

## О МЕТОДЕ ЭНСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Е. М. Шахов

(Москва)

Ряд Энского для функции распределения, удовлетворяющей уравнению Больцмана, является асимптотическим, что можно видеть из самого метода Энского — Чепмена в обычном его изложении [1,2] или в изложении работы [3]. К представлению функции распределения по Энскому можно прийти и из интегрального уравнения, полученного интегрированием левой и правой частей уравнения Больцмана вдоль траектории молекулы (см. например, [2], стр. 159). Однако асимптотический характер разложения Энского становится особенно наглядным, если воспользоваться интегральной формой кинетического уравнения, содержащей вероятности свободных пробегов молекул, и применить метод Лапласа для асимптотической оценки интегралов.

При этом видно, что область применимости получающегося асимптотического представления существенно ограничена (со стороны больших степеней разреженности) отбрасыванием соответствующих экспоненциальных членов, характеризующих, в частности, влияние начальных и граничных условий.

1. Запишем кинетическое уравнение в виде

$$f(t, x_i, \xi_i) = f(t_0, x_{0i}, \xi_i) \exp\left(-\int_{t_0}^t N_\tau d\tau\right) + \quad (1.1)$$

$$+ \int_{t_0}^t f^+(\tau, x_i - \xi_i(t - \tau), \xi_i) N_\tau \exp\left(-\int_{\tau}^t N_q dq\right) d\tau$$

$$N(t, x_i, \xi_i) = \int f(t, x_i, \xi_{i1}) \sigma_g d\xi_1, \quad J^+ = \int f' f_1' g d\zeta d\xi_1$$

$$g = |\xi - \xi_1|, \quad N_\tau = N(\tau, x_i - \xi_i(t - \tau), \xi_i), \quad f^+ = J^+ / N$$

Здесь  $N$  — частота столкновений,  $J^+$  — интеграл обратных столкновений,  $\sigma$  — сечение столкновений,  $t - t_0$  — время свободного движения частицы со скоростью  $\xi_i$  от некоторой точки  $x_{0i}$  до рассматриваемой точки  $x_i = x_{0i} + \xi_i(t - \tau)$ .

Из уравнения (1.1) видно, что распределение молекул по скоростям в произвольной точке  $x_i$  в любой момент времени  $t$  связано со значениями функции распределения в любых, сколь угодно удаленных от  $x_i$  точках области, и в любые моменты времени, предшествующие рассматриваемому. Однако степень взаимосвязанности двух точек  $x_i$  и  $x_{0i}$  и моментов времени  $t$  и  $t_0$  с увеличением расстояния между точками и интервала времени  $t - t_0$  убывает экспоненциально, причем тем быстрее, чем больше частота столкновений. Поставим целью найти явное асимптотическое выражение для функции распределения, удовлетворяющей кинетическому уравнению, при условии, что распределение молекул по скоростям в точке  $t, x_i$  определяется в основном поведением  $f$  в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки  $t, x_i$ .

Для этого обратимся к анализу асимптотического поведения правой части (1.1), замечая при этом, что входящее в нее второе слагаемое представляет собой по существу интеграл Лапласа [4]. Для полного сходства можно было бы ввести и большой параметр в показателе экспоненты путем введения соответствующих масштабов. Однако для законности асимптотической оценки интеграла важно лишь относительное поведение функций под знаком интеграла, т. е. чтобы изменение  $f^+$  было достаточно слабым по сравнению с изменением экспоненциального множителя.

Будем рассматривать время  $t$ , достаточно удаленное от начала, а точки  $x_i$ , достаточно далеко расположенные от границы, т. е. непосредственное влияние начальных и граничных условий на состояние газа в момент  $t$  в точке  $x_i$  будем считать пренебрежимо малым. Тогда точки  $x_{0i}$  можно считать внутренними (не принадлежащими границе), а  $t_0 > 0$ . Для рассматриваемых  $t, x_i, \xi_i$  выберем значение  $t_0$ , которое в (1.1), вообще говоря, может быть произвольным (для стационарных задач  $t_0$  выбирается по заданной точке  $x_{0i}$ ).

Для  $t_0$ , близких к  $t$ , и фиксированных  $\xi_i$  экспоненциальный множитель первого слагаемого (1.1) может быть близким к единице. С увеличением  $t_0$  экспоненциальный множитель убывает. Выберем  $t_0$  таким, чтобы можно было уже пренебречь первым слагаемым в (1.1) при выбранной точности, т. е. ограничимся эффективным отрезком времени  $t - t_0$  и соответственно эффективной длиной луча направления  $\xi_i$ , длиной зависимости  $f(t, x_i, \xi_i)$ .

Если на выбранном интервале  $t - t_0$ , на котором экспоненциальный множитель подынтегральной функции изменяется от единицы практически до нуля, функция  $f^+$  изменяется слабо, то в соответствии с основной идеей метода Лапласа значение интеграла определяется в основном поведением  $f^+$  в окрестности  $\tau = t$ . Если функцию  $f^+$  на интервале  $t - t_0$  можно считать практически постоянной, то интеграл в (1.1) вычисляется, и уравнение (1.1) с точностью до отброшенных членов принимает вид

$$f(t, x_i, \xi_i) = f^+(t, x_i, \xi_i) \quad (1.2)$$

или, вспоминая определение  $f^+$ , получим

$$\int (f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\xi_1 = 0 \quad (1.3)$$

Если приведенные выше рассуждения справедливы для всех скоростей  $\xi_i$ , т. е. если для всех  $\xi_i$  можно выбрать такой эффективный интервал времени  $t - t_0$  и такую область пространственных переменных (область зависимости  $f$ ), внутри которых  $f^+$  можно считать практически постоянной, то (1.3) будет верно для всех  $\xi_i$ , и, следовательно, распределение молекул по скоростям в этой области должно быть локально максвелловским

$$f = f^{(0)} = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \frac{-c^2}{2RT}, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \quad c_i = \xi_i - u_i \quad (1.4)$$

Здесь  $n$ ,  $T$ ,  $u_i$  — локальная плотность, температура и массовая скорость газа, которые определяются уже не кинетическим уравнением, а уравнениями сохранения для поля течения.

Таким образом, в этом случае приходим к чисто гидродинамическому описанию движения газа. Кинетическое уравнение устанавливает, что движение газа можно рассматривать как движение совокупности жидких частиц. Каждая жидкая частица (бесконечно малая с макроскопической точки зрения, но превышающая по линейному размеру максимальную длину свободного пробега молекул) находится в локальном термодинамическом равновесии, причем равновесие устанавливается в основном за счет столкновений, составляющих эту жидкую частицу, т. е. жидкую частицу можно рассматривать как замкнутую термодинамическую систему. Плотность, температура и скорость частицы определяются ее внешним окружением, т. е. всем полем течения и должны быть найдены из уравнений сохранения.

Очевидно, что в этом, как и в любом другом случае, движение газа можно было бы получить непосредственным интегрированием уравнения Больцмана. Однако для сохранения связи между элементарными объемами  $dx_i$  и состояниями газа в различные моменты времени размеры  $dx_i$  и  $dt$  при численном интегрировании должны были бы быть выбраны существенно меньше тех, которые выбираются из макроскопических соображений. Переход от уравнения Больцмана к уравнениям сохранения означает переход к большим масштабам.

2. Пусть теперь  $f^+$  в эффективной области зависимости слабо изменяется. Перейдем в интеграле (1.1) к новой переменной интегрирования. Положим

$$\alpha = \int_{\tau}^t N_{\tau} d\tau, \quad \alpha_0 = \int_{t_0}^t N_{\tau} d\tau \quad (2.1)$$

Представляя  $f^+$  в виде разложения в окрестности точки  $t, x_i$  по формуле Тэйлора включающей только линейные члены по  $\alpha$ , подставляя полученное представление  $f$

в уравнение (1.1) и производя интегрирование, с принятой точностью получим

$$f(t, x_i, \xi_i) = f^+(t, x_i, \xi_i) - \frac{1}{N} \left( \frac{\partial f^+}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^+}{\partial x_i} \right) \Big|_{t, x_i} \quad (2.2)$$

Попытаемся определить поправку к главному члену  $f^{(0)}$  асимптотического разложения функции  $f$ . Так как можно принять

$$f = f^+ = f^{(0)} \quad \text{при} \quad \frac{1}{N} \left| \frac{\partial f^+}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^+}{\partial x_i} \right| \ll f^+$$

то можно предположить, что функция  $f$  представима в виде

$$f = f^{(0)}(1 + \varphi) \quad (2.3)$$

Здесь  $\varphi$  — малое относительное отклонение от локально максвелловского распределения.

Подставляя (2.3) в (2.2) и вспоминая определение  $f^+$ , после линеаризации получим

$$\int (\varphi' + \varphi_1' - \varphi - \varphi_1) f^{(0)} f_1^{(0)} g d\zeta d\xi_1 = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

При этом в силу принятого порядка точности  $f^+$  под знаками производных заменено на  $f^{(0)}$ . Уравнение (2.4) в точности совпадает с уравнением, которое появляется как промежуточный результат при применении метода Энского к уравнению Больцмана. Полагая далее, как в методе Энского, что в (2.3) первые пять моментов функции распределения определяются первым слагаемым, выражаем  $\partial f^{(0)} / \partial t$  через производные  $\partial n / \partial t$ ,  $\partial u_i / \partial t$ ,  $\partial T / \partial t$ , а последние — через пространственные производные от этих же величин в силу уравнений сохранения, в которых оставлены только моменты, соответствующие нулевому приближению. В результате получим для определения  $\varphi$  уравнение первого приближения метода Энского

$$\int (\varphi' + \varphi_1' - \varphi - \varphi_1) f^{(0)} f_1^{(0)} g d\zeta d\xi_1 = D^{(1)} \quad (2.5)$$

где смысл  $D^{(1)}$  тот же, что и в известной монографии Чепмена и Каулинга [1].

Отметим, что вместо частных производных по времени  $\partial f^{(0)} / \partial t$  и т. д. в (2.4) в рассуждениях следовало бы использовать индивидуальные производные, соответствующие жидкой частице. Роль частных производных по времени в методе Энского искусственно преувеличена. В самом деле, для стационарных течений эти частные производные равны нулю, а результаты метода с успехом применяются ко всем стационарным задачам, если выполнены соответствующие условия. Важны только индивидуальные производные, так что все рассуждения относительно способа разбиения производных в методе Энского следует относить к индивидуальным производным. Физически это достаточно очевидно, так как метод Энского приводит к гидродинамическому описанию движения газа.

Можно было бы попытаться не ограничиваться первым приближением по Энскому для  $f$ , а постараться уточнить асимптотическое представление, учитывая вторые производные  $f^+$  в разложении по формуле Тэйлора, что привело бы к приближению Барнетта (продвинуться в область больших разрежений таким образом, очевидно, не удается, так как эффективная область зависимости остается прежней). Возможность уточнения отмеченным способом в общем случае вызывает сомнение, так как для этого требуется более высокая степень гладкости  $f^+$ , а следовательно, и  $f$ , чем это следует из уравнения Больцмана.

Поступила 25 XII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ч е п м е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. К о г а н М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. С т р у м и н с к и й В. В. Об одном методе решения уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 2.
4. Е в г р а ф о в М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Изд. 2, М., Физматгиз, 1962.