К ВЫВОДУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГРЭДОВСКОГО ТИПА (РАСЧЕТ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА)

М. А. Чусов

(Москва)

Предлагается метод вычисления транспортных коэффициентов произвольного порядка, введенных Грэдом для описания неравновесных процессов в разреженном одноатомном газе. Расчет проводится для молекул, взаимодействующих между собой по степенному закону и для модели твердых сфер.

Как известно, уравнение Больцмана, на котором основывается микроскопический подход к изучению разреженного газа, не может быть решено точно, вследствие чего приходится удовлетворяться макроскопическим описанием неравновесных явлений на языке моментов функции распределения. Поэтому основная проблема кинетической теории газов сводится к выводу гидродинамических уравнений из кинетического уравнения. Один из наиболее общих методов решения предложен Грэдом [1], подробное изложение которого можно найти в монографиях Ю. Л. Климонтовича [2] или М. Н. Когана [3]. Грэд использует разложение функции распределения, отнесенной к локально максвелловской функции, в ряд по тензорным полиномам Эрмита — Чебышева и ограничивается конечным числом членов. При этом в выражение для моментов интеграла столкновений через коэффициенты разложения функции распределения входят транспортные коэффициенты, которые были найдены лишь для некоторых частных случаев. Предлагается метод вычисления указанных величин с любым приближением.

1. Рассмотрим разреженный одноатомный газ, молекулы которого имеют массу m и описываются точечными центрами сил, зависящими от межмолекулярного расстояния R следующим образом:

$$F = Q/R^{\omega}$$

При этом исключаются из рассмотрения все те потенциалы, которые не «жестче» кулоновского ($\omega \leqslant 2$). Все окончательные формулы, полученные в этой статье, будут справедливы и для модели гладких упругих сфер, если в них выполнить следующий предельный переход — устремить ω к бесконечности и одновременно менять Q таким образом, чтобы

$$Q^{1/\omega-1} \to d$$

где d — диаметр столкновения твердых сфер.

Исходным пунктом данного исследования будет выражение, полученное Грэдом [1] для транспортных коэффициентов

$$\beta_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)} \equiv \frac{1}{64\pi^3 r!\, s!} \int \exp\left\{-\frac{V^2+W^2}{4}\right\} H_{\rho}^{(r)}\left(\frac{\mathbf{W}-\mathbf{V}}{2}\right) H_{\eta}^{(s)}\left(\frac{\mathbf{W}+\mathbf{V}}{2}\right) \vdots T_{\nu}^{(N)}\, d^3\mathbf{V}\, d^3\mathbf{W}$$

$$T_{\nu}^{(N)} \equiv \int B(\theta, V\sqrt{RT})\, [H_{\nu}^{(N)}]\, d\theta d\psi$$

$$[H_{\nu}^{(N)}] \equiv H_{\nu}^{(N)}(\mathbf{v}') + H_{\nu}^{(N)}(\mathbf{w}') - H_{\nu}^{(N)}(\mathbf{v}) - H_{\nu}^{(N)}(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{h}V\cos\theta, \qquad \mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{h}V\cos\theta, \qquad \mathbf{V} \equiv \mathbf{w} - \mathbf{v}, \qquad \mathbf{W} \equiv \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Здесь $H_{\nu}^{(N)}(\mathbf{v})$ — тензорные полиномы Эрмита — Чебышева (см. приложение); $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — скорости молекул до соударения; $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$— аналогичные величины после соударения; $\mathbf{V}$ — относительная скорость, $\mathbf{W}$ —удвоенная скорость центра масс сталкивающихся молекул. Все скорости записаны в локальной системе координат, движущейся со средней скоростью газа и выражены в единицах $\sqrt{RT}$ (R — газовая постоянная, T — температура).

Далее, θ — угол рассеяния, $\mathbf{h}$ — единичный вектор биссектрисы угла рассеяния, ψ — «азимутальный угол столкновения», определяющий положение вектора h в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{V}$. Область интегрирования по ψ заключена, очевидно, между 0 и 2π, а пределы интегрирования по θ зависят от закона сил взаимодействия. В случае отталкивающих сил переменная θ меняется от $^1/_2\pi$ до π. Если межмолекулярная сила зависит степенным образом от межмолекулярного расстояния [1,4], то

$$B(\theta,\ V\sqrt{RT}) = \Lambda m\,(RT)^{\varkappa/2}\,V^{\varkappa} z\,\frac{dz}{d\theta} \qquad \left(\Lambda \equiv \frac{1}{m}\left(\frac{2Q}{m}\right)^{2/(\omega-1)},\quad \varkappa \equiv \frac{\omega-5}{\omega-1}\right)$$

Здесь m, Q, ω — молекулярные постоянные, а функция $z(\theta)$ имеет смысл прицельного параметра, записанного в безразмерном виде, и неявным образом находится из соотношений

$$\theta(z) = \int_0^{y_0}\left[1 - y^2 - \frac{2}{\omega-1}\left(\frac{y}{z}\right)^{\omega-1}\right]^{-1/2} dy, \qquad 1 - y_0{}^2 - \frac{2}{\omega-1}\left(\frac{y_0}{z}\right)^{\omega-1} = 0$$

Для рассматриваемого закона взаимодействия между молекулами $B(\theta,\ V\sqrt{RT})$ представляет произведение функции от θ и некоторой степени V, а в частном случае $\omega = 5$ (молекулы Максвелла) сводится к функции только от одного θ.

В дальнейшем удобно использовать также дифференциальные транспортные коэффициенты $\tau_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa)$, которые по определению связаны с обычными коэффициентами:

$$\beta_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa) \equiv \int_0^\infty z\,dz\,\tau_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa)$$

2. При вычислении транспортных коэффициентов воспользуемся определением полиномов Эрмита — Чебышева через производящую функцию (см. (А.6)). Тогда можно утверждать, что величина

$$r!\,s!\,\tau_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa)$$

есть коэффициент при члене

$$\frac{\mathrm{a}_\nu{}^N \mathrm{b}_\eta{}^s \mathrm{c}_\rho{}^r}{N!\,r!\,s!} \qquad (\nu,\ \eta,\ \rho = 1,\ 2,\ 3)$$

в разложении в ряд Тейлора производящей функции

$$X^{(\varkappa)}(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) \equiv \frac{\Lambda m\,(RT)^{\varkappa/2}}{64\pi^3}\exp\left\{-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right\}\int d^3\mathrm{V}\,d^3\mathrm{W}\,d\psi V^{\varkappa}\exp\left\{-\frac{V^2+W^2}{4} + \right.$$
$$\left. + \mathbf{b}\cdot\frac{\mathbf{W}+\mathbf{V}}{2} + \mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{W}-\mathbf{V}}{2}\right\}[\exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}') + \exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}') - \exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - \exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})]$$

Здесь и в дальнейшем точка будет означать внутреннее тензорное произведение.

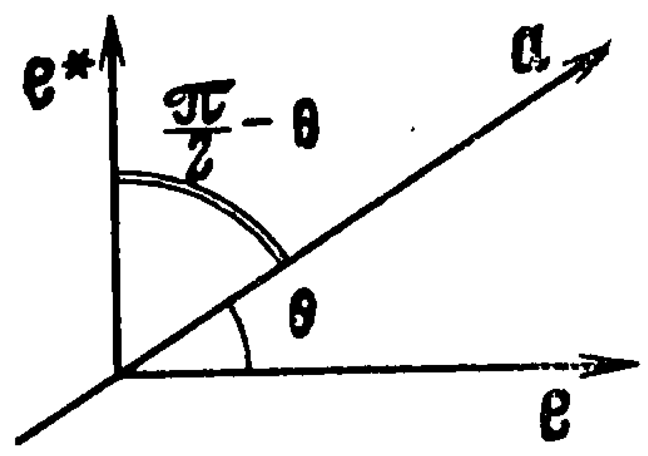
Трехмерное пространство в котором задана скалярная функция $X(\varkappa)$, будем называть пространством, сопряженным по отношению к пространству скоростей молекулы, вектор $\mathbf{a}$ задает некоторое выделенное направление, а векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ определяют положение двух сталкивающихся молекул в этом пространстве. Выполняя интегрирование по $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ и ψ, получим следующий результат, который будет основой для всех дальнейших вычислений

$$X^{(\varkappa)}(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(4RT)^{\varkappa/2}\,\Gamma\left(\frac{\varkappa+3}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-{}^1/_2\varkappa)_l\,(-1)^l}{({}^3/_2)_l\,l!}\,\frac{d^l}{d\lambda^l}\left[\exp\left\{\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2}{4} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)(1-\lambda)\right\} X^{(0)}(\mathbf{a},\ \lambda\mathbf{b},\ \lambda\mathbf{c})\right]\Bigg|_{\lambda=1}, \qquad (z)_n \equiv \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \qquad (2.1)$$

$$X^{(0)}(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = 2\pi\Lambda m\,[\langle\exp\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{c})\}\rangle + \langle\exp\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}) + (\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{b})\}]\rangle -$$
$$- \exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - \exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})] \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{k} \equiv a\cos\theta\mathbf{e}, \quad \mathbf{k}^* \equiv a\sin\theta\mathbf{e}^*, \quad \mathbf{e} \equiv \mathbf{e}(\theta,\ \varphi), \quad \mathbf{e}^* \equiv \mathbf{e}(\pi/2-\theta,\ \varphi+\pi) \qquad (2.3)$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, через $e(\theta, \varphi)$ условно обозначен единичный вектор, заданный двумя углами θ и φ по отношению к выделенному направлению $\mathbf{a}$, θ — полярный угол, а φ — азимутальный угол, т. е. угол, фиксирующий положение этого вектора в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{a}$. Угловые скобки означают осреднение по азимутальному углу



$$\langle F(\varphi)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,d\varphi$$

Пользуясь формулой (2.1), легко убедиться в том, что производящая функция, отвечающая рассматриваемой степенной модели, есть линейный функционал от производящей функции максвелловской модели. Вклад в последнюю определяется интерференцией двух плоских затухающих волн, из которых одна задается волновым вектором — $ia\cos\theta\mathbf{e}$, волновой вектор другой равен — $ia\sin\theta\mathbf{e}^*$, а единичные векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^*$ расположены компланарно с вектором $\mathbf{a}$ так, как показано на фигуре.

Таким образом, с чисто формальной точки зрения процесс соударения двух максвелловских молекул можно рассматривать как интерференцию двух затухающих плоских волн в сопряженном пространстве. Этот результат оказывается справедливым только для модели Максвелла. Указанное обстоятельство дает возможность вычислить транспортные коэффициенты.

3. Рассмотрим максвелловский случай ($\varkappa = 0$). Пользуясь формулой Тэйлора, можно представить дифференциальные транспортные коэффициенты в виде тензорной производной $N + r + s$-го ранга от производящей функции, вычисленной в нулевой точке сопряженного пространства

$$r!s!\tau_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)} = \nabla_\nu^N(\mathbf{a})\,\nabla_\eta^s(\mathbf{b})\,\nabla_\rho^r(\mathbf{c})\,X\,|_{\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=0} \tag{3.1}$$

При дифференцировании (2.2) сначала выполняем дифференцирование по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ при фиксированном $\mathbf{a}$, пользуясь при этом теоремой, сформулированной в приложении (см. (A.12) и (A.13)). Дифференцирование по вектору $\mathbf{a}$ проводится без всяких затруднений и в результате для транспортных коэффициентов получается следующее выражение:

$$\beta_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(0) = \frac{2\Lambda m}{r!s!}\delta_{N,\,s+r}\sum_{n=0}^{[{}^1/_2 N]}\sum_{l=l_1}^{l_2}\frac{(-1)^l\,[(2n)!!]^2}{(2n)!}\,\sigma_{\mathrm{tr}}^{(s+r,\,s\,r)}(n,\ l)\times$$

$$\times\{\delta_{\nu\nu}{}^n\delta^n(\{\rho^l\},\ \{\eta^{2n-l}\})\,\delta_{\nu\rho}^{r-l}\delta_{\nu\eta}^{s-2n+l}\}_*^{\nu,\,\rho,\,\eta} \tag{3.2}$$

$$l_1 \equiv \max(0,\ 2n - s), \qquad l_2 \equiv \min(2n,\ r)$$

Здесь $\min(a, b, \ldots e)$ — наименьшее, а $\max(a, b, \ldots, e)$ наибольшее из конечного набора чисел $a, b, \ldots, e$, звездочка означает операцию симметрирования (см. приложение)

$$\sigma_{\mathrm{tr}}^{(s+r,\,sr)}(n, l) \equiv \pi\int_0^\infty z\,dz\,I_{nl}^{(s+r,\,sr)}(\theta) \tag{3.3}$$

$$I_{nl}^{(s+r,\,sr)}(\theta) \equiv [\cos^{r+2n-l}\theta\sin^{s+l}\theta S_n^{(r-l,\,s-2n+l)}\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) +$$

$$+ \sin^{r+2n-l}\theta\cos^{s+l}\theta S_n^{(s-2n+l,\,r-l)}\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) - \delta_{n0}(\delta_{r0} + \delta_{s0})] \tag{3.4}$$

Угловую функцию $I_{nl}^{(s+r,sr)}(\theta)$ будем называть индикатрисой рассеяния, а модуль величины $\sigma_{tr}{}^{Nsr}(n, l)$ — транспортным сечением рассеяния произвольного порядка, соответствующим модели Максвелла. Функции $S_k{}^{(mn)}(\theta_1, \theta_2)$ определяются формулой (А.13). В качестве примера приведем несколько транспортных сечений рассеяния низшего порядка, необходимых для вычисления моментов интеграла столкновений до пятого порядка включительно

$$\sigma_{tr}{}^{(000)}(0, 0) = \sigma_{tr}{}^{(110)}(0, 0) = 0, \qquad \sigma_{tr}{}^{(220)}(0, 0) = -3A, \quad \sigma_{tr}{}^{(211)}(0,0) = 3A$$

$$\sigma_{tr}{}^{(220)}(1,0) = \sigma_{tr}{}^{(202)}(1,2) = \sigma_{tr}{}^{(211)}(1,1) = A, \ \sigma_{tr}{}^{(330)}(0,0) = -{}^{9}/_{2}A, \ \sigma_{tr}{}^{(312)}(0,0) = {}^{3}/_{2}A$$

$$\sigma_{tr}{}^{(330)}(1,0) = \sigma_{tr}{}^{(303)}(1,2) = \sigma_{tr}{}^{(312)}(1,1) = \sigma_{tr}{}^{(312)}(1, 2) = {}^{1}/_{2}A$$

$$\sigma_{tr}{}^{(404)}(0,0) = {}^{35}/_{4}B - 7A, \qquad \sigma_{tr}{}^{(404)}(1,2) = {}^{1}/_{2}(A - {}^{5}/_{2}B)$$

$$\sigma_{tr}{}^{(404)}(2,4) = \sigma_{tr}{}^{(422)}(2,2) = {}^{3}/_{4}B, \qquad \sigma_{tr}{}^{(422)}(0,0) = {}^{35}/_{4}B - A, \quad \sigma_{tr}{}^{(422)}(1,1) = {}^{5}/_{4}B$$

$$\sigma_{tr}{}^{(550)}(0,0) = {}^{175}/_{8}B - 10A, \qquad \sigma_{tr}{}^{(505)}(1,2) = {}^{1}/_{2}(A - {}^{15}/_{4}B)$$

$$\sigma_{tr}{}^{(505)}(2,4) = \sigma_{tr}{}^{(523)}(2,2) = \sigma_{tr}{}^{(523)}(2,3) = {}^{3}/_{8}B$$

$$\sigma_{tr}{}^{(523)}(0,0) = {}^{1}/_{2}({}^{35}/_{4}B - A), \ \sigma_{tr}{}^{(523)}(1,1) = \sigma_{tr}{}^{(523)}(1,2) = {}^{5}/_{8}B$$

$$A = A(\varkappa) \equiv \pi \int_0^\infty z dz \sin^2\theta \cos^2\theta, \qquad B = B(\varkappa) \equiv \pi \int_0^\infty z dz \sin^4\theta \cos^4\theta$$

Здесь A и B имеют смысл безразмерных эффективных сечений столкновений. Численные значения $A(\varkappa)$ определены при различных значениях $\varkappa$ в книге С. Чепмена и Т. Каулинга [4]. Например, согласно данным этих авторов $A(0) = 0.343$. В соответствии с результатами работы [5] $B(0) = 0.054$. Формулы для моментов интеграла столкновений второго и третьего порядков можно найти в работах [1,8,9], а для моментов четвертого и пятого порядков —в работе [7]. Легко убедиться в том, что моменты, полученные при помощи вычисленных здесь транспортных коэффициентов (3.2), совпадают с соответствующими значениями, найденными в цитированных выше работах.

4. Переходя к общему случаю, заметим, что свойство линейности функционала (2.1) позволяет весьма просто получить дифференциальные транспортные коэффициенты. При вычислении применяем формулу Тэйлора (3.1) и правило дифференцирования произведения двух функций. Суммирование по l выполняется при помощи формулы (см. [10])

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

в которой символом $F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$ обозначен гипергеометрический ряд. Далее, используя формулу (А.11), имеем

$$\tau_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa) = \frac{[(-1)^{N+s+r}+1]}{2}(-1)^{1/2(N+s+r)} \frac{2^{-1/2(N+s+r)}(4RT)^{1/2\varkappa}\,\Gamma({}^{1}/_{2}\varkappa+1)}{\Gamma({}^{1}/_{2}(N+s+r+3))\,r!s!} \times$$
$$\times \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\leqslant N}}^{s} \sum_{j=0}^{r} \frac{(-2)^{i+j}\,\Gamma(i+j+{}^{1}/_{2}(\varkappa+3))\,i!j!}{\Gamma(i+j-{}^{1}/_{2}(N+s+r-\varkappa))} \times$$
$$\times \{\delta_{(-)}^{1/2(N+r+s)-i-j}(\{\nu^{N-i-j}\}, \{\eta^{s-i}\}, \{\rho^{r-j}\})\,\tau_{\nu\rho\eta}^{i+j,\,ji}(0)\}_{*}^{\nu,\rho,\eta}$$

Неравенство в скобках под знаком суммирования по i и j указывает, что суммирование ведется по всем значениям i и j, сумма которых не превосходит N.

Итак, в качестве следствия, вытекающего из основного соотношения (2.1), получаем следующий результат — дифференциальные транспортные коэффициенты, соответствующие молекулам, взаимодействующим между собой по степенному закону, есть линейные функции от коэффициентов модели Максвелла.

Воспользовавшись формулами (3.1) и (3.2) и явным видом произведений дельта-символов Кронекера (см. (А.4) и (А.5)), а также применяя правило сложения рангов под знаком симметрирования (А.1) после соответствующей перестановки знаков суммирования получим окончательную формулу для транспортных коэффициентов

$$\beta_{\nu\rho\eta}^{(Nrs)}(\varkappa) = \frac{[(-1)^{N+s+r}+1]}{2}(-1)^{1/2(N+s+r)}2^{-1/2(N+r+s)+1}\frac{\Lambda m(4RT)^{1/2\varkappa}\Gamma(1/2\varkappa+1)}{\Gamma(1/2(N+r+s+3))r!s!}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\alpha=0\\(p,\,q,\,t\geqslant 0)}}^{[1/2N]}\sum_{\beta=0}^{[1/2s]}\sum_{\gamma=0}^{[1/2r]}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}\sigma_{\mathrm{tr}}^{(Nsr)}(\alpha,\beta,\gamma;\varkappa)\{\delta_{\nu\nu}^{\alpha}\delta_{\eta\eta}^{\beta}\delta_{\rho\rho}^{\gamma}\delta_{\nu\eta}^{p}\delta_{\nu\rho}^{q}\delta_{\rho\eta}^{t}\}_{*}^{\nu,\rho,\eta} \qquad (4.1)$$

$$\sigma_{\mathrm{tr}}^{(Nsr)}(\alpha,\beta,\gamma;\varkappa)\equiv\sum_{\substack{i=0\\(i+j\leqslant N)}}^{s}\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=k_1}^{k_2}\sum_{l=l_1}^{l_2}\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{(-2)^{i+j}\Gamma(i+j+1/2(\varkappa+3))}{\Gamma(i+j+1-1/2(N+s+r-\varkappa))}\times$$

$$\times\frac{[(2k)!!]^2}{(2k)!}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{k+n-l}\binom{\gamma}{n}\binom{p}{i+l-2k}\binom{q}{j-l}\binom{t}{l-2n}\sigma_{\mathrm{tr}}^{(i+j,\,ij)}(k,l) \qquad (4.2)$$

Здесь p, q, t определяются формулами (А.3), ${\sigma_{\mathrm{tr}}}^{(i+j,ij)}(k, l)$ — транспортные сечения рассеяния, соответствующие модели Максвелла (см. (3.3) и (А.13)) и

$$k_1\equiv\max(0,\alpha-[1/2(N-i-j)]),\qquad k_2\equiv\min([1/2(i+j)],\ \alpha)$$

$$l_1\equiv\max(0,\,2k-i,\,k-[1/2(r-j)]+\gamma-\beta,\,j-q),\quad l_2\equiv\min(2k,\,j,\,[1/2(s-i)]+$$
$$+k+\gamma-\beta,\ 2k-i+p)$$

$$n_1\equiv\max(0,\gamma-[1/2(r-j)],\ [1/2(l-t+1)],\ l-k),\quad n_2\equiv\min([1/2l],\gamma,\beta+l-k)$$

При некоторых частных значениях индексов N, r и s вычисленные коэффициенты совпадают со значениями, полученными Грэдом прямым методом в работе [1]. Далее, непосредственным образом можно проверить следующие равенства:

$$\beta_{\rho\eta}^{(0rs)}(\varkappa)=\beta_{i\rho\eta}^{(1rs)}(\varkappa)=\sum_{\alpha}\beta_{\alpha\alpha,\,\rho\eta}^{(2rs)}(\varkappa)=0 \qquad (r,s=0,1,2\ldots)$$

которые выражают тот факт, что плотность, количество движения и энергия газа не могут измениться в результате столкновений.

Один из наиболее важных полученных результатов заключается в том, что индикатриса рассеяния молекул, взаимодействующих по степенному закону, есть линейная функция индикатрис, соответствующих модели Максвелла.

Используя вычисленные здесь транспортные коэффициенты произвольного порядка, легко выписать бесконечную цепочку моментных уравнений, эквивалентную уравнению Больцмана. Для замыкания указанной системы уравнений следует воспользоваться какой-либо конкретной статистической гипотезой относительно вида функции распределения, например, принципом максимальной вероятности [9,10] (см. также [3]). Таким образом, для простейших молекул моделей можно составить систему точных моментных уравнений, описывающих произвольное анизотропное состояние газа в случае, когда функция распределения принадлежит некоторому достаточно широкому классу.

Заметим, что все основные результаты, полученные в данной статье, остаются справедливыми также в случае газовых смесей.

В заключение, выражаю благодарность А. М. Обухову за внимание к работе и полезные советы в ходе ее выполнения.

Приложение. В данной работе используются введенные Грэдом [1,11] тензорные обозначения, обобщающие обозначения для диад. Так символ ${c_\nu}^n$ означает тензорный одночлен n-го ранга $c_{\nu_1}c_{\nu_2}\ldots c_{\nu_n}$.

Здесь индекс ν указывает на то, что данный тензор имеет индексы группы ν. Компоненты вектора c в декартовой системе координат обозначаются через c_ν ($\nu = 1, 2, 3$). Аналогичным образом символом $T^{(Nrs)}_{\nu\rho\sigma}$ обозначен тензор ранга $N + r + s$, имеющий N индексов группы ν, r индексов группы ρ и s индексов группы σ:

$$\nu \sim (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N), \quad \rho \sim (\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_r), \quad \sigma \sim (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s)$$

Будет рассматриваться также символический тензорный одночлен $\nabla_\nu{}^n(\mathbf{a})$, составленный из произведения компонент вектора набла ∇

$$\nabla_\nu{}^n(\mathbf{a}) \equiv \nabla_{\nu_1}(\mathbf{a})\nabla_{\nu_2}(\mathbf{a})\ldots\nabla_{\nu_n}(\mathbf{a}) \qquad (\nabla(\mathbf{a}) \equiv \partial / \partial_\mathbf{a})$$

где $\nabla(\mathbf{a})$ означает тензорную производную по вектору $\mathbf{a}$.

Введем дальнейшие обозначения. Символом δ_{mn} обозначается обычный дельта-символ Кронекера

$$\delta_{mn} = 0 \quad (m \neq n); \qquad \delta_{mn} = 1 \quad (m = n)$$

Жирным шрифтом $\boldsymbol{\delta}$ обозначен дельта-символ Кронекера, который имеет тензорные индексы

$$\boldsymbol{\delta}_{ij} = 0 \; (i \neq j); \qquad \boldsymbol{\delta}_{ij} = 1, \quad (i = j) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Символ n-й степени тензора $\boldsymbol{\delta}_{\nu\nu}{}^n$, $\mathbf{p}_{\nu\nu}{}^n$ означает тензорный одночлен, составленный из произведения компонент соответствующих тензоров и имеющий индексы данной группы, причем в каком порядке расположены последние, безразлично. Так, например

$$\boldsymbol{\delta}_{\nu\nu}{}^n = \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\nu_2}\boldsymbol{\delta}_{\nu_3\nu_4}\ldots\boldsymbol{\delta}_{\nu_{n-1}\nu_n}$$

Операция симметрирования вводится следующим образом:

$$\{T_{\nu\rho\sigma}{}^{(Nrs)}\}_*^{\nu,\,\rho,\,\sigma} \equiv \sum T_{\nu\rho\sigma}{}^{(Nrs)}$$

где сумма распространяется по всем тем перестановкам, которые дают различные члены. Верхние индексы ν, ρ, σ, стоящие за скобкой над знаком симметрирования * означают, по какой группе индексов проводится симметрирование. В тех случаях, когда имеется всего лишь одна группа индексов или когда безразлично по какой группе индексов проводить симметрирование, они могут быть опущены. Например

$$\{\boldsymbol{\delta}_{\nu\nu}{}^2\}_* \equiv \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\nu_2}\boldsymbol{\delta}_{\nu_3\nu_4} + \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\nu_3}\boldsymbol{\delta}_{\nu_2\nu_4} + \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\nu_4}\boldsymbol{\delta}_{\nu_2\nu_3} \qquad \{\boldsymbol{\delta}_{\nu\rho}{}^2\}_* \equiv \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\rho_1}\boldsymbol{\delta}_{\nu_2\rho_2} + \boldsymbol{\delta}_{\nu_1\rho_2}\boldsymbol{\delta}_{\nu_2\rho_1}$$

Симметрирование обладает следующим свойством:

$$\{\xi_\nu{}^p\xi_\nu{}^q\mathbf{c}_\nu{}^h\boldsymbol{\delta}_{\rho\rho}{}^m\boldsymbol{\delta}_{\rho\rho}{}^n\boldsymbol{\delta}_{\nu\rho}{}^s\boldsymbol{\delta}_{\nu\rho}{}^t\mathbf{p}_{\eta\eta}{}^l\mathbf{p}_{\eta\eta}{}^r\}_*^{\nu,\,\rho,\,\eta} =$$
$$= \binom{p+q}{p}\binom{m+n}{n}\binom{s+t}{s}\binom{l+r}{r}\{\xi_\nu{}^{p+q}\mathbf{c}_\nu{}^h\boldsymbol{\delta}_{\rho\rho}{}^{m+n}\boldsymbol{\delta}_{\nu\rho}{}^{s+t}\mathbf{p}_{\eta\eta}{}^{l+r}\}_*^{\nu,\,\rho,\,\eta} \qquad (\mathrm{A}.1)$$

которое будем называть правилом сложения рангов под знаком симметрирования.

В данной работе употребляется также символическая запись тензора в виде степени дельта — символов Кронекера, среди индексов которого имеются индексы различных групп. Последние будут записываться в виде аргументов тензора:

$$\boldsymbol{\delta}^{1/2(N+r+s)}(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_N; \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_r; \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_s) \equiv \boldsymbol{\delta}^{1/2(N+r+s)}(\{\nu^N\}, \{\rho^r\}, \{\sigma^s\})$$

где $\{\nu^N\}$, $\{\rho^r\}$ и $\{\sigma^s\}$ означают множества индексов, каждое из которых содержит N, r и s индексов группы ν, ρ и σ соответственно. В такой записи будет подразумеваться, что по каждой группе индексов уже выполнено симметрирование. Пользуясь простейшими комбинаторными соображениями, легко показать, что (см. например, [1])

$$\boldsymbol{\delta}^{1/2\,(N+r+s)}(\{\nu^N\}, \{\rho^r\}, \{\sigma^s\}) = \sum_{\substack{\alpha=0}}^{[1/2\,N]}\sum_{\beta=0}^{[1/2\,s]}\sum_{\gamma=0}^{[1/2\,r]} \{\boldsymbol{\delta}_{\nu\nu}{}^\alpha\boldsymbol{\delta}_{\sigma\sigma}{}^\beta\boldsymbol{\delta}_{\rho\rho}{}^\gamma\boldsymbol{\delta}_{\nu\sigma}{}^p\boldsymbol{\delta}_{\nu\rho}{}^q\boldsymbol{\delta}_{\rho\sigma}{}^t\}_*^{\nu,\,\sigma,\,\rho} \qquad (\mathrm{A}.2)$$
$$(p, q, t \geqslant 0)$$

Здесь

$$p \equiv \frac{N-2\alpha}{2} + \frac{s-2\beta}{2} - \frac{r-2\gamma}{2}, \quad q \equiv \frac{N-2\alpha}{2} + \frac{r-2\gamma}{2} - \frac{s-2\beta}{2}$$

$$t \equiv \frac{s-2\beta}{2} + \frac{r-2\gamma}{2} - \frac{N-2\alpha}{2} \tag{A.3}$$

и суммирование ведется по всем положительным значениям p, q и t. Кроме того, введем в рассмотрение тензоры аналогичного вида, но со знакопеременными членами. Пользуясь единообразными обозначениями, запишем

$$\delta_{(\pm)}^{{}^1/_2(N+r+s)}(\{\nu^N\}, \{\rho^r\}, \{\sigma^s\}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{\alpha=0 \\ (p,q,t\geqslant 0)}}^{[{}^1/_2 N]} \sum_{\beta=0}^{[{}^1/_2 s]} \sum_{\gamma=0}^{[{}^1/_2 r]} (\pm 1)^{\alpha+\beta+\gamma} \left\{\delta_{\nu\nu}{}^{\alpha}\delta_{\sigma\sigma}{}^{\beta}\delta_{\rho\rho}{}^{\gamma}\delta_{\nu\sigma}{}^{p}\delta_{\nu\rho}{}^{q}\delta_{\rho\sigma}{}^{t}\right\}_*^{\nu,\sigma,\rho} \tag{A.4}$$

В случае, когда имеются лишь две группы индексов, выражение типа (А.2) значительно упрощается. Например

$$\delta^n(\{\rho^l\}, \{\sigma^{2n-l}\}) = \sum_{\alpha=0}^{[{}^1/_2 l]} \left\{\delta_{\rho\rho}{}^{\alpha}\delta_{\sigma\sigma}{}^{n+\alpha-l}\delta_{\rho\sigma}{}^{l-2\alpha}\right\}_*^{\rho,\sigma} \tag{A.5}$$

Тензорные полиномы Эрмита — Чебышева рассматривались Грэдом в работах [1,11]. Они определяются через производящую функцию F (a)

$$F(\mathrm{a}) \equiv \exp\left\{\mathrm{a}\cdot\xi - \frac{a^2}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_n}}{n!} \cdot H_{k_1k_2\ldots k_n}^{(n)}(\xi) \tag{A.6}$$

и обладают следующим свойством ортонормированности:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_\nu^{(p)}(\xi) H_\nu^{(n)}(\xi)\, d^3\xi = \delta_{np}\left\{\delta_{\nu\rho}{}^{n}\right\}_*$$

причем интегрирование ведется по всему трехмерному пространству. Исходя из определения, можно представить данные полиномы в виде тензорной производной

$$H_\nu^{(n)}(\xi) = (-1)^n \exp({}^1/_2\,\xi^2)\, \nabla_{-\nu}{}^{n}(\xi) \exp(-{}^1/_2\,\xi^2) \tag{A.7}$$

или в явном виде

$$H_\nu^{(n)}(\xi) = \sum_{k=0}^{[{}^1/_2 n]} (-1)^k \left\{\xi_\nu{}^{n-2k}\delta_{\nu\nu}{}^{k}\right\}_* \tag{A.8}$$

Из последней формулы получается разложение тензорного одночлена $\xi^n{}_\nu$ по полиномам Эрмита — Чебышева

$$\xi_\nu{}^{n} = \sum_{k=0}^{[{}^1/_2 n]} \left\{\delta_{\nu\nu}{}^{k} H_\nu^{(n-2k)}(\xi)\right\}_* \tag{A.9}$$

При помощи формул (А.7) и (А.8) легко вычисляются значения следующих тензорных производных в нулевой точке:

$$\nabla_\nu{}^{2n}(\mathrm{a})\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\Big|_{\mathrm{a}=0} = (-1)^n\left\{\delta_{\nu\nu}{}^{n}\right\}_* \tag{A.10}$$

$$\nabla_\nu{}^{N}(\mathrm{a})\,\nabla_\sigma{}^{s}(\mathrm{b})\,\nabla_\rho{}^{r}(\mathrm{c})\exp\left\{\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2}{4} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right\}\Big|_{\mathrm{a}=\mathrm{b}=\mathrm{c}=0} =$$

$$= \frac{[(-1)^{N+s+r}+1]}{2}\, 2^{-{}^1/_2(N+r+s)}\,\delta_{(-)}^{{}^1/_2(N+r+s)}(\{\nu^N\}, \{\sigma^s\}, \{\rho^r\}) \tag{A.11}$$

Наконец, сформулируем теорему, на которую делалась ссылка при выполнении тензорного дифференцирования.

Пусть в трехмерном пространстве задано выделенное направление 1, а также имеются два единичных вектора $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}(\theta_1, \varphi)$ и $\mathbf{e}^* \equiv \mathbf{e}(\theta_2, \varphi + \pi)$ (фигура). Тогда

$$\langle \mathbf{e}_\rho{}^r \mathbf{e}_\sigma{}^{*s} \rangle = \sum_{n=0}^{[{}^1/_2 N]} \sum_{l=l_1}^{l_2} (-1)^l \frac{(2n)!!}{(2n)!} \sin^l \theta_1 \sin^{2n-l} \theta_2 S_n{}^{(r-l,\, s-2n+l)}(\theta_1, \theta_2) \times$$
$$\times \left\{ \delta_{1\rho}{}^{r-l} \delta_{1\sigma}{}^{s-2n+l} \delta^n (\{\rho^l\}, \{\sigma^{2n-l}\}) \right\}_*^{\rho,\sigma} \qquad (A.12)$$
$$N = r + s, \qquad l_1 \equiv \max(0, 2n - s), \qquad l_2 \equiv \min(2n, r)$$

черта означает осреднение по азимутальному углу, а функции $S_k^{(mn)}(\theta_1, \theta_2)$ определяются следующим образом:

$$S_k{}^{(mn)}(\theta_1 \theta_2) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} \varphi (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \varphi)^m (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \varphi)^n d\varphi \qquad (A.13)$$

Доказательство данной теоремы можно провести различными способами и потому опускается.

Приведем разложение функции $S_k^{(mn)}(\theta, {}^1/_2\pi - \theta)$ по обобщенным сферическим функциям $P^l{}_{mn}$, свойства которых подробно описаны в монографии Н. Я. Виленкина [8]

$$S_k{}^{(mn)}(\theta, {}^1/_2\pi - \theta) = \frac{\Gamma(k + {}^1/_2)}{\pi} (-i)^n \sqrt{m!n!} \sum_{l=0}^{[{}^1/_2(m+n)]} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(l + {}^1/_2)\, P_{{}^1/_2(m+n)-2l,\, {}^1/_2(m-n)}{}^{{}^1/_2(m+n)} (\cos 2\theta)}{(l + k)! \sqrt{(2l)!\,(m + n - 2l)!}} \qquad (A.14)$$

Пользуясь интегральным представлением (A.13) легко убедиться в том, что рассматриваемые функции $S_k^{(mn)}$ при m равном нулю с точностью до нормировки совпадают с многочленами Гегенбауэра $C_n^{k+{}^1/_2}(\cos \theta)$.

Поступила 4 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Commun. on pure and appl. mathem 1949, vol. 2, No. 4, p. 331. (Рус. пер.: Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. Сб. пер. «Механика», 1952, № 4, № 5).
2. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд-во Моск. ун-та, 1964.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Перминов В. Д., Фридлендер О. Г. Моменты интеграла столкновений для максвелловских молекул. ПМТФ, 1965, № 6.
6. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1867, vol. 157, p. 49.
7. Ikenberry E., Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory. J. Ration. Mech. Analysis, 1956, vol. 5, No 1, p. 1.
8. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
9. Коган А. М. О методе максимизации энтропии в теории разреженных газов. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5.
10. Коган А. М. Вывод уравнений грэдовского типа и изучение их релаксационных свойств методом максимизации энтропии. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
11. Grad H. Note on N-Dimensional Hermite polynomials. Comm. Pure Appl. Math., 1949, vol. 2, No 4, p. 325.