Cherry T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1950, vol. 202, No. 1071.
10. Макеев Н. Н. О соударении газовых струй. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
11. Ден Ган Хо. О соударении газовых струй, вытекающих из двух каналов. Сухак ка мулли. Пхеньян, 1964, т. 8, № 4, стр. 40—44.
12. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости данной на неизвестной линии тока. Собр. соч., т. 2, М., Гостехтеориздат, 1949.