Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Исследуется задача об оптимизации процесса наблюдения (при наличии ошибок измерений) в системе, движение которой описывается линейными дифференциальными сравнениями. Показано, что при ряде допущений задача сводится к обычной задаче оптимального управления. Дальнейшее рассмотрение с использованием принципа максимума позволяет привести исходную задачу к системе трансцендентных уравнений. Приводятся примеры, иллюстрирующие оптимальную стратегию наблюдения в конкретных случаях.

Проблемы оптимального управления при неполной информации, т. е. при неполных и неточных данных измерений или наблюдений, представляют большой интерес для технических задач управления. Различные подходы к задачам оптимального управления и наблюдения при неполной информации рассматривались, например, в работах [1-3], где использовались как вероятностные, так и минимаксные постановки.

§1. Исходные соотношения. Пусть состояние системы в любой момент времени характеризуется n-мерным вектором фазовых координат x. Закон изменения $x(t)$ задается детерминированной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx / dt = A(t)x + b(t) \tag{1.1}$$

где A — матрица размера $n \times n$, b — n-мерный вектор. Систему (1.1) часто можно рассматривать как систему в вариациях около расчетной (номинальной) траектории исходной нелинейной системы.

Движение системы рассматривается на интервале времени $[t_0, T]$, причем в фиксированные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_N = T$ производится наблюдение (измерение) фазовых координат системы. Здесь $t_k < t_{k+1}$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Под наблюдением в каждый момент времени t_k понимается приближенное измерение некоторых линейных комбинаций компонент вектора $x(t_k)$, т. е. измерение вектора $Q_k x(t_k)$. Здесь Q_k — заданная прямоугольная матрица с l_k строками и n столбцами. Целое число $l_k \geqslant 0$ есть число скалярных параметров, измеряемых в момент времени t_k, $k = 0, 1, \ldots, N$. Предполагается, что ошибка каждого наблюдения будет векторной случайной величиной размерности l_k, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной матрицей B_k. Под корреляционной матрицей в данной работе всюду понимается ненормированная корреляционная матрица (матрица вторых моментов). Ошибки измерений в различные моменты времени считаются независимыми.

Таким образом, результатом наблюдения в момент времени t_k будет векторная случайная величина y_k размерности l_k с нормальным законом распределения. Ее математическое ожидание равно истинному значению $Q_k x(t_k)$, а ее корреляционная матрица размера $l_k \times l_k$ известна и равна B_k.

Значения фазового вектора в моменты наблюдения связаны линейными соотношениями

$$x(t_{k+1}) = A_k x(t_k) + b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1.2}$$

Равенства (1.2) следуют из линейности системы (1.1). Матрица A_k и вектор b_k зависят от матрицы A и вектора b на интервале $[t_k, t_{k+1}]$. Явные выражения для A_k и b_k легко написать при помощи метода вариации произвольных постоянных, если известна матрица фундаментальных решений для однородного уравнения, соответствующего (1.1). Соотношения (1.2) справедливы и в том случае, когда движение системы описывается линейными конечно-разностными уравнениями или когда уравнения движения (1.1) носят импульсный характер (например, $b(t)$ будет дельта-функцией).

Пусть непосредственно перед началом процесса (в момент $t_0 - 0$) известно вероятностное распределение начального значения фазового вектора $x(t_0 - 0)$. Это распределение считаем нормальным с математическим ожиданием x_0 и корреляционной матрицей D_0. Цель наблюдения состоит в том, чтобы для любого момента времени указать математическое ожидание и корреляционную матрицу для неизвестного текущего значения вектора фазовых координат.

Эти величины (математическое ожидание и корреляционная матрица) изменяются, во-первых, в силу уравнений движения и, во-вторых, в результате измерений. Все вероятностные распределения предполагаются нормальными, а обработка результатов измерений производится при помощи метода максимума правдоподобия [4]. Излагаемая здесь схема рассмотрения и приведенные ниже формулы перехода (1.3) были даны в работе [3].

Обозначим через x_k и x_k^* математические ожидания для неизвестного вектора $x(t_k)$ в моменты времени $t_k - 0$ и $t_k + 0$ соответственно, т. е. перед k-м измерением и сразу после него ($k = 0,1,\ldots,N$). Через D_k и D_k^* обозначим корреляционные матрицы для вектора x в моменты времени $t_k - 0$ и $t_k + 0$.

Можно показать, что справедливы следующие формулы перехода (штрих означает транспонированную матрицу):

$$x_k^* = x_k + D_k^* Q_k' B_k^{-1}(y_k - Q_k x_k), \quad D_k^* = (D_k^{-1} + Q_k' B_k^{-1} Q_k)^{-1} \tag{1.3}$$

Для вывода соотношений (1.3) заметим, что величину x_k можно рассматривать как результат измерения фазового вектора $x(t_k)$ с корреляционной матрицей D_k, а y_k есть результат измерения вектора $Q_k x(t_k)$ с корреляционной матрицей B_k. Согласно методу максимума правдоподобия [4] составим функцию правдоподобия для этих двух измерений

$$L = C \exp\left[-{}^1\!/_2 \left(D_k^{-1}(x_k^* - x_k), (x_k^* - x_k)\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-{}^1\!/_2 \left(B_k^{-1}(Q_k x_k^* - y_k), (Q_k x_k^* - y_k)\right)\right] \tag{1.4}$$

Здесь постоянная C не зависит от x_k^*. Запятая обозначает скалярное произведение векторов. Искомое математическое ожидание x_k^* определяется из условия максимума функции (1.4) по x_k^*. Приравнивая нулю градиент функции L по x_k^*, получим

$$D_k^{-1}(x_k^* - x_k) + Q_k' B_k^{-1}(Q_k x_k^* - y_k) = 0$$

Отсюда следует соотношение

$$x_k^* = F_k D_k^{-1} x_k + F_k Q_k' B_k^{-1} y_k, \qquad F_k = (D_k^{-1} + Q_k' B_k^{-1} Q_k)^{-1} \tag{1.5}$$

Величины x_k^*, x_k, y_k можно рассматривать как случайные величины с нормальным законом распределения и с корреляционными матрицами D_k^*, D_k, B_k, соответственно, причем величины x_k, y_k независимы. Тогда из линейного соотношения (1.5) следует связь [4] между матрицами вторых моментов

$$\begin{aligned} D_k^* &= (F_k D_k^{-1}) D_k (F_k D_k^{-1})' + (F_k Q_k' B_k^{-1}) B_k (F_k Q_k' B_k^{-1})' = \\ &= F_k D_k^{-1} E_k + F_k Q_k' B_k^{-1} Q_k F_k = F_k (D_k^{-1} + Q_k' B_k^{-1} Q_k) F_k = \\ &= F_k F_k^{-1} F_k = F_k = (D_k^{-1} + Q_k B_k Q_k)^{-1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

В преобразованиях (1.6) использована формула (1.5) для F_k, а также свойство симметрии матриц D_k, B_k, F_k и обратных к ним. Путем элементарных преобразований из (1.5), (1.6) получим

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + F_k Q_k' B_k^{-1} y_k - x_k + F_k D_k^{-1} x_k = x_k + F_k Q_k' B_k^{-1} y_k - \\ &- F_k (F_k^{-1} - D_k^{-1}) x_k = x_k + F_k Q_k' B_k^{-1} y_k - F_k Q_k' B_k^{-1} Q_k x_k = \\ &= x_k + F_k Q_k' B_k^{-1} (y_k - Q_k x_k) = x_k + D_k^* Q_k' B_k^{-1} (y_k - Q_k x_k) \end{aligned}$$

Так как в промежутках между моментами t_k и t_{k+1} измерения не производятся, то, исходя из линейных соотношений (1.2), можно записать

$$x_{k+1} = A_k x_k^* + b_k, \qquad D_{k+1} = A_k D_k^* A_k' \tag{1.7}$$

Соотношения (1.3), (1.7) будут исходными и описывают изменение математического ожидания и корреляционной матрицы в результате процесса наблюдения (1.3) и процесса движения (1.7). Для расчета по рекуррентным формулам (1.3), (1.7) нужно задаться начальными значениями x_0, D_0 и данными измерений y_k. Отметим, что изменение корреляционной матрицы не зависит от результатов измерений y_k и может быть рассчитано заранее.

§ 2. Предельный переход. Положим

$$\tau = (T - t_0)/N, \quad t_k = t_0 + k\tau \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

Введем матрицы $B(t)$ и $Q(t)$ такие, что

$$B_k = B(t_k)\tau^{-1}, \quad Q_k = Q(t_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

Затем перейдем к пределу, полагая $\tau \to 0$, $N \to \infty$ при $N\tau = T - t_0 = \mathrm{const}$. Этот предельный переход соответствует случаю, когда наблюдения производятся очень часто (в пределе — непрерывно). Погрешность каждого наблюдения при этом велика (элементы матрицы B_k пропорциональны τ^{-1}), но на конечном интервале получается конечная точность.

С точностью до малых высшего порядка из уравнения (1.1) получим

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \tau[A(t_k) x(t_k) + b(t_k)]$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (1.2), найдем

$$A_k = E + \tau A(t_k), \qquad b_k = \tau b(t_k) \tag{2.2}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$. Подставляя равенства (2.1), (2.2) в уравнения (1.3), получим с точностью до малых высшего порядка

$$x_k^* = x_k + \tau D_k\ Q'(t_k)B^{-1}(t_k)\ [y_k - Q(t_k)x_k]$$

$$D_k^* = \{D_k^{-1}[E + \tau D_k Q'(t_k)B^{-1}(t_k)Q(t_k)]\}^{-1} = [E - \tau D_k Q'(t_k) \times \times B^{-1}(t_k)Q(t_k)]D_k = D_k - \tau D_k Q'(t_k)\ B^{-1}(t_k)Q(t_k)D_k$$

Эти соотношения, а также равенства (2.2) подставим в уравнения (1.7) и снова отбросим малые порядка τ^2 и выше

$$x_{k+1} = x_k + \tau\{A(t_k)x_k + b(t_k) + D_k Q'(t_k)B^{-1}(t_k)[y_k - Q(t_k)x_k]\} \quad (2.3)$$
$$D_{k+1} = D_k + \tau[A(t_k)D_k + D_k A'(t_k) - D_k Q'(t_k)B^{-1}(t_k)Q(t_k)D_k]$$

Обозначим через $\xi(t)$ и $D(t)$ математическое ожидание и корреляционную матрицу для фазового вектора $x(t)$, рассчитанные на момент t. Тогда $x_k = \xi(t_k)$, $D_k = D(t_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N$. Кроме того, через $y(t)$ обозначим результат измерений в момент t, так что $y_k = y(t_k)$ при $k = 0,1,\ldots N$. Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получим из (2.3) дифференциальные уравнения

$$d\xi \,/\, dt = A\xi + b + DQ'B^{-1}(y - Q\xi) \quad (2.4)$$

$$dD \,/\, dt = AD + DA' - DQ'B^{-1}QD \quad (2.5)$$

Начальными условиями для уравнений (2.4), (2.5) служат условия $\xi(t_0) = x_0$, $D(t_0) = D_0$, задающие математическое ожидание и корреляционную матрицу для фазового вектора $x(t_0)$ до начала процесса. Уравнение (2.4) — это стохастическое дифференциальное уравнение, а уравнение (2.5) не зависит от случайного результата измерений и представляет собой обычное дифференциальное уравнение.

Рассмотрение дифференциальных уравнений (2.4), (2.5) вместо конечно-разностных уравнений (1.3), (1.7) целесообразно, если измерения производятся достаточно часто. Функция $B(t)$ характеризует погрешность измерений в единицу времени. Но уравнения (2.4), (2.5) применимы и тогда, когда измерения производятся дискретно в отдельные моменты времени. В этом случае функция $B^{-1}(t)$ имеет импульсный характер (типа дельта-функции).

Отметим, что $B(t)$ — квадратная матрица размера $l \times l$, а Q — прямоугольная матрица размера $l \times n$. Число $l(t)$ равно числу скалярных параметров, измеряемых в момент t, и может изменяться в процессе движения.

Уравнения (2.4), (2.5) справедливы и в том случае, когда матрица A и вектор b в системе (1.1) зависят от управления или от внешних возмущений. Важно отметить, что уравнение (2.5) не зависит от функции b, которая может быть произвольной.

§ 3. Управление наблюдением. Уравнение (2.5) запишем в виде

$$dD \,/\, dt = AD + DA' - DVD \qquad (V = Q'B^{-1}Q) \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что матрица V размера $n \times n$, как и матрицы B, D, симметрична и положительно определенна. Она характеризует точность или «интенсивность» процесса наблюдения ($V = 0$, если наблюдений не проводится). Матрица V зависит от того, сколько и какие параметры измеряются (это определяется матрицей Q) и с какими погрешностями они измеряются (это характеризуется матрицей B).

Если наблюдатель может в процессе движения изменять выбор наблюдаемых параметров или точность их измерения, то матрица V в уравнении (3.1) может рассматриваться как управляющая функция. На нее при этом могут быть наложены ограничения

$$V(t) \in U(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.2}$$

где $U(t)$ — замкнутое множество матриц, характеризующее возможности наблюдателя. Введем еще интегральный функционал

$$J_0 = \int_{t_0}^{T} f(V, t)\,dt \tag{3.3}$$

Здесь скалярная функция f определена при всех $t \in [t_0, T]$, $V \in U$ и характеризует стоимость наблюдений.

Пусть, например, множество U при любом t состоит из двух фиксированных матриц: 0 и V_0, а функция f задана соотношениями

$$f(0, t) = 0, \qquad f(V_0, t) = 1$$

В этом случае наблюдатель в каждый момент времени может либо вести наблюдения фиксированным способом (с матрицей V_0), либо вообще не наблюдать. Функционал J из (3.3) здесь характеризует просто суммарную длительность процесса наблюдения.

Процесс наблюдения обычно ведется для получения с заданной или с минимальной погрешностью значений некоторых функций от фазовых координат в определенные моменты времени. Пусть $T_1,\ldots, T_m$ — заданные моменты времени в интервале $[t_0, T]$, а $z_1,\ldots,z_m$ — скалярные параметры, интересующие наблюдателя в эти моменты времени. Некоторые из величин T_i могут совпадать, это означает, что в какие-то моменты времени представляют интерес несколько параметров. Ограничиваясь, как и в системе (1.1), линейным приближением (в окрестности некоторой номинальной траектории), положим параметры z_i линейными функциями фазовых координат

$$z_i = (q_i, x(T_i)) + a_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.4}$$

Здесь q_i — заданные n-мерные векторы, a_i — постоянные. Учитывая, что корреляционная матрица для вектора $x(T_i)$ равна $D(T_i)$, из (3.4) получим по известным правилам [4] дисперсию J_i величины z_i

$$J_i = \sum_{j,\,k=1}^{n} D^{jk}(T_i)\, q_i^j q_i^k \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

Здесь и далее верхние индексы означают номера элементов векторов и матриц. Отметим, что величины (3.5) линейны относительно элементов матрицы D, играющих роль фазовых координат. Функционалы (3.5) характеризуют погрешность определения интересующих параметров.

Теперь сформулируем несколько вариантов задачи об оптимальном наблюдении. Можно поставить задачу об определении управления $V(t)$, удовлетворяющего при всех $t \in [t_0, T]$ ограничениям (3.2) и минимизирующего функционал (3.3) при условии, что функционалы (3.5) принимают заданные значения. Фазовые координаты $D(t)$ определяются уравнениями (3.1) и начальным условием $D(t_0) = D_0$. Поставленная задача будет обычной задачей оптимального управления с интегральным функционалом, ограничением на управление и линейными многоточечными краевыми условиями. Число фазовых координат и управляющих функций, т. е. число элементов матриц D и V равно n^2, но в силу симметрии этих матриц можно рассматривать лишь $n(n+1)/2$ их компонент.

Вместо минимизации функционала J_0 из (3.3) (стоимости наблюдения) можно требовать минимума одного из функционалов J_i из (3.5), т. е. минимизировать погрешность определения одного из параметров (3.4). Остальные функционалы (3.5), а также функционал (3.3) при этом могут быть заданы.

Если измерения производятся в дискретные моменты времени, то

$$V(t) = \sum_{k=1}^{r} V_k(t)\,\delta(t - t_k) \tag{3.6}$$

Здесь r — число измерений, δ — дельта-функция, $V_k(t)$ — заданные матричные функции (в частности, постоянные), t_k — моменты измерений. Можно поставить задачу об оптимальном выборе чисел t_k из интервала $[t_0, T]$ или из части этого интервала с тем, чтобы добиться минимума одного из функционалов вида (3.5) (возможно, при заданных значениях других функционалов). Эта задача будет задачей нелинейного программирования. Возможны и другие постановки задач об оптимизации процесса наблюдения. В частности, можно рассматривать дискретные задачи оптимального наблюдения (при помощи уравнений (1.3), (1.7)) как многошаговые дискретные управляемые процессы.

§ 4. **Анализ уравнений.** Задачи, поставленные в § 3, можно значительно упростить. Нелинейную систему (3.1) можно свести к линейной путем замены переменных $D = Y^{-1}$. Дифференцируя тождество $DY = E$ (E — единичная матрица), получим

$$dY / dt = -Y(dD / dt)Y \qquad (Y = D^{-1}) \tag{4.1}$$

Подставляя в (4.1) уравнение (3.1), получим

$$dY / dt = -A'Y - YA + V, \qquad Y(t_0) = Y_0 = D^{-1}(t_0) \tag{4.2}$$

Следуя принципу максимума Л. С. Понтрягина [5], составим функцию Гамильтона H для задачи оптимального наблюдения с функционалом (3.3) и уравнениями (4.2)

$$H = P * (-A'Y - YA + V) + p_0 f(V, t) \qquad \left(A_1 * A_2 = \sum_{j,k=1}^{n} A_1^{jk} A_2^{jk}\right) \tag{4.3}$$

Здесь p_0 — постоянная, P — матрица сопряженных переменных (симметричная матрица размера $n \times n$), а звездочкой обозначено скалярное (поэлементное) произведение матриц. Соответствующая сопряженная система имеет вид

$$dP \,/\, dt = AP + PA' \tag{4.4}$$

Пусть ставится задача о минимизации функционала (3.3) при ограничении (3.2) с постоянным замкнутым множеством U и условиях на функционалы (3.5) в конце процесса

$$J_i = \sum_{j,k=1}^{n} D^{jk}(T)\, q_i^j q_i^k = \sum_{j,k=1}^{n} [Y^{-1}(T)]^{jk} q_i^j q_i^k = c_i \quad (i=1,\ldots,m;\ m \leqslant n) \tag{4.5}$$

Здесь c_i — заданные постоянные, верхние индексы указывают номер элементов. Согласно принципу максимума [5], задача оптимального наблюдения сведется к краевой задаче для системы (4.2), (4.4) с краевыми условиями (4.2), (4.5) и условиями трансверсальности (λ_i — постоянные)

$$P^{jk}(T) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial J_i}{\partial Y^{jk}} \qquad (j,\ k=1,\ldots,n) \tag{4.6}$$

Управление V исключается при помощи условия максимальности функции H из (4.3), т. е.

$$P * V + p_0 f(V,t) \to \sup \quad \text{по} \quad V \in U \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{4.7}$$

Здесь обычно можно положить $p_0 \equiv -1$. Для вычисления производных (4.6) отметим тождество, аналогичное (4.1)

$$\partial D \,/\, \partial Y^{jk} = -D(\partial Y \,/\, \partial Y^{jk}) D \qquad (j,\ k=1,\ldots,n)$$

Отсюда, с учетом симметрии матриц D, Y сразу следует

$$\partial D^{rs} \,/\, \partial Y^{jk} = -D^{jk} D^{ks} \qquad (r,\ s,\ j,\ k=1,\ldots,n)$$

Подставляя это равенство и соотношение (4.5) в условие (4.6), получим

$$\begin{gathered} P^{jk}(T) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{r,s=1}^{n} D^{jr}(T) D^{ks}(T)\, q_i^r q_i^s = \\ = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i [D(T) q_i]^j [D(T) q_i]^k = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i [Y^{-1}(T) q_i]^j [Y^{-1}(T) q_i]^k \\ (j,\ k=1,\ldots,n) \end{gathered} \tag{4.8}$$

Полученная нелинейная матричная краевая задача (4.2), (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) может быть сведена к системе трансцендентных уравнений. Пусть известна фундаментальная матрица решений $X(t)$ для исходной векторной системы (1.1). Запишем, пользуясь тождеством (4.1), уравнения для фундаментальной матрицы и связанных с ней матриц

$$dX \,/\, dt = AX, \qquad X(t_0) = E, \qquad dX' \,/\, dt = X'A'$$

$$dX^{-1} \,/\, dt = -X^{-1}A, \qquad d(X')^{-1} \,/\, dt = -A'(X')^{-1} \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь матрицы

$$X_1(t) = (X')^{-1}CX^{-1}, \qquad X_2(t) = XCX' \tag{4.10}$$

где C — постоянная матрица размером $n \times n$. Вычисляя производные матриц (4.10) и пользуясь соотношениями (4.9), легко убедиться, что эти матрицы удовлетворяют уравнениям

$$dX_1 / dt = -A'X_1 - X_1A, \qquad dX_2 / dt = AX_2 + X_2A'$$
$$X_1(t_0) = X_2(t_0) = C \tag{4.11}$$

Сравнивая (4.11) с (4.2) и (4.4), видим, что матрица $X_1(t)$ есть общее решение уравнения (4.2) при $V = 0$, а $X_2(t)$ есть общее решение уравнения (4.4) для сопряженных переменных. Следовательно,

$$P(t) = X(t)\ CX'(t) \tag{4.12}$$

где постоянная матрица C симметрична в силу симметрии матрицы $P(t)$.

Решение неоднородного уравнения (4.2) найдем методом вариации произвольных постоянных, входящих в матрицу X_1 из (4.10). Полагая $Y = (X')^{-1}Y_1X^{-1}$, получим при помощи равенств (4.2), (4.9)

$$(X')^{-1}(dY_1 / dt)X^{-1} = V$$

Отсюда найдем матрицу Y_1, а затем решение $Y(t)$ задачи Коши (4.2) и обратную к $Y(t)$ матрицу $D(t)$

$$Y(t) = [X'(t)]^{-1}\left[Y_0 + \int_{t_0}^{t} X'(\tau)V(\tau)X(\tau)\,d\tau\right]X^{-1}(t)$$
$$D(t) = X(t)\left[D_0^{-1} + \int_{t_0}^{t} X'(\tau)V(\tau)X(\tau)\,d\tau\right]^{-1}X'(t) \tag{4.13}$$

Второе равенство (4.13) определяет общее решение нелинейного матричного уравнения (3.1). Пусть функция V в равенствах (4.13) исключена при помощи условия (4.7), в котором $p_0 = -1$. Подставляя решение (4.13) для $D(t)$ и (4.12) для $P(t)$ в условия (4.5) и (4.8), получим всего $n^2 + m$ алгебраических уравнений с $n^2 + m$ неизвестными (n^2 элементов постоянной матрицы C и m констант λ_i). Постоянные λ_i входят в эту систему линейно, и их легко исключить. Учитывая еще симметрию матрицы C, видим, что задача сведется к системе $n(n+1)/2$ алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных. Аналогичным образом и другие задачи оптимального наблюдения приводятся при помощи решений (4.12), (4.13) к системам трансцендентных уравнений.

Пусть, например, нужно минимизировать функционал вида (3.5)

$$J = \sum_{j,k=1}^{n} D^{jk}(T)\,q^jq^k \tag{4.14}$$

при условиях (4.5), ограничении (3.2) и ограничении на интегральный функционал (3.3) (стоимость или время наблюдения)

$$J_0 = \int_{t_0}^{T} f(V, t)\,dt = c_0 \tag{4.15}$$

В равенствах (4.14), (4.15) q — заданный n-мерный вектор, c_0 — постоянная.

Эта задача будет взаимной по отношению к рассмотренной выше. Условие принципа максимума для нее имеет прежний вид (4.7), но p_0 теперь — неизвестная постоянная. Условия трансверсальности запишутся в форме, аналогичной (4.8)

$$P^{jk}(T)=[D(T)\,q]^j\,[D(T)\,q]^k-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[D(T)\,q_i]^j\,[D(T)\,q_i]^k \tag{4.16}$$
$$(j,\ k=1,\ldots,n)$$

Для определения n^2+m+1 постоянных C,λ_i,p_0 имеем n^2+m+1 условий (4.5), (4.15), (4.16), в которые нужно подставить решения (4.12), (4.13) для $P(t)$ и $D(t)$, а V исключить при помощи условия (4.7). Если в поставленной задаче нет ограничения (4.15), то в выражении (4.7) следует положить $p_0=0$.

Различные задачи оптимизации наблюдений за счет выбора дискретных моментов измерения, т. е. в случае (3.6), также упрощаются при помощи решения (4.13). Подставляя (3.6) в (4.13), получим

$$D(T)=X(T)\Big[D_0^{-1}+\sum_{k=1}^{r}X'(t_k)\,V_k(t_k)\,X(t_k)\Big]^{-1}X'(T) \tag{4.17}$$

Теперь задача о минимуме функционала (4.14) для способа наблюдения (3. сводится путем подстановки выражения (4.17) в равенство (4.14) к задаче о минимизации функции от переменных t_k.

§ 5. **Примеры.** 1. Пусть уравнение движения (1.1) имеет простейший вид

$$dx\,/\,dt=ax+b(t) \tag{5.1}$$

где x — единственная фазовая координата ($n=1$), a — постоянная, $b(t)$ — функция времени. Процесс наблюдения состоит в измерении текущего значения фазовой координаты, причем в каждый момент времени дисперсия ошибки измерения на единицу времени либо равна постоянной b_0, либо измерения не производятся вовсе. Суммарная длительность наблюдения задана и равна $T_0<T$, где T — длительность процесса. Положим еще, не нарушая общности, $t_0=0$.

Требуется указать способ наблюдения, минимизирующий дисперсию $D(T)$ фазовой координаты $x(T)$ в конце процесса. В обозначениях § 2, 3 имеем $l=1$, $Q=1$, $V=B^{-1}$. Матрицы D, Q, B, V, P здесь превращаются в скаляры, множество U из (3.2) состоит из двух точек: 0 и b_0^{-1}, а функция f из (3.3) имеет вид

$$f=0\quad\text{при } V=0,\ f=1\quad\text{при } V=b_0^{-1} \tag{5.2}$$

Вектор q в функционале (4.14) сводится к скаляру $q=1$, условия (4.5) здесь отсутствует, так что $m=0$. Фундаментальная матрица $X(t)$, определяемая соотношениями (4.9), сведется к скалярной функции $X(t)=e^{at}$, и решения (4.12), (4.13) примут вид

$$P(t)=ce^{2at},\qquad D(T)=e^{2aT}\Big[D_0^{-1}+\int_0^T e^{\ a\tau}\,V(\tau)\,d\tau\Big]^{-1} \tag{5.3}$$

Здесь c и D_0 постоянные. Условие (4.16) дает

$$P(T)=ce^{2aT}=D^2(T) \tag{5.4}$$

Учитывая равенства (5.2) и (5.3) для P, получим из принципа максимума (4.7)

$$V=b_0^{-1}\quad\text{при } \varphi(t)>0,\qquad V=0\quad\text{при } \varphi(t)<0,$$
$$\varphi=ce^{2aT}b_0^{-1}+p_0 \tag{5.5}$$

Так как $c>0$ в силу (5.4), то функция $\varphi(t)$ из (5.5) монотонно возрастает при $a>0$ и монотонно убывает при $a<0$. Поэтому согласно (5.5) оптимальный закон наблюдения имеет вид

$$V=0\ \text{при}\ t<\theta,\qquad V=b_0^{-1}\ \text{при}\ t>\theta\qquad(a>0) \tag{5.6}$$
$$V=b_0^{-1}\ \text{при}\ t<\theta,\quad V=0\ \text{при}\ t>\theta\qquad(a<0)$$

Здесь через θ обозначен единственный момент переключения, соответствующий корню монотонной функции $\varphi(t)$. Так как суммарное время наблюдения равно T_0, то

$$\theta = T - T_0 \quad \text{при } a > 0, \qquad \theta = T_0 \quad \text{при } a < 0 \tag{5.7}$$

Подставляя соотношения (5.6), (5.7) в (5.3), получим

$$\begin{aligned} D(T) &= e^{2aT}\left[D_0^{-1} + {}^1/_2\, b_0^{-1}a^{-1}e^{2aT}\left(1 - e^{-2aT_0}\right)\right]^{-1} \qquad (a > 0) \\ D(T) &= e^{2aT}\left[D_0^{-1} + {}^1/_2\, b_0^{-1}a^{-1}\left(e^{2aT_0} - 1\right)\right]^{-1} \qquad (a < 0) \\ D(T) &= \left(D_0^{-1} + b_0^{-1}T_0\right)^{-1} \qquad (a = 0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

При $a = 0$, как легко видеть из (5.3), минимизируемый функционал $D(T)$ не зависит от закона наблюдения и при любом законе дается формулой (5.8). Равенства (5.6) — (5.8) полностью определяют решение задачи: закон оптимального наблюдения и функционал для всех случаев. Постоянные c, p_0 можно найти при помощи равенства (5.4) и уравнения $\varphi(\theta) = 0$, но в этом нет необходимости. Решение (5.6), (5.7) имеет наглядный смысл: при $a > 0$, когда траектории уравнения (5.1) расходятся, измерения выгоднее делать в конце процесса, а при $a < 0$, когда они сближаются,— в начале процесса.

2. Возьмем уравнения движения системы в виде

$$dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_2 / dt = b(t) \qquad (n = 2) \tag{5.9}$$

Здесь x_1 играет роль координаты, x_2 — скорости, $b(t)$ — ускорения для механической системы с одной степенью свободы. Пусть измерения производятся в дискретные моменты времени, причем в моменты t_i, $i = 1, \ldots, r$, измеряется координата x_1 с дисперсией ошибки b_1, а в моменты t_j', $j = 1, \ldots, r'$ измеряется скорость x_2 с дисперсией ошибки b_2. В начальный момент $t_0 = 0$ заданы дисперсии d_1, d_2 для координаты $x_1(0)$ и скорости $x_2(0)$, причем погрешности этих величин независимы. В обозначениях § 1—4 имеем

$$\begin{gathered} D_0 = \begin{Vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{Vmatrix}, \qquad X(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \\ V = \sum_{i=1}^{r} \begin{Vmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \delta(t - t_i) + \sum_{j=1}^{r'} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{Vmatrix} \delta(t - t_j') \end{gathered} \tag{5.10}$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ для системы (5.9) определена согласно общему соотношению (4.9). Подставляя выражения (5.10) в общее решение (4.13), получим

$$\begin{gathered} D(T) = \begin{Vmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_1^{-1} + rb_1^{-1} & b_1^{-1}\sum_1 \\ b_1^{-1}\sum_1 & d_2^{-1} + r'b_2^{-1} + b_1^{-1}\sum_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{Vmatrix} \\ \textstyle\sum_1 = t_1 + \ldots + t_r, \qquad \sum_2 = t_1^2 + \ldots + t_r^2 \end{gathered} \tag{5.11}$$

Из (5.11) видно, что матрица $D(T)$ не зависит от моментов t'_j измерения скорости, и поэтому они могут выбираться произвольно. Сделаем замену переменных

$$t_i = T\theta_i, \qquad d_1^{-1} = b_1^{-1}a, \qquad d_2^{-1} + r'b_2^{-1} = b_1^{-1}T^2 b \tag{5.12}$$

Здесь θ_i — безразмерные моменты измерения координаты, $a > 0$, $b > 0$ — безразмерные постоянные. Выражение (5.11) после подстановки соотношений (5.12) и упрощения примет вид

$$\begin{gathered} D(T) = \frac{b_1}{T^2\left[(a + r)(b + y) - x^2\right]} \begin{Vmatrix} T^2(a + r + b + y - 2x) & T(a + r - x) \\ T(a + r - x) & a + r \end{Vmatrix} \\ x = \theta_1 + \ldots + \theta_r, \qquad y = \theta_1^2 + \ldots + \theta_r^2 \end{gathered} \tag{5.13}$$

Поставим следующую задачу оптимального наблюдения: выбрать моменты t_i измерения координаты так, чтобы минимизировать дисперсию скорости $x_2(T)$ в конце процесса. Составим соответствующий функционал вида (4.14), пользуясь равенством (5.13)

$$J = \frac{b_1(a+r)}{T^2[(a+r)b+\psi]}, \qquad \psi = (a+r)y - x^2 \tag{5.14}$$

Задача о минимуме дисперсии скорости, т. е. выражения (5.14), сводится к задаче об определении максимума функции

$$\psi(\theta_1, \ldots, \theta_m) = (a+r)\sum_{i=1}^{r} \theta_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{r} \theta_i\Big)^2 \tag{5.15}$$

при условиях $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$. При помощи неравенства Коши — Буняковского получим

$$\psi = a\sum_{i=1}^{r} \theta_i^2 + \Big(\sum_{i=1}^{r} 1^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} \theta_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{r} \theta_i\Big)^2 \geqslant a\sum_{i=1}^{r} \theta_i^2 \geqslant 0$$

Отсюда следует, что ψ — положительно определенная квадратичная форма от θ_i. Очевидно, что ее максимум по r-мерному единичному кубу $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$, достигается в одной из вершин куба. Следовательно, в оптимальном решении часть величин θ_i равна нулю, а остальные равны единице, причем хотя бы одна из θ_i равна единице, так как точка $\theta_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$, сообщает минимум функции (5.15).

Таким образом, имеем

$$t_i = T\theta_i = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant r-k$$

$$t_i = T\theta_i = T \quad \text{при} \quad r-k < i \leqslant r \qquad (1 \leqslant k \leqslant r) \tag{5.16}$$

Здесь k — число измерений в конце процесса. Для определения k подставим (5.16) в (5.15)

$$\psi = (a+r)k - k^2 \tag{5.17}$$

и затем найдем максимум функции (5.17) по целочисленным k из интервала $1 \leqslant k \leqslant r$. Максимум (5.17) достигается при целом числе k, ближайшем к $(a+r)/2$, но не превышающем r. Обозначая квадратными скобками целую часть числа, запишем

$$k = \min\{r, [(a+r+1)/2]\}, \quad a = b_1 d_1^{-1} \tag{5.18}$$

Соотношения (5.16) — (5.18) полностью определяют оптимальный закон наблюдения, который сводится к тому, что k измерений производятся в конце, а остальные в начале процесса. Подставляя выражение (5.17) в (5.14), получим значение минимизируемого функционала (дисперсии погрешности скорости в конце процесса)

$$J = \frac{b_1(a+r)}{T^2[(a+r)(b+k)-k^2]}, \qquad a = b_1 d_1^{-1}, \qquad b = \frac{d_2^{-1} + r' b_2^{-1}}{b_1^{-1} T^2}$$

Поступила 3 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
3. Лидов М. Л. Оптимальная импульсная коррекция в линейных системах при неполной информации. III Всес. съезд по теорет. и прикладн. механике. Аннотации докладов. М., 1968, стр. 192.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.