Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

О ФИНАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. М. Беленький

(Москва)

Рассматриваются финальные движения гамильтоновых систем в условиях существования интеграла энергии. В частности, рассмотрены натуральные консервативные системы с k-степенями свободы, системы типа Лиувилля, однородные системы и системы, допускающие группу преобразований подобия.

При определенных условиях, наложенных на потенциалы силовых полей (не обязательно ньютонианских), получены некоторые интегралы и квазиинтегралы уравнений движения, содержащие вековые члены.

Получено обобщение известной в небесной механике формулы Лагранжа — Якоби, которое при помощи некоторого инвариантного соотношения и так называемой постоянной конфигурации σ удается свести к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Дан качественный анализ полученного уравнения и указаны наиболее важные случаи его интегрирования.

Рассмотрены также условия стационарности и квазистационарности консервативных систем, аналогично тому, как это делается в динамике звездных систем.

Одна из задач качественной теории динамических систем — задача о финальных движениях — возникла в небесной механике в связи с рассмотрением устойчивости (по Лагранжу) солнечной системы.

Первоначально она ставилась как задача об изменении взаимных расстояний n-гравитирующих точечных масс при неограниченном возрастании (убывании) времени t.

Начало исследованиям подобного рода было положено Лагранжем в его мемуаре о задаче трех тел [1].

Первые теоремы о финальных движениях n-гравитирующих по произвольному (степенному) закону в связи с рассмотрением устойчивости солнечной системы были получены Якоби [2].

Финальные движения в дальнейшем изучались, главным образом, применительно к задаче трех тел. Анализ и попытка классификации этих движений была проведена Шази [3,4].

Общий обзор о финальных движениях в задаче трех тел приведен в работе [5]. Финальные движения в задаче n-тел рассматривал Хильми [6].

Ниже рассматриваются финальные движения гамильтоновых систем в условиях существования интеграла энергии. Задача сводится к изучению поведения изображающей точки $N(q)$ в k-мерном пространстве конфигураций E^k при $t \to \pm\infty$.

Аналогично тому, как это делается в динамике звездных систем, задача о финальных движениях консервативных систем может быть сведена к изучению двух функций. Одна из них $\Omega = \Sigma p_j q_j$ представляет билинейную форму канонических переменных, а другая J — некоторую функцию обобщенных координат q_j, структура которой сходна с выражением для момента инерции системы, вследствие чего она может быть названа «обобщенным моментом инерции». В частности, для свободной системы n-гравитирующих точечных масс значение J (в декартовых координатах) в точности совпадает с моментом инерции системы.

1. Постановка задачи и основные зависимости. Пусть некоторая консервативная система, конфигурация которой в каждый момент времени t определяется k обобщенными координатами q_j $(j = 1, 2,\ldots, k)$, движется в силовом поле с потенциалом $V(q)$, относительно которого будем полагать, что он представляет однородную функцию обобщенных координат q_j степени n, так что $V(\lambda q) = \lambda^n V(q)$.

Движение изображающей точки $N(q)$ системы будем рассматривать в k-мерном пространстве конфигураций E^k, метрика которого определяется по терминологии Синджа [7] кинематическим линейным элементом

$$dS^2 = 2T\,dt^2 = \sum_{i,\,j=1}^{k} a_{ij}(q)\,dq_i dq_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1.1}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, $a_{ij}(q)$ — некоторые функции координат q_j $(j = 1, 2,\ldots, k)$, которые в частном случае могут быть и постоянными величинами.

Напишем уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.2}$$

Умножая эти уравнения, соответственно, на p_j и q_j и складывая их, после суммирования по индексу j получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{i,\,j=1}^{k} p_j q_j = \sum_{i,\,j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_j} p_j - \sum_{i,\,j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j \tag{1.3}$$

Следуя Пуанкаре [8], введем функцию Ω^* (у Пуанкаре эта функция обозначена через Ω без звездочки) при помощи соотношения

$$\frac{d\Omega^*}{dt} = H(p, q) + \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{dp_j}{dt} = H(p, q) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j \tag{1.4}$$

Комбинируя выражения (1.3) и (1.4) и замечая, что $\partial H / \partial p_j = \partial T^* / \partial p_j$, где $T^*(q, p)$ — союзное выражение кинетической энергии, получаем

$$\frac{d}{dt}(\Omega - \Omega^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T^*}{\partial p_j} p_j - H(p, q) \qquad \left(\Omega = \sum_{j=1}^{k} p_j q_j\right) \tag{1.5}$$

Так как кинетическая энергия $T(q, q^\cdot)$ системы, в силу (1.1) — положительно-определенная квадратичная форма обобщенных скоростей $q_j^\cdot$, то союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$, как нетрудно убедиться, будет также положительно-определенной квадратичной формой обобщенных импульсов $p_j = \partial T / \partial q^\cdot_j$ (1.6)

$$T(q, q^\cdot) = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k} a_{ij}(q)\, q_i^\cdot q_j^\cdot, \quad T^*(q, p) = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k} a^{ij}(q)\, p_i p_j \qquad (a^{ij} = a^{ji})$$

Здесь через $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ обозначена матрица, обратная матрице (a_{ij}).

Пользуясь теоремой Эйлера об однородных функциях и вводя функцию Лагранжа L, выражение (1.5) можем преобразовать к виду

$$d(\Sigma p_j q_j - \Omega^*) = L\,dt \qquad (L = T - V) \tag{1.7}$$

Полученный результат означает, что при движении изображающей точки $N(q)$ системы по прямому пути (в метризированном, согласно (1.1) пространстве E^k) элементарное действие по Гамильтону $L\,dt$ представляет полный дифференциал разности $\Omega - \Omega^*$.

2. Натуральные системы. Для таких систем, как известно, функция Гамильтона $H(p, q)$ может быть представлена как сумма кинетической и потенциальной энергий, т. е. $H(p, q) = T^*(q, p) + V(q)$.

Пользуясь интегралом энергии $H(p, q) = h$ и замечая, что $T^*(q,p)$ — однородная квадратичная форма обобщенных импульсов p_j, а $V(q)$ — однородная функция обобщенных координат q_j степени n, при помощи теоремы Эйлера об однородных функциях преобразуем (1.3) и (1.4) к виду (2.1)

$$\frac{d\Omega}{dt} = -nh + (2+n)T^* - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T^*}{\partial q_j} q_j, \quad \frac{d\Omega^*}{dt} = (1-n)h + nT^* - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T^*}{\partial q_j} q_j$$

Примем, что союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$ — однородная функция степени $(-\nu)$ относительно обобщенных координат q_i. В силу теоремы Эйлера об однородных функциях получаем

$$\frac{d\Omega}{dt} = -nh + (2+n+\nu)T^*, \qquad \frac{d\Omega^*}{dt} = (1-n)h + (n+\nu)T^* \tag{2.2}$$

Суммируя, находим

$$\frac{d}{dt}(\Omega + \Omega^*) = (1-2n)h + 2(1+n+\nu)T^* \tag{2.3}$$

Теорема 2.1 Пусть консервативная система движется в силовом поле, потенциальная энергия $V(q)$ которого однородная функция обобщенных координат q_j степени n. Пусть далее союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$ — квадратичная форма обобщенных импульсов p_j и однородная функция степени $(-\nu)$ относительно обобщенных координат q_j.

Тогда, если выполняется условие $(1 + n + \nu) = 0$, то существует соотношение вида

$$\Omega^* = -(p_1 q_1 + \ldots + p_k q_k) + (1 - 2n)ht + \mathrm{const} \tag{2.4}$$

которое будем называть «квазиинтегралом», поскольку сама функция Ω^* — определяется дифференциальным соотношением.

Существование квазиинтеграла (2.4), допускающего разбиение на три слагаемых: функцию Ω^*, билинейную форму Ω и вековой член $(1 - 2n)\,ht$, следует непосредственно в результате интегрирования (2.3).

Укажем, что условие $1 + n + \nu = 0$ выполняется, в частности, при движении системы, состоящей из любого числа гравитирующих в согласии с законом Ньютона точечных масс. В этом случае имеем $\nu = 0$, $n = -1$ и, следовательно, выполняются условия теоремы 2.1. При этом, в силу (2.4), находим

$$\Omega^* = -(p_1 q_1 + \ldots + p_k q_k) + 3ht + \text{const} \tag{2.5}$$

что совпадает с результатом, полученным ранее Пуанкаре [8].

Следствие 2.1. Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда для гиперболических ($h > 0$) и эллиптических ($h < 0$) типов движения сумма $(\Omega^* + \Omega)$, в зависимости от $\operatorname{sign}(1 - 2n)h$, монотонно возрастает или убывает с течением времени t.

Для параболического же типа движения ($h = 0$) вековой член исчезает и имеет место закон сохранения $\Omega^* + \Omega = \text{const}$.

Теорема 2.2 Пусть выполняются условия однородности союзного выражения кинетической энергии $T^*(q, p)$ и потенциальной энергии $V(q)$, указанные в теореме 2.1.

Тогда, если между показателями степеней однородности $(-\nu)$ и n выполняется соотношение $(2 + n + \nu) = 0$, то существует интеграл, допускающий разбиение на билинейную форму Ω и на вековой член (nht)

$$\sum_{j=1}^{k} p_j q_j = -nht + \text{const} \qquad \left(p_j = \sum_{i}^{k} a_{ij}(q)\, q_i^{\cdot}\right) \tag{2.6}$$

Этот результат следует непосредственно из рассмотрения (2.2) и (1.5). Укажем, что интегралу (2.6) можно придать другую форму, если воспользоваться интегралом энергии. В итоге находим

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q)\, q_j q_i^{\cdot} + nt\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} + V(q)\right) = \text{const} \tag{2.7}$$

что совпадает с известным результатом [9].

Следствие 2.2. Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда для гиперболических ($h > 0$) и эллиптических ($h < 0$) типов движения билинейная форма $\Sigma p_j q_j$ будет, в зависимости от $\operatorname{sign}(nh)$, монотонно возрастать или убывать с течением времени t. Следовательно, в финальном движении при $t \to \infty$ функция $\Omega(p(t), q(t))$ по модулю неограниченно растет.

Для параболических же типов движения ($h = 0$) вековой член (nht) исчезает и имеет место закон сохранения $\Omega(p, q) = \text{const}$.

Следовательно, существует интеграл вида

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q)\, \dot{q}_j q_i^{\cdot} = \text{const} \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия теоремы 2.1 относительно однородности союзного выражения кинетической энергии $T^*(q, p)$ и потенциальной энергии $V(q)$.

Тогда, если между показателями степеней однородности $(-\nu)$ и n выполняется соотношение $n+\nu=0$, то существует квазиинтеграл вида

$$\Omega^* = (1-n)ht + \text{const} \qquad (h \neq 0) \tag{2.9}$$

Наличие векового члена $(1-n)\,ht$ указывает, что в финальном движении при $t \to \infty$ функция Ω^* по модулю неограниченно растет.

Полученный результат следует непосредственно из рассмотрения (2.2). В частности, для ньютонианского поля сил притяжения имеем $n=-1$, и, следовательно,

$$\Omega^* = 2ht + \text{const}$$

Теорема 2.4. Пусть степени однородности потенциальной энергии $V(q)$ и союзного выражения кинетической энергии $T^*(q, p)$, относительно обобщенных координат q_j, соответственно равны n и $-\nu = 2$.

Тогда в тех областях G пространства E^k, где потенциальная энергия $V(q)$ строго знакопостоянна ($V > 0$ или $V < 0$), билинейная форма $\Sigma p_j q_j$ будет монотонной функцией времени t.

Чтобы в этом убедиться, достаточно при помощи интеграла энергии и условия $2+\nu=0$ преобразовать (2.2) к виду

$$d\Omega \,/\, dt = -nV(q) \tag{2.10}$$

Таким образом, если $\operatorname{sign}(nV) > 0$, то $d\Omega \,/\, dt < 0$ и Ω монотонно убывает, а при условии $\operatorname{sign}(nV) < 0$ имеем $d\Omega \,/\, dt > 0$ и Ω монотонно возрастает.

В частности, для эллиптических типов движения ($h < 0$) потенциальная энергия $V(q) = h - T(q, q^{\cdot}) < 0$ и, следовательно, $\Omega(p, q)$ — монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция времени t.

Для параболических типов движения ($h=0$) в точках остановки ($T=0$) билинейная форма Ω принимает стационарные значения. В любой же области G, не содержащей точек остановки, имеем $V(q) = -T(q, q^{\cdot}) < 0$ и, следовательно, Ω — также монотонная функция времени t.

Обратимся теперь к (2.2) и установим необходимые условия существования периодических траекторий при движении фазовой точки $N^*(p, q)$ в $2k$-мерном фазовом пространстве E^{2k}.

Вводя среднее значение кинетической энергии $\langle T(t)\rangle$ на конечном интервале времени t, в результате интегрирования (2.2) получаем

$$\begin{aligned} \Omega &= (-nh + (2+n+\nu)\ \langle T\rangle)\ t + \Omega_0 \\ \Omega^* &= ((1-n)\,h + (n+\nu)\ \langle T\rangle)t + \Omega_0^* \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь $\Omega_0 = \Omega(0)$ и $\Omega^*_0 = \Omega^*(0)$ — постоянные, а

$$\langle T(t)\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t T(q(t),\ p(t))\,dt \tag{2.12}$$

Пусть фазовая точка $N^*(p, q)$ при заданном значении постоянной энергии h совершает в фазовом пространстве E^{2k} некоторое периодическое движение с периодом τ, так что $\Omega(\tau) = \Omega(0)$. Тогда, в силу (2.11),

$$\langle T(\tau)\rangle = \frac{nh}{2+n+\nu} \qquad (h \neq 0) \tag{2.13}$$

Отсюда при помощи интеграла энергии нетрудно получить обобщение известной теоремы о вириале: $(2+\nu)\langle T \rangle = n\ \langle V\rangle$.

В частности, для системы, состоящей из произвольного числа гравитирующих по произвольному степенному закону точечных масс, имеем $\nu = 0$, что и приводит к известному выражению теоремы о вириале [10].

Обратимся к вопросу существования периодических движений, в зависимости от значений параметров h, ν и n.

1) Пусть $2+\nu+n=0$. Тогда для гиперболических $(h>0)$ и эллиптических $(h<0)$ типов движения периодические траектории существовать не могут. Для параболического типа движения $(h = 0)$ периодические движения могут существовать и при этом будет иметь место закон сохранения билинейной формы $\Omega(p, q) = \Omega_0$.

2) Пусть $2+\nu+n>0$. Тогда для гиперболических $(h>0)$ и эллиптических $(h<0)$ типов движения необходимым (но не достаточным) условием существования периодических траекторий является условие $\operatorname{sign}(nh)>0$. Для параболических же типов движения $(h = 0)$ периодические траектории существовать не могут.

3) Пусть $2+\nu+n<0$. Тогда для гиперболических $(h>0)$ и эллиптических $(h<0)$ типов движения необходимым (но не достаточным) условием существования периодических траекторий является условие $\operatorname{sign}(nh)<0$. Для параболических типов движения $(h = 0)$ периодические траектории существовать не могут.

В справедливости этих утверждений легко убедиться, если воспользоваться (2.11) и (2.13).

Заметим, что в общем случае периодических движений $\Omega^*(t)$ не будет однозначной функцией переменного t.

Действительно, при обходе периодической траектории значение Ω^*, в силу (2.13) и (2.11), за время периода τ изменяется на величину α, которую назовем циклической постоянной и равной

$$\alpha = \frac{2+\nu-n}{2+\nu+n} h\tau \qquad (h \neq 0,\ \alpha = \Omega^*(\tau) - \Omega^*(0)) \tag{2.14}$$

Циклическая постоянная α обращается в нуль и Ω^* становится однозначной функцией, если выполняется условие $2+\nu-n=0$, что соответствует, как это будет показано ниже, гамильтоновым системам, допускающим однопараметрическую группу преобразований геометрического подобия вида $q' = \lambda q$.

Если движение относится к параболическому типу $(h = 0)$ и будет периодическим, то как это было показано, необходимо выполняется условие $2+n+\nu=0$. Следовательно, в этом случае циклическая постоянная α, в силу (2.11), будет равна

$$\alpha = -2\tau\langle T(\tau)\rangle \qquad (h=0) \tag{2.15}$$

Как примеры приведем случаи нахождения циклической постоянной α, когда постоянная энергии $h \neq 0$ и $h = 0$.

1. Рассмотрим задачу Кеплера, когда единичная масса ($m = 1$) движется по эллиптической орбите под действием притягивающего центра O с ньютонианским потенциалом $V = -\mu / r$ (μ — приведенная масса). Совместив начало координат с притягивающим центром O и направив ось x по линии апсид, напишем функцию Гамильтона, принимая в качестве обобщенных координат декартовы координаты точки ($q_1 = x$, $q_2 = y$)

$$H = (1/2\mu)(p_x^2 + p_y^2) - \mu / r \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Здесь союзное выражение кинетической энергии T и потенциальная энергия V — являются относительно обобщенных координат однородными функциями, соответственно степени $\nu = 0$ и $n = -1$. Следовательно, в силу (1.4) имеем

$$\frac{d\Omega^*}{dt} = h - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial H}{\partial q_j} q_j = h + V = h - \frac{\mu}{r} \tag{2.16}$$

где радиус вектор r, согласно известному решению задачи двух тел, равен

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \qquad (p = a(1 - e^2)) \tag{2.17}$$

Здесь a — большая полуось эллипса, e — эксцентриситет, а ϑ — истичная аномалия (полярный угол).

Интегрируя (2.16) в пределах одного периода τ и замечая, что согласно интегралу площадей $cdt = r^2 d\vartheta$, а r определяется в согласии с (2.17), получаем

$$\alpha = \Omega^*(\tau) - \Omega^*(0) = \left(h - \frac{\mu}{p}\right)\tau - \frac{\mu e p}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \, d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}$$

Интеграл, стоящий в правой части, путем подстановки $z = e^{i\vartheta}$ и перехода к комплексным переменным, может быть подсчитан при помощи теоремы Коши о вычетах. Его значение оказывается равным

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \, d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2} = -\frac{2\pi e}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Если теперь воспользоваться известными из теории эллиптических орбит соотношениями

$$c = \sqrt{\mu}\sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad h = -\mu / 2a, \qquad \tau = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{\mu}$$

то после некоторых упрощений получаем

$$\alpha = h\tau\left(1 + \frac{2}{1 - e^2}\right) - h\tau \frac{2e^2}{1 - e^2} = 3h\tau$$

Заметим, что этот же результат можно сразу получить, если воспользоваться (2.14) и принять $\nu = 0$, $n = -1$, что дает $\alpha = 3h\tau$, как и должно быть.

2. В качестве примера параболического типа движения ($h = 0$), можно рассмотреть периодическое движение точки единичной массы по круговой орбите под действием притягивающего центра с потенциалом $V = -Ar^n$. Из простых физических соображений следует, что $n = -2$ и непосредственный подсчет циклической постоянной α при помощи (1.4) или (2.15) дает $\alpha = -\pi(8A)^{1/2}$.

3. Системы типа Лиувилля. Для таких систем кинетическая T и потенциальная V энергии имеют, соответственно, вид [11]

$$T(q, \dot q) = \frac{U(q)}{2} \sum_{j=1}^{k} m_j(q_j) \dot q_j^2, \qquad T^*(q, p) = \frac{1}{2U(q)} \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j^2}{m_j(q_j)}$$

$$V(q) = \frac{1}{U(q)} \sum_{j=1}^{k} V_j(q_j), \qquad U(q) = \sum_{j=1}^{k} U_j(q_j) \tag{3.1}$$

Пользуясь известным методом [11], перейдем от канонических переменных q_j и p_j к новым переменным ξ_j и η_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ с помощью точечного преобразования (3.2), функциональный определитель D которого отличен от нуля

$$\xi_j = \int \sqrt{m_j(q_j)}\, dq_j \qquad \left(D = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)}{\partial(q_1, q_2, \ldots, q_k)} \neq 0\right) \tag{3.2}$$

Кинетическая $T'^*(\xi, \eta)$ и потенциальная $V'(\xi)$ энергии, в новых переменных ξ_j и $\eta_j = \partial T' / \partial \dot{\xi}_j$ будут иметь вид

$$T'(\xi, \dot{\xi}) = \frac{U'(\xi)}{2} \sum_{j=1}^{k} \dot{\xi}_j^2, \qquad T'^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2U'(\xi)} \sum_{j=1}^{k} \eta_j^2 \tag{3.3}$$

$$V'(\xi) = \frac{1}{U'(\xi)} \sum_{j=1}^{k} V_j(\varphi_j(\xi_j)), \qquad U'(\xi) = \sum_{j=1}^{k} U_j(\varphi_j(\xi_j))$$

Рассматриваемое преобразование будет вполне каноническим, поэтому преобразованная функция Гамильтона

$$H'(\xi, \eta) = T'^*(\xi, \eta) + V'(\xi)$$

получается из первоначальной функции $H(p, q)$ заменой переменных

$$q_j = \varphi_j(\xi_j), \qquad p_j = \sqrt{m_j'(\xi_j)}\, \eta_j \qquad (m_j(\varphi_j(\xi_j)) = m_j'(\xi_j))$$

так что $H(p, q) = H'(\xi, \eta) = h$.

Уравнения Гамильтона (1.2) в переменных ξ_j и η_j принимают вид

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \eta_j}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.4}$$

Пусть $U_j(q_j)$ и $V_j(q_j)$ — однородные функции переменных q_j соответственно степени λ и n, а

$$m_j(q_j) = a_j q_j^{\nu} \qquad (\nu + 2 \neq 0, \ a_j = \text{const})$$

При этом, в силу преобразования (3.2), получаем

$$q_j = b_j \xi_j^{\theta} \qquad (\theta = 2 / (2 + \nu), \ b_j = \text{const}) \tag{3.5}$$

и, следовательно, $T'^*(\xi, \eta)$ и $V'(\xi)$ — однородные функции переменных ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ соответственно степени $\lambda' = -\lambda\theta$ и $n' = (n - \lambda)\theta$.

Эта однородность функций $T'^*(\xi, \eta)$ и $V'(\xi)$ относительно переменных ξ_j будет выполняться при любых значениях ν за исключением $\nu = -2$.

В этом исключительном случае, когда $2 + \nu = 0$, в силу (3.2), получаем $\xi_j = C_j \ln q_j$ и, следовательно, при переходе от переменных q_j к ξ_j (или наоборот) любая степенная функция после рассматриваемого точечного преобразования перестает быть степенной. В силу сказанного, в дальнейшем будем полагать, что $2 + \nu \neq 0$.

Обращаясь к уравнениям (3.4) и поступая аналогично тому, как это было проделано в п. 1, с учетом степеней однородности функций $T'^*(\xi, \eta)$ и $V'(\xi)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\Omega'(\xi, \eta) = -n'h + (2 + n' - \lambda')\, T'^* \qquad \left(\Omega' = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \eta_j\right) \tag{3.6}$$

Введем функцию Ω'^*, полагая

$$\frac{d\Omega'^*}{dt} = H'(\xi, \eta) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H'}{\partial \xi_j} \xi_j \qquad (H'(\xi, \eta) = h)$$

Пользуясь интегралом энергии и учитывая однородность функции $H'(\xi, \eta)$ относительно переменных ξ_j, с помощью теоремы Эйлера об однородных функциях, нетрудно получить

$$\frac{d\Omega'^*}{dt} = (1 - n')h + (n' - \lambda')T'^*(\xi, \eta) \tag{3.7}$$

Комбинируя (3.6) и (3.7) и вводя функцию Лагранжа

$$L'(\xi, \dot\xi) = T'(\xi, \dot\xi) - V'(\xi)$$

находим

$$\frac{d}{dt}(\Omega' - \Omega'^*) = L', \quad \frac{d}{dt}(\Omega' + \Omega'^*) = (1 - 2n')h + 2(1 + n' - \lambda')T'^* \tag{3.8}$$

Эти результаты сходны с полученными выше соотношениями (1.7) и (2.3) для натуральных систем.

Теорема 3.1. Пусть для системы типа Лиувилля (3.3) $T'^*(\xi, \eta)$ и $V'(\xi)$ — однородные функции переменных ξ_j соответственно степени $\lambda' = -\lambda\theta$ и $n' = (n - \lambda)\theta$. Тогда, если выполняется условие $2 + n' - \lambda' = 0$, что эквивалентно $2 + n + \nu = 0$, то существует интеграл, допускающий разбиение на билинейную форму и вековой член, вида

$$(\xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_k\eta_k) + n'ht = \text{const} \qquad (n' = 2(n - \lambda)/(2 + \nu)) \tag{3.9}$$

Этот результат следует непосредственно из рассмотрения (3.6) и аналогичен полученному выше интегралу (2.6) для натуральных систем.

Следствие 3.1. В условиях выполнения теоремы (3.1) для гиперболических ($h > 0$) и эллиптических ($h < 0$) типов движения периодические движения существовать не могут, а билинейная форма $\Sigma\xi_j\eta_j$ будет монотонной функцией времени t, принимая в финальном движении при $t \to \infty$ по модулю неограниченно большие значения.

При этом здесь предполагается, что $n \neq \lambda$, т. е. $n' \neq 0$.

Для параболического типа движения ($h = 0$) имеет место закон сохранения $\Omega'(\xi, \eta) = \text{const}$, и, следовательно, существует интеграл вида

$$U'(\xi)(\xi_1\dot\xi_1 + \xi_2\dot\xi_2 + \ldots + \xi_k\dot\xi_k) = \text{const} \tag{3.10}$$

Теорема 3.2 Пусть для систем типа Лиувилля (3.3) выполняются условия однородности функций $T'^*(\xi, \eta)$ и $V'(\xi)$, указанные в условии теоремы (3.1).

Тогда, если выполняется условие $1 + n' - \lambda' = 0$, то существует квазиинтеграл, допускающий разбиение на три слагаемых, а именно: функцию Ω'^*, билинейную форму $\Omega'(\xi, \eta)$ и вековой член $(1 - 2n')ht$;

$$\Omega'^* + (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_k\eta_k) - (1 - 2n')ht = \text{const} \tag{3.11}$$

Этот результат следует непосредственно из рассмотрения (3.8) и аналогичен полученному выше квазиинтегралу (2.4) для натуральных систем.

Рассмотрим теперь системы типа Лиувилля (3.1), когда $m_j(q_j) = a_j = \text{const}$, а $U_j(q_j)$ и $V_j(q_j)$ — по-прежнему однородные функции переменных q_j соответственно степени λ и n.

Полагая, следовательно, $\nu = 0$ и пользуясь (3.5), получаем $\theta = 1$, $n' = n - \lambda$, $\lambda' = -\lambda$, $q_j = b_j\xi_j$, и, следовательно, основные соотношения (3.6), (3.7) и (3.8) примут следующий вид:

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -(n-\lambda)h + (2+n)T'^*, \qquad \frac{d\Omega'^*}{dt} = (1-n+\lambda)h + nT'^* \tag{3.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\Omega' + \Omega'^*) = (1-2n+2\lambda)h + 2(1+n)T'^*$$

Отсюда следует, что при $n = -1$ существует квазиинтеграл, допускающий разбиение на три слагаемых, а именно: функцию Ω'^*, билинейную форму $\Omega'(\xi, \eta)$ и вековой член $(3+2\lambda)ht$:

$$\Omega'^* + (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_k\eta_k) - (3+2\lambda)ht = \text{const} \tag{3.13}$$

что является обобщением интеграла (2.5), указанного Пуанкаре [8] и переходит в последний при $\lambda = 0$.

4. Периодические движения. Вводя среднее значение кинетической энергии $\langle T'^*(t)\rangle$ на конечном интервале времени t, в результате интегрирования (3.6) и (3.7) получаем

$$\begin{aligned}\Omega'(\xi, \eta) &= (-n'h + (2+n'-\lambda')\langle T'^*(t)\rangle)t + \Omega'(0)\\ \Omega'^*(\xi, \eta) &= (1-n')h + (n'-\lambda')\langle T'^*(t)\rangle t + \Omega'^*(0)\end{aligned} \tag{4.1}$$

Отсюда следует, что если периодические движения существуют, то необходимо, чтобы

$$\operatorname{sign}(2+n'-\lambda') = \operatorname{sign}(n'h)$$

Пусть фазовая точка системы двигаясь в $2k$-мерном фазовом пространстве, совершает периодическое движение с некоторым периодом τ, так что $\Omega'(\tau) = \Omega'(0)$. Тогда среднее значение кинетической энергии $\langle T'^*(\tau)\rangle$ за время периода τ, в силу (4.1), будет равно

$$\langle T'^*(\tau)\rangle = \frac{n'h}{2+n'-\lambda'} \tag{4.2}$$

Замечая, что $\lambda' = -\lambda\theta$, $n' = (n-\lambda)\theta$, $\theta = 2/(2+\nu)$ при помощи интеграла энергии $\langle T'^*(\tau)\rangle + \langle V'(\tau)\rangle = h$, нетрудно получить вириальное соотношение вида

$$(2+\nu+\lambda)\langle T'^*(\tau)\rangle = (n-\lambda)\langle V'(\tau)\rangle \tag{4.3}$$

что является обобщением аналогичного соотношения, полученного выше для натуральных систем, и переходит в последнее при $\lambda = 0$.

Функция Ω'^* в случае периодического движения будет неоднозначной и будет изменяться за время периода τ на циклическую постоянную α', равную

$$\alpha' = \frac{2-\lambda'-n'}{2-\lambda'+n'}h\tau \qquad (\alpha' = \Omega'^*(\tau) - \Omega'^*(0)) \tag{4.4}$$

Заметим, что все результаты, полученные в пп. 3 и 4, можно распространить на более общие системы, в общем случае неинтегрируемые, чем рассмотренные системы типа Лиувилля (3.1) и (3.3).

Именно в отношении $U(q)$ достаточно лишь потребовать, чтобы она была однородной функцией переменных q_j степени λ и не обязательно представляла суперпозицию однородных функций одной и той же степени λ вида

$$U(q) = a_1 q_1^\lambda + a_2 q_2^\lambda + \ldots + a_k q_k^\lambda \qquad (a_j = \text{const})$$

как это имело место для рассмотренных выше систем типа Лиувилля.

5. Однородные системы. Так будем называть системы, у которых потенциальная энергия $V(q)$ — однородная функция переменных q_j степени n, а кинетическая энергия $T(q, \dot{q})$ имеет такую же структуру, как и у систем типа Лиувилля (3.1), если только принять, что $U(q) \equiv 1$, а $m_j(q_j)$ — однородные функции переменных q_j одной и той же степени которую обозначим через ν.

Следовательно, $T(q, \dot{q})$ и $T^*(q, p)$ будут иметь вид

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} m_j(q_j)\dot{q}_j^2, \quad T^*(q, p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j^2}{m_j(q_j)} \tag{5.1}$$

Так как обобщенный импульс $p_j = m_j(q_j)\dot{q}_j$, то

$$p_j q_j = m_j(q_j) q_j \dot{q}_j = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_j(q_j) q_j^2) - \frac{1}{2} q_j^2 \frac{d}{dt}(m_j(q_j))$$

Суммируя по j и замечая, что $m_j(q_j)$ — однородные функции переменных q_j степени ν, при помощи теоремы Эйлера об однородных функциях получаем

$$\frac{dJ}{dt} = (2+\nu)\sum_{j=1}^{k} p_j q_j \qquad \left(J = \sum_{j=1}^{k} m_j(q_j) q_j^2\right) \tag{5.2}$$

Величину J будем называть обобщенным моментом инерции системы. В частности, для свободной системы, состоящей из гравитирующих точечных масс, величина J принимает обычную форму момента инерции системы.

Дифференцируя равенство (5.2) и замечая, что $T^*(q, p)$ — однородная функция переменных q_j степени $(-\nu)$, в силу (2.1) и (2.2), получаем

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = (2+\nu)(-nh + (2+n+\nu)T^*) \tag{5.3}$$

что является обобщением известного в небесной механике уравнения Лагранжа — Якоби.

Действительно, чтобы убедиться в этом, рассмотрим свободную систему, состоящую из N-гравитирующих по произвольному степенному закону точечных масс m_i.

Здесь $m_i(q_j) = m_i = \mathrm{const}$, $\nu = 0$, q_j — декартовы координаты точки m_i ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, 3N$) и, следовательно

$$\frac{d^2J}{dt^2} = -2nh + 2(2+n)T \qquad \left(J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right) \tag{5.4}$$

Это соотношение в случае ньютонианского поля сил притяжения ($n = -1$) приводит к известному уравнению Лагранжа — Якоби [12,13].

Уравнению (5.3) иногда целесообразно придать другую форму, так чтобы вместо кинетической энергии T входила потенциальная энергия V. Воспользовавшись для этого интегралом энергии, получаем

$$\frac{d^2J}{dt^2} = (2+\nu)^2(h - mV) \qquad \left(m = \frac{2+\nu+n}{2+\nu},\ \nu \neq -2\right) \tag{5.5}$$

Теорема 5.1. Пусть консервативная система (5.1) движется в ньютонианском поле сил притяжения ($n = -1$) и пусть показатель однородности ($-\nu$) союзного выражения кинетической энергии $T^*(q, p)$ относительно переменных q_j меньше единицы ($-\nu < 1$). Тогда для гиперболических типов движения ($h > 0$) билинейная форма $\Sigma p_j q_j$ будет монотонно возрастающей функцией времени t.

Действительно, так как $n = -1$, $h > 0$ и $1 + \nu > 0$, то, в силу (5.3), имеем

$$\frac{d^2J}{dt^2} = (2+\nu)(h + (1+\nu)T) > 0$$

Следовательно, dJ / dt — функция возрастающая, а отсюда, в силу (5.2), следует, что и $\Sigma p_j q_j$ — функция возрастающая. Теорема доказана.

Следствие 5.1. Теорема 5.1 справедлива и для параболических типов движения ($h = 0$), если только допустить, что в рассматриваемой области фазового пространства нет точек покоя или точек остановки.

6. Подобные системы. К таким будем относить гамильтоновы системы, инвариантные относительно группы преобразований подобия.

Пусть однородные системы, рассмотренные в п. 5, являются подобными и допускают двухпараметрическую группу преобразований подобия вида $q_j' = \lambda q_j$, $t' = \tau t$, где λ и τ — параметры. Так как при этом кинетическая $T(q, q^\cdot)$ и потенциальная $V(q)$ энергии преобразуются согласно соотношениям

$$T'(q'q^{\cdot\prime}) = \lambda^{\nu+2}\tau^{-2}T(q, q^\cdot), \qquad V'(q') = \lambda^n V(q) \tag{6.1}$$

то между параметрами, определяющими указанное преобразование подобия, существует соотношение [14] вида

$$\lambda^{\nu+2-n}\tau^{-2} = 1 \tag{6.2}$$

а новая постоянная энергии h' связана с первоначальной постоянной энергии h соотношением $h' = \lambda^n h$.

Поскольку $J(q)$ (5.2) — однородная функция степени $(\nu+2)$ относительно переменных q_j, она будет переобразована к виду

$$J'(q') = \lambda^{\nu+2} J(q) \qquad (\nu + 2 \neq 0) \tag{6.3}$$

и, следовательно, в силу (6.1), существует инвариантное соотношение

$$V'(J')^{1-m} = VJ^{1-m} = \sigma \qquad \left(m - 1 = \frac{n}{2+\nu}\right) \tag{6.4}$$

Здесь σ — так называемая «постоянная конфигурации» [15].

В частности, для системы, состоящей из гравитирующих, в согласии с законом Ньютона точечных масс имеем $\nu = 0$, $n = -1$, $m = 1/2$ и, следовательно инвариантное соотношение (6.4) принимает вид $J'(V')^2 = JV^2 = \sigma^2$, что совпадает с известным результатом [15].

Интегрируя (5.5) при помощи инвариантного соотношения (6.4), сведем задачу нахождения $J(q)$ к одной квадратуре

$$\left(\frac{dJ}{dt^*}\right)^2 = hJ - \sigma J^m + C \qquad (t^* = \sqrt{2}\,(2+\nu)\,t) \tag{6.5}$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а t^* — приведенное время. Уравнение (6.5) можно трактовать как интеграл живых сил, при движении точки единичной массы по заданной траектории с дуговой координатой s под действием некоторой позиционной силы $f(s)$.

Действительно, написав уравнение движения $s^{\cdot\cdot} = f(s)$ и умножив обе части на $2s^{\cdot}$, в результате интегрирования находим

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s) \qquad \left(\Phi(s) = 2\int f(s)\,ds + C\right) \tag{6.6}$$

что совпадает с уравнением (6.5), если только принять

$$s = J, \quad t = t^*, \quad \Phi(s) = hs - \sigma s^m + C$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим t^* как функцию J

$$t^* = \pm \int \frac{dJ}{\sqrt{\Phi(J)}} + \text{const} \qquad (\Phi(J) = hJ - \sigma J^m + C) \tag{6.7}$$

Приведем основные результаты качественного анализа уравнения (6.5), следуя при этом известному методу Вейерштрасса [16], который дал общее качественное исследование уравнения вида (6.6).

Обозначим действительные корни уравнения $\Phi(J) = 0$ в порядке их возрастания через $J_1 < J_2 < \ldots < J_p$.

(1). Пусть начальное значение J, равное J_0, лежит правее J_p (то-есть $J_0 > J_p$), а начальное значение производной $(dJ/dt^*)_0$ больше нуля. Так как при $J \geqslant J_0$ функция $\Phi(J) > 0$ и в нуль не обращается, а $dJ/dt^* > 0$, то $J(t^*)$ — будет монотонно возрастать, изменяясь от значения J_0 до $J = +\infty$, а время $t^* = t_1{}^*$ — будет при этом конечным или бесконечным, в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$t_1{}^* = \int_{J_0}^{\infty} \frac{dJ}{\sqrt{\Phi(J)}}$$

(2). Пусть начальное значение J_0 лежит левее всех действительных корней уравнения $\Phi(J) = 0$, то-есть $J_0 < J_1$, а производная $(dJ/dt^*)_0$ по-прежнему больше нуля. Так как при $J_0 \leqslant J < J_1$ функция $\Phi(J) > 0$ и нигде, в указанном интервале, в нуль не обращается, то $dJ/dt^* > 0$ и $J(t^*)$ — будет монотонно расти, изменяясь от начального значения J_0 до некоторого конечного значения J_1, которое является наименьшим корнем уравнения $\Phi(J) = 0$. Время t^* — будет при этом также монотонно расти, оставаясь конечным, если корень $J = J_1$ простой и становясь бесконечно, большим если корень $J = J_1$ кратный.

Таким образом, в случае простого корня $J = J_1$ величина J, монотонно изменяясь от начального значения J_0, достигнет в течение конечного промежутка времени t_1^* максимального значения $J = J_1$, после чего произойдет обращение движения, так как $\Phi(J) = (J_1 - J)\Phi_1(J)$ и, следовательно, при $J = J_1$ получаем

$$(d\Phi(J) / dJ)_{J_1} = -\Phi_1(J_1) < 0 \qquad (\Phi_1(J) > 0)$$

При дальнейшем увеличении времени $t^* > t_1^*$ функция J будет монотонно убывать, и в финальном движении при $t^* \to +\infty$ получим $J \to -\infty$.

Если же корень $J = J_1$ кратный, то $t_1^* = \infty$ и J, монотонно изменяясь, будет в финальном движении неограниченно приближаться к значению J_1, как к своей верхней грани (асимптотическое движение).

(3). Пусть начальное значение $J = J_0$ находится между двумя простыми корнями уравнения $\Phi(J) = 0$, которые, не нарушая общности, обозначим через J_1 и J_2 так что $J_1 < J_0 < J_2$ и

$$\Phi(J) = (J_2 - J)(J - J_1)\Phi_1(J) \qquad (\Phi_1(J) > 0)$$

Так как при $J_1 < J < J_2$ функция $\Phi(J) > 0$, а dJ / dt^* знакопостоянно, то J — будет монотонно расти от значения J_0 до J_2, если $(dJ / dt^*)_0 > 0$ или же монотонно убывает от значения J_0 до значения J_1 если $(dJ / dt^*)_0 < 0$. В точках остановки $J = J_1$ и $J = J_2$ произойдет обращение движения, так как в этих точках производная $d\Phi / dJ$ меняет знак. Следовательно, точка J будет совершать периодическое движение, принимая наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках $J = J_2$ и $J = J_1$.

(4). Пусть $J_1 < J_0 < J_2$, а корни J_1 и J_2 — кратные. Тогда $J(t^*)$ в зависимости от знака $(dJ / dt^*)_0$ будет в финальном движении при $t \to \infty$ асимптотически приближаться к одному из корней, а именно к $J = J_2$, если $(dJ / dt^*) > 0$ и к $J = J_1$, если $(dJ / dt^*)_0 < 0$.

Укажем отдельные случаи интегрирования (6.5) в зависимости от значений параметра m (5.5). Опуская промежуточные вычисления, выпишем окончательные результаты.

1) Пусть $m = 0$; тогда в силу (5.5), (6.2) и (6.4) получаем

$$J = {}^1/_4 ht^{*2} + C_1 t^* + C_2 \qquad (2 + \nu + n = 0,\ \lambda^{2n}\tau^2 = 1)$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

2). Пусть $m = 1$. Это дает $n = 0$ и, следовательно, внешнее силовое поле отсутствует. Если при этом $\nu = 0$, то $\lambda^2\tau^{-2} = 1$ и

$$J = {}^1/_2 C_0 t^{*2} + C_1 t^* + C_2 \qquad (C_0 = {}^1/_2(h - \sigma),\ C_1,\ C_2 = \mathrm{const})$$

3). Пусть $m = 2$. Это случай соответствует однопараметрической группе преобразований геометрического подобия

$$q_j' = \lambda q_j, \quad \tau = \pm 1 \qquad (2 + \nu - n = 0,\ \lambda \neq 0)$$

Вводя значение $\Delta = h^2 + 4\sigma C$, в результате интегрирования (6.5) имеем

$$J = A \sin \sqrt{\sigma}(t^* - t_0^*) + h / 2\sigma \qquad (\sigma > 0,\ \Delta > 0,\ A = (1/2\sigma)\sqrt{\Delta})$$

$$J = A \,\mathrm{sh} \sqrt{-\sigma}(t^* - t_0^*) + h / 2\sigma \qquad (\sigma < 0,\ \Delta < 0,\ A = -(1/2\sigma)\sqrt{|\Delta|})$$

$$J = A \,\mathrm{ch} \sqrt{-\sigma}(t^* - t_0^*) + h / 2\sigma \qquad (\sigma < 0,\ \Delta > 0,\ A = -(1/2\sigma)\sqrt{\Delta})$$

Следовательно, при $\sigma > 0$ функция J остается все время ограниченной поскольку она изменяется по закону гармонических колебаний с периодом $\tau^* = 2\pi / \sqrt{\sigma}$, а при $\sigma < 0$ функция J — в финальном движении при $t \to \infty$ неограниченно растет.

Как пример рассмотрим консервативную систему с k-степенями свободы и пусть ее кинетическая T и потенциальная V энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} a_j q_j^{\nu} \dot{q}_j^{2}, \qquad V = \sum_{j=1}^{k} c_j q_j^{n}$$

Пусть для рассматриваемой системы выполняется условие преобразования геометрического подобия и, следовательно, $m = 2$, $2 + \nu - n = 0$ и $\tau = 1$. Инвариантное соотношение (6.4) принимает при этом следующий вид:

$$\frac{V}{J} = \frac{c_1 q_1^{n} + c_2 q_2^{n} + \ldots + c_k q_k^{n}}{a_1 q_1^{\nu+2} + a_2 q_2^{\nu+2} + \ldots + a_k q_k^{\nu+2}} = \sigma \qquad (\nu + 2 = n)$$

или в такой форме

$$(c_1 - a_1\sigma)\, q_1^{n} + (c_2 - a_2\sigma)\, q_2^{n} + \ldots + (c_k - a_k\sigma)\, q_k^{n} = 0$$

Отсюда в силу независимости q_j получаем

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \ldots = \frac{c_k}{a_k} = \sigma$$

Для исследования поведения функции J в зависимости от значений параметров h, ν и σ можно воспользоваться найденными выше решениями.

4) Пусть $m = {}^1/_2$ и, следовательно, в силу (6.4) и (6.2), имеем

$$2n + \nu + 2 = 0, \qquad \lambda^{-3n} = \tau^2$$

Этот случай представляет особый интерес, так как, в частности, для свободной системы, состоящей из гравитирующих, в согласии с законом Ньютона, точечных масс, имеем $\nu = 0$, $n = -1$ и, следовательно, значение параметра m равно ${}^1/_2$. Условие механического подобия при $n = -1$ принимает форму $\lambda^3 = \tau^2$, что в случае центрального движения, как известно, выражает третий закон Кеплера.

Здесь следует различать случаи $h < 0$, $h = 0$ и $h > 0$.

а) Пусть движение будет эллиптического типа ($h < 0$), а постоянная конфигурации $\sigma < 0$.

Сделав подстановку $\sigma / 2h - \sqrt{J} = k \cos E$ и вводя обозначения $\sigma_1 = -\sigma > 0$, $h_1 = -h > 0$, в результате интегрирования (6.5) получим уравнение Кеплера для эллиптических орбит

$$E - e \sin E = M \qquad \left(e = \frac{2hk}{\sigma},\ k^2 = \frac{\sigma^2 - 4hC}{4h^2} > 0,\ M = \frac{h_1^{3/2}}{\sigma_1}(t^* - t_0^*)\right) \tag{6.8}$$

Здесь E — эксцентрическая аномалия, M — средняя аномалия, e — эксцентриситет, а период $\tau^* = 2\pi\sigma_1 / h_1^{3/2}$ — зависит от постоянной энергии h и постоянной конфигурации σ.

В случае параболического типа движения ($h = 0$) имеем

$$u(u^2 - 3C) = {}^3/_4\,\sigma^2(t^* - t_0^*) \qquad (u^2 = C - \sigma\sqrt{J}) \tag{6.9}$$

в) Пусть движение будет гиперболического типа ($h > 0$), а постоянная конфигурация $\sigma > 0$.

Сделав подстановку $\sigma / 2h - \sqrt{J} = k\operatorname{ch} s$, в результате интегрирования (6.5) получим уравнение Кеплера для гиперболических орбит

$$e\operatorname{sh} s - s = M \qquad \left(e = \frac{2hk}{\sigma},\ k^2 = \frac{\sigma^2 - 4hC}{4h^2} > 0,\ M = \frac{h^{3/2}}{\sigma}(t^* - t_0^*)\right) \tag{6.10}$$

Применим полученные соотношения к задаче двух тел. Переходя, как обычно, к задаче центрального движения точки с приведенной массой μ в ньютонианском поле с потенциалом $V(r) = -A / r$, выпишем функцию Лагранжа

$$L = \frac{\mu}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + \frac{A}{r} \qquad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

Для рассматриваемого случая имеем $\nu = 0$, $n = -1$, $m = {}^1/_2$, $J = \mu r^2$ а постоянная конфигурации σ, в силу инвариантности (6.4), будет равна $\sigma = V\sqrt{J} = -A\sqrt{\mu}$ и, следовательно, в случае притягивающего центра $A > 0$ и $\sigma < 0$, а в случае отталкивающего центра $A < 0$ и $\sigma > 0$.

Обращаясь к (6.5) и замечая, что $\nu = 0$, $t^* = 2\sqrt{2}t$ и $dJ / dt = 2\mu r\, dr / dt$ после некоторых упрощений получим

$$dr / dt = (2 / \mu\,(h + A / r - \mu c^2 / 2r^2))^{1/2} \qquad (C = -{}^1/_2\mu^2 c^2)$$

что совпадает с известным решением [10].

В частности, для случая $h < 0$ и $\sigma < 0$ было получено

$$\sqrt{J} = \sigma / 2h - k\cos E = \sigma / 2h\,(1 - e\cos E)$$

Подставляя сюда значения $J = \mu r^2$, $\sigma = -A\sqrt{\mu}$ и пользуясь выражением для большой полуоси эллипса $a = -A / 2h$, получим хорошо известную из теории эллиптических орбит формулу $r = a(1 - e\cos E)$.

5). Пусть $m = 3$, тогда $4 + 2\nu - n = 0$, $\lambda^{-n} = \tau^4$ и в результате интегрирования (6.5) находим:

для эллиптического типа движения ($h < 0$) при $\sigma < 0$ и $C < 0$

$$J = \wp({}^1/_2\sqrt{-\sigma}\,t^* + \alpha) \qquad (g_2 = 4h/\sigma,\ g_3 = 4C/\sigma)$$

для гиперболического типа движения ($h > 0$) при $\sigma > 0$ и $C < 0$

$$J = -\wp({}^1/_2\sqrt{\sigma}\,t^* + \alpha) \qquad (g_2 = 4h/\sigma,\ g_3 = -4C/\sigma)$$

Здесь $\wp(t^*;\ g_2,\ g_3)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, g_2 и g_3 — ее инварианты, а α — постоянная интегрирования.

6). Пусть $m = {}^1/_3$; тогда $4 + 2\nu + 3n = 0$, $\lambda^{-5n} = \tau^4$ и в результате интегрирования (6.5) находим:

для эллиптического типа движения ($h_1 = -h > 0$) при $\sigma < 0$ и $C < 0$

$$t^* - t_0^* = \frac{2}{h_1}(h_1 z^3 + \sigma z + C)^{1/2} - \frac{2\sigma}{h_1^{3/2}}\,u(z) \qquad \left(J = -z^3;\ g_2 = \frac{4\sigma}{h},\ g_3 = \frac{4C}{h}\right)$$

для гиперболического типа движения ($h > 0$) при $\sigma > 0$ и $C < 0$

$$t^* - t_0^* = \frac{2}{h}(hz^3 - \sigma z + C)^{1/2} + \frac{2\sigma}{h^{3/2}}\,u(z) \qquad \left(J = z^3;\ g_2 = \frac{4\sigma}{h},\ g_3 = -\frac{4C}{h}\right)$$

Здесь $u(z)$ — эллиптический интеграл, обращением которого будет функция Вейерштрасса $z = \wp(u)$.

В тех случаях, когда постоянная $C > 0$, можно воспользоваться формулой однородности для функций Вейерштрасса [17]

$$\wp(u;\ g_2,\ g_3) = \mu^2 \wp(\mu u;\ g_2/\mu^4,\ g_3/\mu^6)$$

Полагая, следовательно, $\mu = i$ $(i = \sqrt{-1})$, получаем

$$\wp(u;\ g_2, g_3) = -\wp(iu;\ g_2,\ -g_3)$$

Заметим, что при значениях параметра

$$m = 4\ (6 + 3\nu - n = 0,\ \lambda^{-n} = \tau^3), \qquad m = {}^1/_4\,(6 + 3\nu + 4n = 0,\ \lambda^{-7n} = \tau^6)$$

интегрирование (6.5) также может быть выполнено в эллиптических функциях.

7. Стационарные точки. Стационарные значения функции J будут, в силу (6.5), корнями уравнения

$$hJ - \sigma J^m + C = 0 \tag{7.1}$$

Обозначая соответствующие значения через J_i и пользуясь (6.5) и (6.4), находим

$$\left(\frac{d^2J}{dt^{*2}}\right)_{J=J_i} = \frac{h(1-m)J_i - mC}{2J_i} \tag{7.2}$$

Отсюда следует, что в стационарных точках, где $J_i \neq 0$, функция J принимает значение минимума или максимума в зависимости от того, какое выполняется условие

$$h(1-m)J_i - mC > 0 \text{ или } h(1-m)J_i - mC < 0.$$

При выполнении условия $h(1-m)J_i - mC = 0$ имеет место случай вырожденной стационарной точки.

8. Стационарные системы. Следуя терминологии, принятой в динамике звездных систем [18,19], будем называть систему статистически стационарной, когда ее обобщенный момент инерции $J(q)$ сохраняет постоянное значение и квазистационарной, когда $J(q)$ изменяется с постоянной скоростью $dJ/dt = a$. В последнем случае J будет линейной функцией t, т. е. $J = at + b$.

Теорема 8.1. Пусть для систем (5.1) союзное выражение кинетической энергии $T^*(q, p)$ является однородной функцией переменных q_j степени $(-\nu)$, причем $2 + \nu \neq 0$, а потенциальная энергия $V(q)$ — однородная функция переменных q_j степени n.

Тогда, если система статистически стационарна или квазистационарна, то между кинетической T и потенциональной V энергиями существует вириальное соотношение вида

$$(2 + \nu)\,T = nV \tag{8.1}$$

Этот результат следует непосредственно из (5.3), если при этом воспользоваться интегралом энергии.

В частности, при $\nu = 0$ получаем хорошо известную теорему о вириале [10].

Следствие 8.1. Пусть выполняются условия теоремы 8.1. Тогда необходимым и достаточным условием стационарности или квазистационарности является существование интеграла

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_kq_k = A \qquad (A = \text{const})$$

Действительно, как это следует из (5.2), если $A = 0$, то $J = \text{const}$ и система стационарна, если же $A \neq 0$, то $J = at + b$ $(a = (2 + \nu) A)$ и система — квазистационарна.

Автор благодарит Г. Н. Дубошина за внимание к работе.

Поступила 12 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Lagrange J. L. Essai sur le problème des trois corps. Oeuvres de Lagrange, Paris, 1873, t. 6, p. 229—331.
2. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über dynamik. Berlin, 1884. (Рус. пер.: Якоби К. Лекции по динамике, Л.— М., ОНТИ, 1936, стр. 25—28).
3. Chazy J. Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment. Annales École normale sup., S. 3, 1922, t. 39, p. 29—130.
4. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème de trois corps. J. Math. Pure et Appl., 1929, t. 8, p. 353—380.
5. Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 50—64.
6. Хильми Г. Ф. Качественные методы в проблеме n тел. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 8—21.
7. Синдж Дж. Л. Тензорные методы в динамике. М., Изд-во иностр. лит., 1947, стр. 13.
8. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., «Наука», 1965, стр. 26—28.
9. Wintner A. The analitical foundations of celestial mechanics. London Univ. press., 1941. (Рус. пер.: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967, стр. 141.)
10. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1, Механика. М., Физматгиз, 1958, стр. 35, 45.
11. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937, стр. 82—84.
12. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963, стр. 99—102.
13. Smart W. M. Celestial mechanics. London, N. J., 1953. (Рус. пер.: Смарт У. М. Небесная механика. М., «Мир», 1965, стр. 73, 74).
14. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. М., «Высшая школа», 1964, стр. 123.
15. Macmillan W. D. Dynamics of rigid bodies. N. Y.— London, 1936. (Рус. пер.: Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. М., Изд-во иностр. лит., 1951, стр. 85.)
16. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М., Изд-во иностр. лит., 1951, т. 2, часть 1, стр. 27—35.
17. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. М.— Л., Гостехтеориздат, 1934, ч. 2, стр. 270.
18. Chandrasekhar S. Principles of stellar dynamics, 1942. (Рус. пер.: Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. Изд-во иностр. лит., 1948, стр. 206).
19. Огородников К. Ф. Динамика звездных систем. М., Физматгиз, 1958, стр. 317, 318.