Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИГРОВОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье рассматривается задача [1–6] об управлении u, которое обеспечивает сближение преследующего движения $y\,[t]$ с преследуемым движением $z\,[t]$. Изучается регуляризация правила экстремального прицеливания [6,7], анонсированная в статье [8].

§ 1. Рассмотрим преследующее ($y\,[t]$) и преследуемое ($z\,[t]$) движения, описываемые дифференциальными уравнениями

$$dy/dt = f^{(1)}[y,\ u] \tag{1.1}$$

$$dz/dt = f^{(2)}[z,\ v] \tag{1.2}$$

Здесь y, z — n-мерные фазовые векторы объектов; u, v — r-мерные векторы управления; $f^{(i)}$ — известные дифференцируемые вектор-функции. Процесс начинается в некоторый момент времени $t = t_0$. Реализации $u\,[t]$ и $v\,[t]$ управлений u и v стеснены ограничениями

$$u\,[t] \in U, \qquad v\,[t] \in V \qquad (t \geqslant t_0) \tag{1.3}$$

где U, V — заданные ограниченные области в пространствах $\{u\}$ и $\{v\}$. Встреча в момент $t = t_*$ определяется как ситуация, удовлетворяющая условию

$$\{y\,[t_*]\}_m = \{z\,[t_*]\}_m \tag{1.4}$$

(Число m задано; символ $\{w\}_m$ означает вектор, составленный из первых m компонент вектора w.) Цель преследователя — осуществить встречу. Управление u формируется по принципу обратной связи в каждый текущий момент $t \geqslant t_0$ на основании информации о сложившейся к этому моменту ситуации. Предполагается, что преследователь может столкнуться с любой допустимой реализацией управления $v\,[t]$. Построение работоспособного управления в виде функции

$$u\,[t] = u\,(y\,[t],\ \ z\,[t]) \tag{1.5}$$

наталкивается на трудности [1–6]. Один из путей преодоления их — пополнение множества аргументов в (1.5). В данной статье изучается один такой способ регуляризации задачи. Он базируется на правиле экстремального прицеливания [6], основу которого составляет сохранение области достижимости $G^{(2)}\,[z\,[t],\ \eta\,[t]]$ движения $z\,[t]$ в области достижимости $G^{(1)}\,[y\,[t],\ \eta\,[t]]$ движения $y\,[t]$ в процессе изменения времени t при условии невозрастания времени поглощения $\vartheta^\circ\,[t] = t + \eta\,[t]$ (см. например [7], стр. 331). Здесь изучается регуляризация этого правила, которая включает в (1.5) дополнительный аргумент $\eta\,[t]$ и, кроме того, вводит в условие прицеливания некоторое запаздывание ξ по времени. Такой способ регуляризации предложен в статье [8]. Он реализуется в виде дискретной аппроксимирующей схемы, которая отличается от регуляризирующих схем, описанных в статьях [8–10] тем, что теперь еще вводится запаздывание ξ. Это расширяет возможности управления, но ставит новые вопросы об устойчивости процесса. Исследование этой устойчивости выходит за рамки предлагаемой статьи и составит предмет другой работы.

§ 2. Построим аппроксимирующее экстремальное управление u_δ°. Поясним некоторые обозначения. Индекс δ подчеркивает, что реализации $u_\delta[t]$ управления u_δ постоянны на интервале $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ ($\tau_k = t_0 + k\delta$, $\delta > 0$, $k = 0, 1, \ldots$). При выбранных управлениях u и v символ $T^\varepsilon_{u,v}$ будет означать момент времени, когда для рассматриваемых движений $y[t]$ и $z[t]$ впервые осуществляется неравенство

$$\|\{y[T^\varepsilon_{u,v}] - z[T^\varepsilon_{u,v}]\}_m\| \leqslant \varepsilon \tag{2.1}$$

(Символ $\|w\|$ означает евклидову норму вектора w.) По определению, управление u_δ, определенное для всех достаточно малых $\delta > 0$, обеспечивает сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем к моменту $t = T^\circ$, если выполняется условие [10]

$$\sup_{\varepsilon > 0}[\lim_{\delta \to 0}\sup[\sup_{v} T^\varepsilon_{u,v}]] \leqslant T^\circ \tag{2.2}$$

Символами $G^{(1)}[y, \eta]$ и $G^{(2)}[z, \eta]$ будем обозначать области достижимости ([7], стр. 116) для движений y и z соответственно (из состояний $y[t] = y$, $z[t] = z$ к моменту $\vartheta = t + \eta$). Символы $G^{(1)}[y, \eta; \varepsilon]$ и $G^{(2)}[z, \eta; \varepsilon]$ будут означать замкнутые ε-окрестности областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ (в метрике, определенной некоторой нормой γ).

Экстремальное управление

$$u_\delta^\circ[t] = u_\delta^\circ[y[\tau_k],\ z[\tau_k],\ \eta[\tau_k]] \qquad (\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}) \tag{2.3}$$

формируется следующим образом. Величины $y[t]$, $z[t]$ изменяются в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2), где $v = v[t]$ и $u = u_\delta^\circ[t]$. Величины $\eta[\tau_k]$ определяются рекуррентно. При $\tau_0 = t_0$ полагаем $\eta[\tau_0] = \vartheta^\circ[\tau_0] - \tau_0$, где $\vartheta = \vartheta^\circ[\tau_0]$ — момент поглощения процесса z процессом y, когда впервые $G^{(2)}[z[\tau_0], \vartheta - \tau_0] \subset G^{(1)}[y[\tau_0], \vartheta - \tau_0]$. Пусть теперь в момент $t = \tau_k$ реализовались величины $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$. Определим для них момент поглощения $\vartheta^\circ[\tau_k]$. Если $\vartheta^\circ[\tau_k] \leqslant \tau_{k-1} + \eta[\tau_{k-1}]$, то полагаем $\eta[\tau_k] = \vartheta^\circ[\tau_k] - \tau_k$, если же $\vartheta^\circ[\tau_k] > \tau_{k-1} + \eta[\tau_{k-1}]$, то $\eta[\tau_k] = \eta[\tau_{k-1}] - \delta$.

Задаемся некоторой функцией $\xi(\delta)$, удовлетворяющей условию

$$\lim \xi(\delta) = 0 \quad \text{при } \delta \to 0 \quad (\xi \geqslant \delta) \tag{2.4}$$

При известных $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$, $\eta[\tau_k]$ среди допустимых программных управлений $u(\tau)$ ($\tau_k \leqslant \tau < \tau_k + \xi$), стесненных условием $u(\tau) \in U$, найдем такое управление $u_*(\tau)$, которое обеспечивает минимум $\varepsilon^*[\tau_k]$ для величины ε, удовлетворяющей условию

$$G^{(2)}[z[\tau_k],\ \eta[\tau_k]] \subset G^{(1)}[y_u(\tau_k + \xi),\ \eta[\tau_k];\ \varepsilon] \tag{2.5}$$

Здесь $y_u(\tau_k + \xi)$ — состояние, в которое система

$$\frac{dy}{d\tau} = f^{(1)}[y, u] \tag{2.6}$$

переводится управлением $u(\tau)$ к моменту $\tau = \tau_k + \xi$ (из состояния $y[\tau_k]$). Управление $u_\delta{}^\circ$ (2.3) определяется теперь равенством

$$u_\delta{}^\circ[t] = \frac{1}{\delta}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u_*(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

§ 3. Сформулируем для системы (1.1) — (1.3) определение свойства стабильного поглощения процесса z процессом y.

Пусть $0 < \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta^\circ < \infty, \delta > 0$ и реализовались какие-то значения $z[t]$, $y[t]$, для которых выполнено условие

$$G^{(2)}[z[t], \ \eta] \subset G^{(1)}[y[t], \ \eta; \ \varepsilon_*] \qquad (\varepsilon_* \geqslant \varepsilon_0 > 0) \tag{3.1}$$

Пусть далее реализовалось некоторое значение $z[t+\delta]$. Скажем, что процесс z поглощается процессом y стабильно, если каковы бы ни были возможные реализации $z[t]$, $z[t+\delta]$, $y[t]$ и величины η_0, η°, ε_0 для всех достаточно малых значений $\delta > 0$ среди допустимых управлений $u(\tau)$ $(t \leqslant \tau < t + \delta)$ можно найти управление $u^*(\tau)$, которое переводит систему (2.6) в состояние $y_u{}^*(t+\delta)$, удовлетворяющее условию

$$G^{(2)}[z[t+\delta], \ \eta - \delta] \subset G^{(1)}[y_u{}^*(t+\delta), \ \eta - \delta; \ \varepsilon^*] \tag{3.2}$$

где

$$\varepsilon^* \leqslant (1 + \beta(\eta_0\eta^\circ)\,\delta)\,\varepsilon_* \quad (\beta < \infty) \tag{3.3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Если процесс z поглощается процессом y стабильно, то экстремальное управление $u_\delta{}^\circ$ (2.7) обеспечивает сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем в момент $t = \vartheta^\circ[t_0]$. (Предполагается, естественно, что при данных $y[t_0]$ и $z[t_0]$ момент поглощения $\vartheta^\circ[t_0] < \infty$ существует.)

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что величина $\varepsilon^*\cdot[\tau_k]$, которая минимизирует ε в условии (2.5), остается меньше любого наперед выбранного числа $\varepsilon^\circ > 0$, если только шаг схемы $\delta > 0$ достаточно мал. Для этого следует оценить изменение данной величины со временем τ_k. При этом достаточно, очевидно, рассматривать лишь случай, когда $\varepsilon^*[t] \geqslant \varepsilon_0 > 0$ и $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta^\circ$. Итак, оценим изменение величины $\varepsilon^*[t]$ за один шаг $[\tau_k, \tau_{k+1})$. Если бы на данном интервале $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ работало управление $u_*(t)$, то из условия (3.3) можно было бы вывести неравенство

$$\varepsilon^*(\tau_{k+1}) \leqslant (1 + \beta(\eta_0, \ \eta^\circ)\,\delta)\,\varepsilon^*[\tau_k] \tag{3.4}$$

Однако на деле на рассматриваемом интервале $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ работает усредненное управление $u_\delta{}^\circ[t]$ (2.7). Это усреднение в оценке величины $\varepsilon^*[\tau_{k+1}]$, которая получается на деле, дает эффект высшего порядка малости по δ. Таким образом, получаем оценку

$$\varepsilon^* [\tau_{k+1}] \leqslant (1 + \beta (\eta_0, \eta^\circ) \delta) \varepsilon^* [\tau_k] + o (\delta) \tag{3.5}$$

из которой и выводится справедливость теоремы.

Примечание 3.1. Пусть области достижимости $G^{(i)}$ замкнуты. Это выполняется в широком классе случаев. Пусть далее область $G^{(1)} [y, \eta]$ выпукла. Тогда она будет — пересечением своих опорных полупространств ([11], стр. 781) и будет описываться соотношением

$$\rho^{(1)} [l, y, \eta] - l'q \geqslant 0$$

которому должна удовлетворять каждая точка $q \in G^{(1)}$ при всех возможных значениях вектора l. (Верхний индекс штрих означает транспонирование). Пусть $G^{(2)} [z, \eta]$ — выпуклая оболочка области $G^{(2)} [z, \eta]$ и пусть область $G^{(2)} [z, \eta]$ описывается уравнением

$$\rho^{(2)} [l, z, \eta] - l'q \geqslant 0$$

Тогда для выполнения свойства стабильности поглощения процесса z процессом y достаточно, чтобы при малых $\delta > 0$ выполнялось условие

$$\max_{u(\tau)} (\min_{l} [\rho^{(1)} (l, y_u (t + \delta), \eta - \delta)] - \rho^{(2)} [l, z [t + \delta], \eta - \delta]] + (1 + \beta\delta) \varepsilon_*) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

если только

$$\min_{l} [\rho^{(1)} [l, y [t], \eta] - \rho^{(2)} [l, z [t], \eta]] + \varepsilon_* \geqslant 0$$

при условии $\gamma^* [l] = 1$. Здесь $\gamma^* [l]$ — норма вектора l в подходящей метрике. Когда функция в левой части (3.6) выпукла по l и вогнута по u, а множество U в условии (1.3) выпукло, операции $\max_u$ и $\min_l$ в (3.6) можно переставлять местами, и определение функции $u_* (\tau)$ опирается на обычные условия принципа максимума [12]. Такие обыкновенные случаи смыкаются со случаями регулярного поглощения процесса z процессом y, рассмотренными в статьях [9,10]. Однако интересен и особый случай, когда поглощение процесса z процессом y нерегулярно и когда рассматриваемые функции не выпуклы по l. Тогда вычисление функции $u_* (\tau)$ связано с дополнительными осложнениями.

Примечание 3.2. Предельные движения $y^\circ [t]$, порождаемые аппроксимирующей схемой управления u°_δ при $\delta \to 0$, можно формализовать в рамках обобщенных решений [13], получающихся разрывными дифференциальных уравнений. Управление u° строится формально следующим образом. Если при данных $y [t]$, $z [t]$, $\eta [t]$, $\xi [t]$ справедливо включение

$$G^{(2)} [z [t], \eta [t]] \subset G^{(1)} [y_u^* (t + \xi), \eta [t]]$$

то функция $u^\circ (y, z, \eta, \xi)$ предполагается в такой точке $\{y, z, \eta, \xi\}$ неоднозначной и она может принимать любые значения, удовлетворяющие заданному ограничению $u^\circ \in U$. Если же при данных y, z, η, ξ выполняется лишь включение

$$G^{(2)} [z [t], \eta [t]] \subset G^{(1)} [y_u^* (t + \xi), \eta [t]; \varepsilon^*] \tag{3.7}$$

то $u^\circ [t]$ определяется равенством

$$u^\circ [t] = u^\circ (y [t], z [t], \eta [t], \xi [t]) = \frac{1}{\xi [t]} \int_{t}^{t+\xi} u_* (\tau) \, d\tau \tag{3.8}$$

Здесь надлежит еще оговорить характер изменения переменных $\eta [t]$ и $\xi [t]$. Полагаем, что функция $\eta [t]$ описывается дифференциальным уравнением $d\eta / dt = -1$, а $\xi[t]$ — непрерывная неубывающая функция, стесненная на участках возрастания условием

$$\xi[t] = \alpha(t, \eta[t]) \sup_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \varepsilon^*[\tau] \tag{3.9}$$

причем $\alpha(t, \eta)$ — функция, удовлетворяющая подходящим условиям малости. При этих предположениях решение $y[t]$ уравнения (1.1) определяется как абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая равенству (1.1) при $u = u^\circ[t]$ при почти всех значениях t.

Существование решения $y[t]$ устанавливается предельным переходом от аппроксимирующих решений $y_\delta[t]$, которые строятся по схеме, подобной схеме, описанной в § 2.

Условия, при которых нужные решения $y^\circ[t]$ существуют, сводятся при этом к непрерывности функции u° в области ее однозначности и к некоторым известным функциональным ограничениям на $f^{(1)}[y, u]$, типичным для задач о построении обобщенных решений разрывных уравнений [13]. Во всяком случае эти условия выполняются для широкого класса линейных систем при выпуклых ограничениях на управление u. Тогда при условии стабильности поглощения процесса z процессом y доказывается, что для движений $y^\circ[t]$, $z[t]$, $\eta[t]$, $\xi[t]$, удовлетворяющих начальным условиям $\eta[t_0] = \vartheta[t_0] - t_0$, $\xi[t_0] = 0$, экстремальное управление u° обеспечивает встречу не позже чем в момент $t = \vartheta^\circ[t_0]$. Справедливость этого утверждения вытекает из того факта, что на рассматриваемых обобщенных движениях $y^\circ[t]$ функция $\varepsilon^*[t]$ не возрастает и остается, следовательно, все время равной нулю. Этот факт в свою очередь следует из того, что при $\varepsilon^*[t] \neq 0$ величина $\varepsilon^*[t]$ не может при $t \geqslant t_*$ возрастать слишком быстро, если величина $\varepsilon^*[t_*]$ достаточно мала, так как при $u = u^\circ$ для функции $\varepsilon^*[t]$ выполняются оценки, подобные оценке (3.5), справедливой для дискретной схемы. Надлежит отметить, что движение $y^\circ[t]$ реализуется, вообще говоря, лишь в форме скользящего режима. Заметим также, что процесс преследования можно улучшить для преследователя, если уравнение $d\eta / dt = -1$ для функции $\eta[t]$ заменить дифференциальным неравенством $d\eta / dt \leqslant -1$, стесняя однако функцию $\eta[t]$ еще некоторыми дополнительными условиями. Однако тогда усложняется определение обобщенного решения $y^\circ[t]$ уравнения (1.1).

Поступила 15 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А й з е к с Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. П о н т р я г и н Л. С. К теории дифференциальных игр. Усп. матем. н., 1966, т. 21, вып. 4.
3. П ш е н и ч н ы й Б. Н. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.
4. П е т р о с я н Л. А. Динамическая игра преследования при наличии сил трения. Докл. АН АрмССР, 1967, т. 44, № 1.
5. П о ж а р и ц к и й Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. К р а с о в с к и й Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27 вып. 2.
7. К р а с о в с к и й Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., «Наука», 1968.
8. К р а с о в с к и й Н. Н. Об одной особенности игровой встречи движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, вып. 5.
9. С у б б о т и н А. И. О регуляризации одной задачи о встрече движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, вып. 5.
10. К р а с о в с к и й Н. Н., С у б б о т и н А. И. Задача о сближении управляемых объектов. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
11. К а р л и н С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
12. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
13. Ф и л и п п о в А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной игровой частью. Матем. сб., 1959, т. 51 (93), вып. 1.