Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

К. А. Абгарян

(Москва)

Строится семейство необходимых и достаточных условий устойчивости и неустойчивости движения на конечном промежутке времени при некотором обобщении предложенной Г. В. Каменковым постановки задачи об устойчивости на конечном промежутке времени.

1. Рассматривая механические системы, возмущенное движение которых описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t;\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где X_i — известные вещественные функции вещественных переменных, обращающиеся в нуль при $x_i = 0$ ($i = 1,\ldots, n$) и разложимые в ряды по целым неотрицательным степеням x_i в окрестности начала координат ($x_i = 0$), Г. В. Каменков ввел следующее определение устойчивости движения на конечном промежутке времени [1].

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.1) таковы, что при достаточно малом положительном A величины x_s, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n)^2 \leqslant A \tag{1.2}$$

на конечном промежутке времени $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$, если только начальные значения этих функций x_{i0} удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_{10} + \cdots + a_{sn}x_{n0})^2 \leqslant A \qquad (\det(a_{ij}) \neq 0) \tag{1.3}$$

то невозмущенное движение будет устойчиво на промежутке времени Δt; в противном случае — неустойчиво, т. е. $\Delta t = 0$.

На основе приведенного определения Г. В. Каменковым получены условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения по первому приближению. В соответствии с этими условиями задача об устойчивости движения в некритических случаях решается знаками вещественных частей корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в начальный момент t_0.

А. А. Лебедев [2,3] вместо неизменной области предельных отклонений (1.2) посредством знакоопределенной функции V (t; $x_1, \ldots, x_n$), зависящей явно от времени ввел изменяемую область

$$V(t;\ x_1, \ldots, x_n) \leqslant A \tag{1.4}$$

и получил достаточные условия устойчивости, которые уже учитывают характер изменения коэффициентов уравнений возмущенного движения по времени t. При этом, однако вводится жесткое ограничение на диаметр области — верхнюю грань расстояний между любыми двумя точками области, в то время как в выборе остальных размеров области оставляется широкий произвол.

Ниже выводятся необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости движения в следующей постановке.

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое решение $x(t)$ уравнений, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяют условию

$$(G(t_0)x_0,\ G(t_0)x_0) \leqslant \rho \tag{1.5}$$

на некотором конечном промежутке $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$ удовлетворяет условию

$$(G(t)x,\ G(t)x) \leqslant \rho \tag{1.6}$$

где $G(t)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.6) устойчиво на промежутке $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$; в противном случае — неустойчиво, т. е. $\Delta t = 0$.

Область предельных отклонений x_s $(s = 1,\ldots, n)$ — элементов столбцовой матрицы x — здесь задается посредством неотрицательной функции

$$V(t,\ x) \equiv (G(t)x,\ G(t)x)$$

Устойчивость движения по отношению к области (1.6) назовем равномерной на промежутке $[t_1,\ t_2)$, если невозмущенное движение устойчиво при всех $t_0 \in [t_1,\ t_2)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения в векторно-матричной записи представлены в виде

$$dx \mathbin{/} dt = U(t)x + H(t, x) \tag{2.1}$$

где U — квадратная матрица порядка n, а x и H — столбцовые матрицы. Элементы матрицы H — нелинейные функции отклонений x_s — таковы, что равномерно по t в пределах некоторого промежутка $[t_0,\ T]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{H(t,\ x)}{\|x\|} = 0 \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что матрица U дифференцируема по t и имеет простую структуру. Тогда существует невырожденная и дифференцируемая матрица K, преобразующая матрицу U к диагональному виду

$$K^{-1}(t)\,U(t)\,K(t) = \Lambda(t) \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1(t),\ldots,\ \lambda_n(t)) \tag{2.3}$$

Диагональные элементы матрицы Λ будут собственными числами матрицы U, а столбцы матрицы K — ее собственными векторами.

Считая, что столбцы K_σ $(\sigma = 1,\ldots, n)$ матрицы K нормированы, например, для определенности, их эвклидова норма равна единице и полагая

$$V(t,\ x) \equiv (K^{-1}(t)x,\ K^{-1}(t)x) \tag{2.4}$$

область предельных отклонений определим так:

$$(K^{-1}(t)\,x,\ K^{-1}(t)\,x) \leqslant \rho \tag{2.5}$$

Геометрически область (2.5) представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(K^{-1}(t)\,x,\ K^{-1}(t)x) = \rho \tag{2.6}$$

Каждый из $2n$ лучей

$$x = \pm K_\sigma(t)\,s \qquad (\sigma = 1, \ldots, n;\ 0 < s < \infty)$$

пересекает поверхность (2.6) один раз при значении параметра $s = \sqrt{\rho}$. Точки пересечения находятся от начала координат ($x = 0$) на неизменном расстоянии $\sqrt{\rho}$. Действительно

$$(K^{-1}(t)\,K_\sigma(t)\sqrt{\rho},\ K^{-1}(t)\,K_\sigma(t)\sqrt{\rho}) = \rho \sum_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma}^2 = \rho \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}\right)$$

$$\| K_\sigma(t)\sqrt{\rho} \| = \| K_\sigma(t) \| \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho}$$

Выясним условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения по отношению к области (2.5). Полагая

$$x = K(t)\,y \tag{2.7}$$

будем иметь

$$V(t,\ x) = (y,\ y) = \| y \|^2 \tag{2.8}$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dt} = 2\|y\|\frac{d\|y\|}{dt} \tag{2.9}$$

В новых переменных уравнения возмущенного движения принимают вид

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y - K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt}\,y + K^{-1}(t)\,H(t,\ Ky) \tag{2.10}$$

Из (2.10) находим

$$\frac{d\|y\|}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_\sigma \frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|} + \frac{y^*Py}{\|y\|} + \frac{1}{2\|y\|}(y^*K^{-1}H + H^*K^{*-1}y) \tag{2.11}$$

Здесь

$$P = -\frac{1}{2}\left(K^{-1}\frac{dK}{dt} + \frac{dK^*}{dt}K^{*-1}\right)$$

а y_σ ($\sigma = 1, \ldots, n$) — элементы столбцовой матрицы y.

В соответствии с выражениями (2.9) и (2.11) производная от определенно положительной функции (2.4) по t, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, равна

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_\sigma |y_\sigma|^2 + y^*Py + \frac{1}{2}(y^*K^{-1}H + H^*K^{*-1}y) \tag{2.12}$$

Положим

$$\mu(t) = \max_\sigma (\operatorname{Re} \lambda_\sigma(t))$$

Через $\nu_{\min}(t)$ и $\nu_{\max}(t)$ обозначим соответственно минимальное и максимальное собственные числа эрмитовой матрицы P.

Как известно

$$\nu_{\min} \|y\|^2 \leqslant y^* P y \leqslant \nu_{\max} \|y\|^2 \tag{2.13}$$

Теорема 2.1. Если

$$\mu(t_0) + \nu_{\max}(t_0) < 0 \tag{2.14}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) обладает устойчивостью на конечном промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Доказательство. Равномерно по t на сегменте $[0, T]$

$$\frac{H(t, Ky)}{\|y\|} \to 0 \quad \text{при } y \to 0 \tag{2.15}$$

Действительно

$$\frac{H(t, Ky)}{\|y\|} = \frac{H(t, x)\|K\|}{\|K\|\|y\|} \leqslant \frac{H(t, x)}{\|x\|}\|K\| \to 0 \quad \text{при } y \to 0$$

в силу условия (2.2), учитывая, что $\|K\|$ ограниченная величина, а

$$\|x\| \leqslant \|K\|\,\|y\| \to 0 \quad \text{при } y \to 0$$

Принимая во внимание (2.13) и (2.15), из (2.12) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} \leqslant (\mu(t) + \nu_{\max}(t))\|y\|^2 + o(\|y\|^2)$$

Отсюда видно, что если имеет место неравенство (2.14), то при достаточно малых $\|y\|$ в точке $t = t_0$, а по непрерывности и в пределах некоторого конечного промежутка $[t_0, t_0 + \Delta t] \subset [t_0, T]$, $dV / dt < 0$, что доказывает теорему.

Теорема 2.2 Если

$$\mu(t_0) + \nu_{\min}(t_0) > 0 \tag{2.16}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) не обладает устойчивостью на конечном промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, т. е. $\Delta t = 0$.

Доказательство. Проинтегрируем (2.11). Получим

$$\|y(t)\| = \|y(t_0)\| \exp \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re} \lambda_\sigma \frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|^2} + \frac{y^* P y}{\|y\|^2} + O(\|y\|)\right] dt \tag{2.17}$$

Если

$$\varphi(t, y) \equiv \sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re} \lambda_\sigma \frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|^2} + \frac{y^* P y}{\|y\|^2} \neq 0$$

то при достаточно малых $\|y\|$ знак подынтегральной функции совпадает со знаком функции $\varphi(t, y)$.

Допустим, что

$$\mu(t_0) = \operatorname{Re} \lambda_s(t_0)$$

Рассмотрим частное решение уравнения (2.1) $x^\circ = K(t)\, y^\circ$, определенное начальными условиями

$$y_s(t_0) = \sqrt{\rho}, \quad y_\sigma(t_0) = 0 \qquad (\sigma \neq s) \tag{2.18}$$

Согласно (2.13), (2.16) и (2.18)

$$\varphi(t_0, y^\circ(t_0)) \geqslant \mu(t_0) + \nu_{\min}(t_0) > 0$$

Поэтому в точке t_0 при достаточно малых ρ подынтегральная функция в равенстве (2.17) положительна. По непрерывности она положительна и в некоторой окрестности этой точки. Значит в этой окрестности

$$\frac{dV(t, x^\circ)}{dt} = 2\| y^\circ \| \frac{d\| y^\circ \|}{dt} > 0$$

Таким образом, если справедливо неравенство (2.16), то имеются частные решения, вдоль которых в окрестности точки t_0

$$V(t, x(t)) > V(t_0, x(t_0)) \qquad (t > t_0)$$

и значит, условие (1.6) не выполняется. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Если

$$\mu(t_0) + \nu_{\min}(t_0) \leqslant 0 \leqslant \mu(t_0) + \nu_{\max}(t_0) \tag{2.19}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) может не обладать устойчивостью на конечном промежутке времени.

Доказательство. Соотношения (2.19) и (2.13) допускают существование частного решения $x^\circ = Ky^\circ$, удовлетворяющего равенствам

$$\varphi(t_0, y^\circ(t_0)) = 0, \qquad \| y^\circ(t_0) \| = \sqrt{\rho}$$

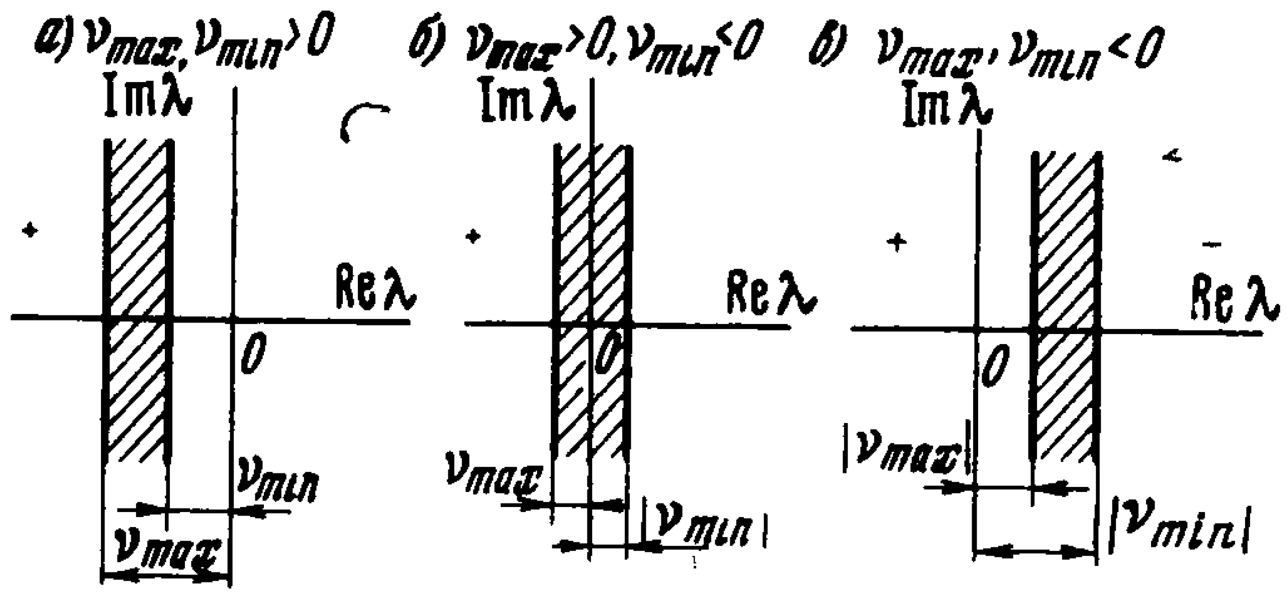
Для этого решения знак подынтегральной функции в равенстве (2.17) определяется знаком $O(\| y^\circ \|)$, так что в зависимости от свойств нелинейных членов при $t = t_0$, а по непрерывности и в пределах некоторой окрестности точки t_0 подынтегральная функция может быть и положительной величиной. Тогда в этой окрестности $dV(t, x^\circ)/dt > 0$, и значит, неравенство (1.6) не будет выполняться.

Следовательно

$$\begin{aligned} &\mu(t_0) + \nu_{\max}(t_0) < 0 \text{ — достаточное условие устойчивости} \\ &\mu(t_0) + \nu_{\min}(t_0) \leqslant 0 \text{ — необходимое условие устойчивости} \\ &\mu(t_0) + \nu_{\min}(t_0) > 0 \text{ — достаточное условие неустойчивости} \\ &\mu(t_0) + \nu_{\max}(t_0) \geqslant 0 \text{ — необходимое условие неустойчивости} \end{aligned} \tag{2.20}$$

В частном случае, когда $U = \mathrm{const}$, то $\nu_{\max,\min} = 0$, так как K -const и $P = 0$, и условия (2.20) совпадают с соответствующими условиями устойчивости и неустойчивости, полученными Г. В. Каменковым.

В общем случае расположение областей устойчивости и неустойчивости в плоскости собственного числа λ, в зависимости от знаков чисел $\nu_{\max}$ и $\nu_{\min}$, представлено на фиг. 1 (области устойчивости отмечены знаком плюс, а неустойчивости — знаком минус). Как видно, движение может быть устойчивым и при наличии среди собственных чисел матрицы U чисел с положительными вещественными частями (фиг. 1, *в*); и наоборот, невозмущенное движение может оказаться неустойчивым даже тогда, когда вещественные части всех собственных чисел отрицательны (фиг. 1, *а*).



Фиг. 1

Условия (2.20) не решают задачи об устойчивости, если

$$-\nu_{\min} \geqslant \mu \geqslant -\nu_{\max} \qquad (2.21)$$

На фиг. 1, *а*, *б*, *в* соответствующие полосы выделены штриховкой.

В следующем пункте указывается способ построения семейства условий, подобных (2.20), при помощи которого «полоса неопределенности» (2.21) может быть существенно сокращена, особенно в тех случаях, когда коэффициенты уравнений первого приближения будут медленно меняющимися функциями от t.

3. Вместо (2.1) рассмотрим уравнение более общего вида

$$dx \,/\, dt = U(\tau)\, x + H(t,\ x) \qquad (3.1)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — так называемое «медленное время», а ε — некоторый вещественный параметр. Когда $\varepsilon = 1$, уравнения (2.1) и (3.1) совпадают.

Невырожденным преобразованием

$$x = K^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)\, y \qquad (3.2)$$

уравнение (3.1) приведем к виду

$$dy \,/\, dt = \Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, y - K^{(m)-1}(\tau, \varepsilon)\, N^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, y + K^{(m)-1}(\tau, \varepsilon)\, H(t, K^{(m)} y) \qquad (3.3)$$

где

$$N^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\, dK^{(m)}(\tau, \varepsilon)/d\tau - U(\tau)\, K^{(m)}(\tau, \varepsilon) + K^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, \Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon) \qquad (3.4)$$

Допустим, что $U(\tau)$ на сегменте $[0, L]$ будет l раз дифференцируемой матрицей. Тогда, используя алгоритм, приведенный в [4], можно построить такое преобразование (3.2), что матрица $\Lambda^{(m)}$ будет иметь диагональную или, по крайней мере, квазидиагональную структуру, а матрица $N^{(m)}$ будет удовлетворять условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N^{(m)}(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon^m} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, l-1) \qquad (3.5)$$

Ниже ограничимся случаем, когда U имеет на $[0,\ L]$ только простые собственные числа. При этом матрицы $K^{(m)}$ и $\Lambda^{(m)}$ можно построить в форме конечных сумм

$$K^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k K^{[k]}(\tau), \qquad \Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \Lambda^{[k]}(\tau) \qquad (3.6)$$

$$K^{[k]} = (K_1^{[k]} \cdots K_n^{[k]}), \qquad \Lambda^{[k]} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{[k]} \cdots \lambda_n^{[k]}) \qquad (3.7)$$

Здесь $K_\sigma{}^{[k]}$ — столбцовые матрицы, а $\lambda_\sigma{}^{[k]}$ — скалярные функции.

Пусть $K^{[k]}$ и $\Lambda^{[k]}$ $(k = 0, 1,\ldots, m)$ таковы, что

$$UK^{[0]} = K^{[0]}\Lambda^{[0]} \tag{3.8}$$

$$UK^{[k]} = K^{[k]}\Lambda^{[0]} + K^{[0]}\Lambda^{[k]} + D^{[k-1]} \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{3.9}$$

где

$$D^{[k-1]} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} K^{[k-\alpha]}\Lambda^{[\alpha]} + \frac{dK^{[k-1]}}{d\tau} \tag{3.10}$$

Тогда, как легко проверить,

$$N^{(m)} = \varepsilon^{m+1} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha=\nu}^{m} \varepsilon^{\nu-1} K^{[m-\alpha+\nu]}\Lambda^{[\alpha]} \tag{3.11}$$

и при условии ограниченности $K^{[j]}$, $\Lambda^{[j]}$ $(j = 1,\ldots, m)$ требование (3.5) будет соблюдаться.

Равенство (3.8) удовлетворяется тождественно, если

$$K_\sigma^{[0]} \equiv K_\sigma, \quad \lambda_\sigma^{[0]} \equiv \lambda_\sigma \qquad (\sigma=1,\ldots,n) \tag{3.12}$$

Как и в предыдущем параграфе, далее будем считать, что эвклидова норма собственных векторов K_σ равна единице. В силу (3.7) и (3.10)

$$D^{[k-1]} = (D_1^{[k-1]} \ldots D_n^{[k-1]}), \qquad D_\sigma^{[k-1]} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]}\lambda_\sigma^{[\alpha]} + \frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{d\tau} \tag{3.13}$$

Каждое из равенств (3.9) распадается на n независимых матричных соотношений

$$UK_\sigma^{[k]} = K_\sigma^{[k]}\lambda_\sigma + K_\sigma\lambda_\sigma^{[k]} + D_\sigma^{[k-1]} \qquad (\sigma=1,\ldots,n) \tag{3.14}$$

Общее решение уравнений (3.14) имеет вид

$$K_\sigma^{[k]} = P_\sigma D_\sigma^{[k-1]} + K_\sigma q_\sigma^{[k]}, \quad \lambda_\sigma^{[k]} = -M_\sigma D_\sigma^{[k-1]} \qquad (\sigma=1,\ldots,n)$$

$$P_\sigma = \sum_{s\neq\sigma} \frac{K_s M_s}{\lambda_s - \lambda_\sigma} \tag{3.15}$$

Здесь M_s $(s = 1,\ldots, n)$ — строки матрицы $M \equiv K^{-1}$, а $q_\sigma^{[k]}(\sigma = 1, \ldots, n)$ — произвольные, ограниченные скалярные функции от τ. Этот произвол должен быть ограничен условием существования производных по τ до $m - k + 1$-го порядка включительно.

Матрица $D_\sigma^{[k-1]}$ не зависит от $K_\sigma^{[r]}$, $\Lambda_\sigma^{[r]}$ $(r \geqslant k)$, поэтому при расчете $K_\sigma^{[k]}$ и $\Lambda^{[k]}{}_\sigma$ эта матрица предполагается уже известной.

Формулы (3.15) будут рекуррентными. С их помощью могут быть последовательно определены все члены конечных сумм (3.6).

Произвол, который имеется при построении $K^{(m)}$ и $\Lambda^{(m)}$, используем для нормализации столбцов матрицы $K^{(m)}$. Так как

$$K_\sigma^{(m)} = K_\sigma + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}$$

то квадрат нормы столбца $K_\sigma^{(m)}$ матрицы $K^{(m)}$ равен

$$\| K_\sigma^{(m)} \|^2 = K_\sigma^* K_\sigma + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=0}^{k} \varepsilon^k K_\sigma^{[k-\alpha]*} K_\sigma^{[\alpha]} + \varepsilon^{[m+1]} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=k}^{m} \varepsilon^{k-1} K_\sigma^{[m-\alpha+k]*} K_\sigma^{[\alpha]} \tag{3.16}$$

Произвольные функции $q_\sigma^{(k)}$ $(k = 1,\ldots, m)$ можно выбрать так, что первая двойная сумма в равенстве (3.16) обратится в нуль.

Действительно

$$\sum_{\alpha=0}^{k} K_\sigma^{[k-\alpha]*} K_\sigma^{[\alpha]} = K_\sigma^{[k]*} K_\sigma + K_\sigma^* K_\sigma^{[k]} + \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]*} K_\sigma^{[\alpha]} =$$

$$= q_\sigma^{[k]*} + q_\sigma^{[k]} + D_\sigma^{[k-1]*} P_\sigma^* K_\sigma + K_\sigma^* P_\sigma D_\sigma^{[k-1]} + \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]*} K_\sigma^{[\alpha]} = 0$$

если, например

$$q_\sigma^{[k]} = - K_\sigma^* P_\sigma D_\sigma^{[k-1]} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]*} K_\sigma^{[\alpha]}$$

При таком выборе $q_\sigma^{[k]}$ $(k = 1,\ldots, m)$ норма столбцов матрицы $K^{(m)}$ с точностью до величин порядка ε^{m+1} будет равна единице.

Переходя к установлению условий устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (3.1), определим область предельных отклонений соотношением

$$(K^{(m)-1} (\tau, \varepsilon)\, x,\ K^{(m)-1} (\tau, \varepsilon)\, x) \leqslant \rho \tag{3.17}$$

Геометрически область (3.17) представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(K^{(m)-1} (\tau, \varepsilon)\, x,\ K^{(m)-1} (\tau, \varepsilon)\, x) = \rho \tag{3.18}$$

Каждый из $2n$ лучей

$$x = \pm K_\sigma^{(m)} (\tau, \varepsilon)\, s \qquad (\sigma = 1, \ldots, n;\ 0 < s < \infty)$$

пересекает поверхность (3.18) один раз при значении $s = \sqrt{\rho}$. С точностью до величин порядка ε^{m+1} точки пересечения находятся от начала координат $(x = 0)$ на неизменном расстоянии $\sqrt{\rho}$.

Условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (3.1) по отношению к области (3.17) определяются следующими теоремами, доказательство которых вполне аналогично доказательству теорем 2.1—2.3. Пусть

$$\mu^{(m)} (\tau, \varepsilon) = \max\nolimits_\sigma (\operatorname{Re} \lambda_\sigma^{(m)} (\tau, \varepsilon)) \tag{3.19}$$

где

$$\lambda_\sigma^{(m)} (\tau, \varepsilon) = \lambda_\sigma (\tau) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \lambda_\sigma^{[k]} (\tau) \qquad (\sigma = 1, \ldots, n)$$

— диагональные элементы диагональной матрицы $\Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon)$;

$$\nu_{\min}^{(m)}(\tau, \varepsilon); \quad \nu_{\max}^{(m)}(\tau, \varepsilon)$$

— соответственно минимальное и максимальное собственные числа эрмитовой матрицы

$$P^{(m)} = -[K^{(m)^{-1}}N^{(m)} + (K^{(m)^{-1}}N^{(m)})^*]/\,2\varepsilon^{m+1}$$

В силу равенства (3.11) матрица $P^{(m)}$ регулярна относительно ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Теорема 3.1. Если

$$\mu^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\nu_{\max}^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) < 0 \qquad (\tau_0 = \varepsilon t_0 \in [0, L])$$

то тривиальное решение уравнения (3.1) обладает устойчивостью на конечном промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Теорема 3.2. Если

$$\mu^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\nu_{\min}^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) > 0 \qquad (\tau_0 = \varepsilon t_0 \in [0, L])$$

то тривиальное решение уравнения (3.1) не обладает устойчивостью на конечном промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$, т. е. $\Delta t = 0$.

Теорема 3.3 Если

$$\mu^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\nu_{\min}^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \mu^{(m)}(\tau_0, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\nu_{\max}^{(m)}(\tau_0, \varepsilon)$$
$$(\tau_0 = \varepsilon t_0 \in [0, L])$$

то тривиальное решение уравнения (3.1) может не обладать устойчивостью на конечном промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

4. Применяя результаты п. 3 к уравнению (2.1), получим следующие условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения:

$$\begin{aligned}
&\mu^{(m)}(t_0) + \nu_{\max}^{(m)}(t_0) < 0 \text{ — достаточное условие устойчивости}\\
&\mu^{(m)}(t_0) + \nu_{\min}^{(m)}(t_0) \leqslant 0 \text{ — необходимое условие устойчивости}\\
&\mu^{(m)}(t_0) + \nu_{\min}^{(m)}(t_0) > 0 \text{ — достаточное условие неустойчивости}\\
&\mu^{(m)}(t_0) + \nu_{\max}^{(m)}(t_0) \geqslant 0 \text{ — необходимое условие неустойчивости}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь

$$\mu^{(m)}(t) = \mu^{(m)}(\tau, \varepsilon)|_{\varepsilon=1}, \qquad \nu_{\min, \max}^{(m)}(t) = \nu_{\min, \max}^{(m)}(\tau, \varepsilon)|_{\varepsilon=1} \tag{4.2}$$

Неравенства (4.1) представляют целое семейство необходимых и достаточных условий, соответствующих числам $m = 0, 1, 2, \ldots, l - 1$. Каждому m отвечает своя «полоса неопределенности»

$$-\nu_{\min}^{(m)} \geqslant \mu^{(m)} \geqslant -\nu_{\max}^{(m)} \tag{4.3}$$

При $m = 0$ условия (4.1) в точности совпадают с простейшими условиями (2.20), а полоса (4.3) совпадает с полосой (2.21).

Беря последовательно $m = 1, 2, \ldots$, можно ожидать существенного сокращения ширины полосы неопределенности. Расчеты, проведенные для некоторых реальных объектов, показали, что уже при $m = 1$ числа $\nu_{\min}^{(1)}$ и $\nu_{\max}^{(1)}$ весьма малы (порядка 10^{-2}, 10^{-3}) и полоса неопределенности практически стягивается в линию. Поэтому, вероятно, во многих случаях можно ограничиться условиями (4.1) при $m = 1$.

Случай, когда $\nu_{\min,\,\max}^{(m)} = 0$ и $\mu^{(m)} = 0$, назовем «критическим», так как при этом задача об устойчивости не может быть решена по первому приближению.

Случай, когда $\mu^{(m)}$ удовлетворяет (4.3) и $|\nu_{\min}^{(m)}| + |\mu_{\max}^{(m)}| \neq 0$, можно было бы назвать «условно критическим», учитывая, что при этом не исключена возможность решения задачи по первому приближению.

5. Для приложений представляют интерес оценки промежутка времени Δt, на котором невозмущенное движение устойчиво.

Пусть

$$\begin{gathered}\mu^{(m)}(t) + \nu_{\max}^{(m)}(t) < 0 \qquad (t \in [t_0, t_1] \subset [t_0, T], [t_0, L]) \\ \mu^{(m)}(t_1) + \nu_{\max}^{(m)}(t_1) = 0\end{gathered} \tag{5.1}$$

Тогда промежуток Δt можно оценить неравенством

$$\Delta t < t_1 - t_0 \tag{5.2}$$

Замечание. Ясно, что на любом конечном промежутке $[t', t'') \subset [t_0, t_1]$, где t_1 удовлетворяет условиям (5.1), невозмущенное движение равномерно устойчиво.

Более точно промежуток Δt можно оценить неравенством (5.2) при значении t_1, определенного условиями

$$\int_{t_0}^{t} (\mu^{(m)}(t') + \nu_{\max}^{(m)}(t'))\,dt' < 0 \quad (t \in [t_0, t_1) \subset [t_0, T], \ [t_0, L])$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mu^{(m)}(t') + \nu_{\max}^{(m)}(t'))\,dt' = 0$$

Поступила 13 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
2. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
3. Лебедев А. А. О применении метода «замороженных коэффициентов» для исследования устойчивости неустановившегося движения. Изв. вузов, Авиационная техника, 1958, № 1.
4. Абгарян К. А. Асимптотическое расщепление уравнений линейной системы автоматического управления. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 2.