где p_{sk} — вещественные постоянные, а $\varphi_s(x_s)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\varphi_s(0) = 0; \quad \varphi_s(x_s) \operatorname{sgn} x_s > 0 \text{ при } x_s \neq 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

Если при $k = 1, \ldots, l$, где $l < n$, $\varphi_k(x_k) = x_k$, то приходим к системе регулирования с одним или несколькими исполнительными органами.

Пусть коэффициенты системы (17) удовлетворяют условию (6), а все корни уравнения (2) имеют отрицательные вещественные части. Тогда на основании следствия из теоремы 3 заключаем, что нулевое решение рассматриваемой системы будет равномерно асимптотически устойчиво в целом при любых непрерывных функциях $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих условию (18).

Замечание. Если при выполнении сделанных выше предположений относительно правых частей системы (17) уравнение (2), не имея корней равных нулю, имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то тогда нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Действительно, при выполнении условий (6) и (18) область G будет [1] положительно инвариантным множеством для системы (17). При этом нетрудно убедиться в том, что функция v вида (4), коэффициенты которой b_s, определяются из системы уравнений

$$p_{1s}b_1 + \ldots + p_{ns}b_n = 1 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

будет удовлетворять в области G в силу системы (17) всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Поступила 6 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966, стр. 62—64.
2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, стр. 345—350.

О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА, РАЗДЕЛЯЮЩИХ ИДЕАЛЬНЫЕ СРЕДЫ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ. ВОЛНЫ РЕКОМБИНАЦИИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. Г. Куликовский (Москва)

Известным примером поверхности разрыва разделяющей идеальные среды с различными свойствами являются магнитогидродинамические ударные волны, ионизующие газ [1-5]. В этом случае поведение газа с одной стороны от поверхности разрыва описывается уравнениями газовой динамики, а с другой,— уравнениями магнитной гидродинамики. Было показано, что в ряде случаев граничных условий, задаваемых законами сохранения, недостаточно для описания ионизующих ударных волн, и необходимо использовать дополнительные граничные условия, вытекающие из требования существования непрерывного решения, представляющего структуру волны. Вид дополнительных условий зависит от отношений диссипативных коэффициентов газа.

Ниже рассматриваются общие свойства поверхностей разрыва, разделяющих две произвольные идеальные среды (в частном случае это могут быть одинаковые среды). Находится число дополнительных соотношений, которые следуют из условия существования решения, представляющего структуру такой волны и, вообще говоря, зависят от диссипативных процессов в узком слое, представляющем ударную волну.

В п. 1 дана классификация эволюционных разрывов, разделяющих различные среды. В п. 2 проводится общее рассмотрение структуры таких разрывов, получение дополнительных граничных условий и обсуждение условий эволюционности. В п. 3 в качестве примера рассмотрены волны рекомбинации (т. е. волны при прохождении через которые проводимость газа меняется от бесконечности до нуля) при наличии произвольно ориентированного магнитного поля.

1. Общие свойства и классификация поверхностей разрыва. Пусть поверхность $x = x^*(t)$ разделяет две идеальные среды, т. е. среды, в которых плоские волны малых возмущений распространяются без затухания и дисперсии. Обозначим число переменных, характеризующих среду в области слева от разрыва, через n_1, в области справа от разрыва через n_2, число различных типов малых возмущений, уходящих от разрыва влево, обозначим через s_1, а вправо — через s_2 (количества приходящих возмущений слева и справа будут соответственно равны $n_1 - s_1$ и $n_2 - s_2$).

Обычно бывает известно некоторое число соотношений, которые могут быть непосредственно написаны на разрыве для идеальных сред. Примерами таких соотношений будут соотношения, вытекающие из законов сохранения массы импульса и энергии, а также соотношения, выражающие непрерывность касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля, следующие из уравнений Максвелла. Будем называть такие соотношения основными, их число обозначим через r.

Если $s_1 + s_2 + 1 < r$, то разрыв неэволюционен [6]. В этом случае соотношений слишком много для определения амплитуд расходящихся малых возмущений. Взаимодействие таких разрывов с малыми возмущениями приводит в этом случае к появлению возмущений конечной амплитуды — разрыв распадается. Примерами таких разрывов будут трансальфвеновские волны в магнитной гидродинамике.

Если $s_1 + s_2 + 1 > r$, то разрывы могут существовать. В этом случае должны быть заданы $r - (s_1 + s_2 + 1)$ дополнительных соотношений, обеспечивающих эволюционность разрыва и возможность получения однозначного решения задач, содержащих такой разрыв. Именно, такое число дополнительных соотношений может быть естественным образом получено из требования существования решения, представляющего структуру таких волн (см. ниже п. 2). Эти соотношения зависят от характера диссипативных процессов внутри структуры разрыва. Известными примерами волн, для описания которых необходимо привлекать дополнительные соотношения, будут волны горения в газовой динамике [7] и в магнитной гидродинамике [8–10], а также волны ионизации [1–5] в магнитном поле. Заметим, что вопрос о существовании разрыва того или иного типа при такой постановке связывается с существованием решения, представляющего структуру разрыва. Существование структуры будет в весьма общем виде рассмотрено в п. 2. Для каждого конкретного случая необходимы более детальные исследования. Здесь же будем считать, что разрыв существует и необходимые дополнительные соотношения получены. Если $s_1 + s_2 + 1 = r$, то для полного описания разрыва достаточно r основных соотношений.

Таким образом, на эволюционном разрыве должны быть выполнены $s_1 + s_2 + 1$ соотношения, которые связывают между собой n_1 величин слева от разрыва, n_2 величин справа от разрыва и скорость разрыва $U = dx^*/dt$.

Пусть заданы n_1 величин слева от разрыва и скорость разрыва U. Если $n_2 > s_1 + s_2 + 1$, то n_2 величин справа от разрыва могут быть определены, но неоднозначно с произволом, необходимым для эволюционности волны, а также для решения задач, содержащих такой разрыв. Однозначное определение n_2 величин справа от разрыва возможно при $n_2 = s_1 + s_2 + 1$. Если же $n_2 < s_1 + s_2 + 1$, то величины справа от разрыва не могут быть определены при произвольном задании величин слева от разрыва и ее скорости. Для удовлетворения соотношений на разрыве нужно, чтобы задаваемые $n_1 + 1$ величины были связаны $s_1 + s_2 + 1 - n_2$ соотношениями. Аналогичные заключения можно сделать, если считать известными величины справа от разрыва и его скорость.

Таким образом, возможны следующие типы разрывов, характеризуемые соотношениями

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{I} & n_2 = s_1 + s_2 + 1 = n_1 & & \\
\mathrm{II} & n_2 = s_1 + s_2 + 1 < n_1 & \mathrm{II}' & n_1 = s_1 + s_2 + 1 < n_2 \\
\mathrm{III} & n_2 < s_1 + s_2 + 1 = n_1 & \mathrm{III}' & n_1 < s_1 + s_2 + 1 = n_2 \\
\mathrm{IV} & n_2 < s_1 + s_2 + 1 < n_1 & \mathrm{IV}' & n_1 < s_1 + s_2 + 1 < n_2 \\
\mathrm{V} & s_1 + s_2 < n_1 \quad s_1 + s_2 + 1 < n_2 & & \\
\mathrm{VI} & n_1 < s_1 + s_2 + 1 \quad n_2 < s_1 + s_2 + 1 & &
\end{array}
\qquad (1.1)
$$

Разрывы, удовлетворяющие соотношениям II′, III′, IV′, не представляют самостоятельных типов, а получаются из II, III, IV путем перестановки индексов 1 и 2.

Для разрывов типа I, II, II′, III′, IV′, V величины слева от разрыва и его скорость могут задаваться произвольно. Для разрывов типа III, IV, VI эти величины должны быть связаны $s_1 + s_2 + 1 - n_2$ соотношениями. Из соотношений на разрыве величины справа от разрыва для разрывов типа I, II, III, III′, IV, VI определяются однозначно, а для разрывов типа II′, IV′, V — с точностью до $n_2 - (s_1 + s_2 + 1)$ произвольных параметров.

К типу I относятся, например, газодинамические и магнитогидродинамические ударные волны и детонация. Горение в газовой динамике и магнитной гидродинамике относится к типу VI.

В случае ионизующих ударных волн среда перед ударной волной при заданном значении нормальной составляющей магнитного поля характеризуется девятью величинами ρ, T, $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{E}_\tau$, а за ударной волной — семью, так как E_τ выражается через v и $\mathbf{H}$. Число $s_1 + s_2 + 1$ граничных условий на ионизующей ударной волне различно для различных типов волн [3–5]. Медленная сверхзвуковая ионизующая волна (семь соотношений) относится к типу II. Промежуточная сверхзвуковая и медленная дозвуковая волны (восемь соотношений) относятся к типу IV. Быстрая сверхзвуковая и промежуточная дозвуковая волны (девять соотношений) относятся к типу III.

2. Структура разрывов и дополнительные граничные условия. Рассмотрим структуру разрывов, разделяющих различные среды, и из условия существования структуры найдем полное число граничных условий, связывающих значения величин при $x = -\infty$ и $x = \infty$. Изучение структуры будет проводиться во многом аналогично тому, как это было сделано в случае одной среды [11].

Будем считать, что каждая из сред, разделенных поверхностью разрыва $x = 0$, описывается системой уравнений вида

$$A_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial t} + B_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial x} + C_i^{(\alpha)} + D_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_j^{(\alpha)}}{\partial x^2} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N_\alpha) \tag{2.1}$$

$$\alpha = 1 \text{ при } x < 0, \quad \alpha = 2 \text{ при } x > 0$$

Здесь $A_{ij}^{(\alpha)}$, $B_{ij}^{(\alpha)}$, $C_i^{(\alpha)}$, $D_{ij}^{(\alpha)}$ — функции $u_k^{(\alpha)}$ $\alpha = 1{,}2$. Некоторые из $u_k^{(1)}$ могут совпадать с некоторыми из $u_k^{(2)}$. В частном случае, когда рассматривается структура разрыва в одной среде, все переменные $u_k^{(1)}$ совпадают с $u_k^{(2)}$ и системы (2.1) при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ не отличаются одна от другой.

Относительно системы (2.1) будем предполагать, что стационарные решения этой системы непрерывны (для этого достаточно, чтобы у системы (2.1) не существовало характеристик неподвижных относительно разрыва). Кроме того, будем предполагать, что все периодические в пространстве волны малых возмущений, описываемые системой (2.1) и распространяющиеся по однородному фону, затухают (такие системы называются диссипативными [11]). Эти условия выполнены, если матрица D_{ij} достаточно богата элементами; так, в случае магнитной гидродинамики достаточно, чтобы были отличны от нуля теплопроводность, объемная и магнитная вязкость.

Уравнения «идеальной» среды, соответствующие системе (2.1), представляют собой уравнения, которым подчиняются крупномасштабные возмущения и получаются приравниванием нулю в системе (2.1) членов с производными наинизшего порядка

$$C_i^{(\alpha)} (u_k^{(\alpha)}) = 0 \tag{2.2}$$

$$A_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial t} + B_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

Будем рассматривать случай, когда независимых уравнений (2.2) меньше N_α. Тогда можно выразить некоторые из переменных $u_k^{(\alpha)}$ через остальные и подставить в уравнения (2.3). Будем предполагать, что полученная таким образом идеальная система — гиперболическая. Порядок ее обозначим через n_α, а через s_α — число характеристик идеальной системы, уходящих от разрыва.

Будем рассматривать непрерывные решения системы (2.1) в каждой из областей $x < 0$ и $x > 0$, удовлетворяющие на плоскости $x = 0$ некоторой системе граничных условий, связывающих $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$. Структуру разрыва представляют те решения, которые при $x \to (-1)^\alpha \infty$ стремятся к постоянным значениям $u_{k\infty}^{(\alpha)}$. Очевидно, $u_{k\infty}^{(\alpha)}$ должны удовлетворять системе (2.2). Граничные условия на границе раздела сред могут выражать непрерывность некоторых величин или изменение величин, связанное с изменением свойств среды при переходе через поверхность разрыва.

Число граничных условий связано со свойствами уравнений (1.1) и будет определено ниже. Линеаризуем систему (1.1) относительно значений $u_\infty^{(\alpha)}$, и рассмотрим решения вида $\exp i\,(kx - \omega t)$. Из уравнения (1.1) связь ω и k находится в виде алгебраического уравнения

$$D^{(\alpha)}(\omega, k) = 0 \tag{2.4}$$

Из уравнения (2.4) для каждого ω можно найти набор значений $k_1(\omega)$, $k_2(\omega), \ldots, k_{M_\alpha}(\omega)$, где M_α — порядок системы (2.1). Так как, согласно предположению, любое периодическое в пространстве малое возмущение затухает, то при $\operatorname{Im}\omega > 0$ нет корней k_i, лежащих на действительной оси комплексной плоскости k. Функции $k_i(\omega)$ не имеют полюсов в верхней полуплоскости ω и, следовательно, непрерывны, так как в окрестности полюса всегда нашлись бы действительные значения k, соответствующие ω с $\operatorname{Im}\omega > 0$. Корни, $k_i(\omega)$, лежащие при $\operatorname{Im}\omega > 0$ в верхней полуплоскости k, соответствуют волнам, распространяющимся направо, а корни, лежащие в нижней полуплоскости, соответствуют волнам, распространяющимся влево. Таким образом, при $\operatorname{Im}\omega > 0$ волны, уходящие от поверхности разрыва, затухают при удалении от него, а приходящие волны растут при увеличении $|x|$. Обозначим число волн, уходящих от разрыва влево и вправо, через p_1 и p_2, а число волн, приходящих к разрыву,— через q_1 и q_2.

Граничные условия на границе сред должны определять амплитуды расходящихся волн и движение разрыва. Поэтому число граничных условий должно быть равно $p_1 + p_2 + 1$. Последнее заключение представляет собой условие эволюционности для диссипативных сред. Аналогичное заключение о числе граничных условий на неподвижной границе для произвольной системы уравнений доказано в работе [12].

В случае одинаковых сред $p_1 + p_2 = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ уравнений должны выражать условия непрерывности величин u_j и первых производных по x от тех u_m, вторые производные которых содержит система (2.1). Еще одно граничное условие должно задавать положение поверхности, на которой эти условия выставляются.

При изучении стационарных решений необходимо рассмотреть решения вида $\exp i\,(kx - \omega t)$ в пределе при $\omega \to 0$. Если $\omega \to 0$ из верхней полуплоскости, то ни один корень $k_i(\omega)$ не может пересечь действительную ось k и не может стремиться к действительному значению, отличному от нуля, так как, согласно предположению, все периодические малые возмущения затухают со временем. Некоторые из $k_i(\omega)$ будут стремиться к нулю при $\omega \to 0$. Очевидно, возмущения, соответствующие этим корням, будут описываться идеальной системой (2.2), (2.3) и поэтому число корней, стремящихся к нулю, равно n_α.

Из этих n_α корней те корни $k_j(\omega)$, которые соответствуют волнам идеальной системы, распространяющимся направо, при $\omega \to 0$ ($\operatorname{Im}\omega > 0$) стремятся к нулю из верхней полуплоскости комплексной плоскости k, а корни, соответствующие волнам, распространяющимся влево, подходят к нулю из нижней полуплоскости.

Подсчитывая число корней, остающихся при $\omega = 0$ в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости k, получим, что $p_\alpha - s_\alpha$ волн затухают при удалении от разрыва, n_α волн не зависят от x и $q_\alpha - n_\alpha + s_\alpha$ волн растут при удалении от разрыва. Обозначим некоторые из производных $\partial u_m^{(\alpha)} / \partial x$ через $w_m^{(\alpha)}$, $m = n_\alpha + 1, n_\alpha + 2, \ldots, M_\alpha$ таким образом, чтобы система (2.1) содержала производные только первого порядка по x. В пространстве $V^{(\alpha)}$ переменных $u_i^{(\alpha)}$, $w_m^{(\alpha)}$ интегральные кривые, которые при $|x| \to \infty$ не уходят в бесконечность, стремятся к особым точкам, лежащим на некоторых поверхностях $\Sigma^{(\alpha)}$, задаваемых уравнениями (2.2) совместно с уравнениями $w_m = 0$.

Размерность поверхности $\Sigma^{(\alpha)}$ равна n_α, что соответствует тому, что линеаризованная система при $\omega = 0$ имеет n_α решений, не зависящих от x. Каждая точка поверхности $\Sigma^{(\alpha)}$ представляет собой особую точку системы (2.1) с $p_\alpha + q_\alpha - n_\alpha$ собственными направлениями, соответствующими отличным от нуля значениям $k_i(0)$. Из них, согласно предыдущему, по $p_\alpha - s_\alpha$ собственным направлениям интегральные кривые входят в особую точку при $x \to (-1)^\alpha \infty$, а по остальным — выходят.

Совокупность интегральных кривых, входящих при $x \to (-1)^\alpha \infty$ в какую-либо из особых точек, характеризуются $p_\alpha - s_\alpha + n_\alpha$ произвольными постоянными, из которых n_α задают положение особой точки на поверхности $\Sigma^{(\alpha)}$ а $p_\alpha - s_\alpha$ постоянных характеризуют способ приближения интегральной кривой к этой особой точке. В качестве величин, характеризующих положение особых точек, можно выбрать $u_{k\infty}^{(\alpha)}$, которые задают состояние идеальной среды перед и за скачком, а постоянные, характеризующие способ приближения интегральной кривой к особой точке, обозначим через $C_a^{(\alpha)}$, $a = 1, 2, \ldots p_\alpha - s_\alpha$.

Структура ударной волны представляется отрезками интегральных кривых в пространствах $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$, которые при $x \to (-1)^\alpha \infty$ входят в особые точки, а при $x = 0$ удовлетворяют $p_1 + p_2 + 1$ граничным условиям на границе сред. Вообще говоря, не любые две особые точки, одна из которых лежит на $\Sigma^{(1)}$, а другая на $\Sigma^{(2)}$, могут быть связаны решением, представляющим структуру ударной волны. Для того чтобы такое решение существовало, координаты особых точек $u_{k\infty}^{(1)}$ и $u_{k\infty}^{(2)}$ должны удовлетворять некоторым соотношениям. Найдем число этих соотношений.

Граничные условия на границе сред можно записать в виде

$$F_b\,(u_{k\infty}^{(\alpha)},\ C_a^{(\alpha)}) = 0 \tag{2.5}$$

$$(b = 1, 2, \ldots,\ p_1 + p_2 + 1;\ a = 1, 2, \ldots, p_\alpha - s_\alpha,\ \alpha = 1, 2)$$

Исключая из этих уравнений величины $C_a^{(\alpha)}$, получим $s_1 + s_2 + 1$ уравнений, связывающих $u_{k\infty}^{(1)}$ и $u_{k\infty}^{(2)}$

$$f_r\,(u_{k\infty}^{(1)},\ u_{k\infty}^{(2)}) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s_1 + s_2 + 1) \tag{2.6}$$

Таким образом, условия эволюционности оказываются выполненными. Вид уравнений (2.6), вообще говоря, определяется свойствами диссипативной системы (2.1). Однако, как уже говорилось в п. 1, во многих случаях соотношения (2.6) или часть из них бывает известна и не зависит от свойств диссипативной системы.

Примеры подобных соотношений дают законы сохранения массы, импульса и энергии, а также соотношения, выражающие непрерывность касательной составляющей электрического и нормальной составляющей магнитного полей. Такие соотношения в п. 1 были названы основными, а остальные соотношения (2.6), зависящие, вообще говоря, от свойств диссипативной системы — дополнительными.

Исключение переменных $C_a^{(\alpha)}$ из уравнений (2.5) для получения соотношений (2.6) возможно, если существует хотя бы одно нетривиальное решение уравнений (2.5) и если определитель хотя бы одного минора наибольшего порядка матрицы $G = \| \partial F_b / \partial C_a^{(\alpha)} \|$ отличен от нуля. Если не выполнено первое условие, то решения, представляющего структуру разрыва, вообще не существует. Существование структуры нужно специально проверять для каждого конкретного случая. Если матрица G вырождена, то коэффициенты $C_a^{(\alpha)}$ определяются неоднозначно, а число уравнений (2.5) будет превышать $s_1 + s_2 + 1$. Этот случай очевидно соответствует неэволюционным разрывам. Решение, представляющее структуру таких разрывов, если оно существует, определяется неоднозначно. Вырождение матрицы G как и всякое вырождение можно считать исключительным случаем. Однако, если в качестве начальной и конечной особой точек при построении структуры разрыва выбираются точки, для которых $s_1 + s_2 + 1$ меньше числа основных соотношений, то в этом случае вырождение матрицы G предопределено. Примеры неэволюционных волн известны в магнитной гиродинамике.

В некоторых случаях может оказаться, что по одну сторону от разрыва $p_\alpha - s_\alpha = 0$ или что в силу соотношений (2.5) все $C_a^{(\alpha)}$ с этой стороны равны нулю. Тогда непрерывное изменение величин в решении, представляющем структуру разрыва, будет происходить только по одну сторону от границы раздела сред, а с другой стороны все величины будут постоянны. В тех случаях, когда указанные условия выполняются с обеих сторон, к границе раздела сред примыкают области с постоянными значениями всех величин. Если некоторые из $u_k^{(1)}$ совпадают с $u_k^{(2)}$ и условия на границе сред выражают непрерывность этих величин или их производных, то в последнем случае идеальные переменные непрерывны на разрыве. Такого типа поверхности ионизации и рекомбинации, параллельные магнитному полю, рассматривались в работе [2].

Нетрудно убедиться, что вывод относительно полного числа граничных условий, которым удовлетворяют идеальные переменные $u_{k\infty}^{(1)}$ и $u_{k\infty}^{(2)}$ на разрыве, остается в силе и в том случае, когда внутри структуры ударной волны есть слой, который описывается системой уравнений, отличной от тех, которые действуют справа и слева от этого слоя. Существование такого типа ударных волн в газе, находящемся в магнитном поле, было показано в работе [13], причем проводимость газа равна нулю перед и за волной и отлична от нуля только в некотором слое внутри структуры такой волны.

Заметим, что структура разрывов рассматривалась выше как стационарное решение диссипативных уравнений. Однако существуют разрывы такие, как тангенциальный разрыв скорости в идеальной жидкости или вращательный разрыв в магнитной гидродинамике, которые не имеют стационарной структуры. Скорость распространения разрывов, не имеющих стационарной структуры, совпадает с одной из характеристических скоростей. На такие разрывы выводы работы не распространяются.

3. Разрывы рекомбинации в газе при наличии произвольно ориентированного магнитного поля. Рассмотрим в качестве иллюстрации к высказанным выше общим соображениям разрывы рекомбинации в газе, находящемся в магнитном поле.

Будем считать, что магнитное поле составляет произвольный угол с поверхностью разрыва. Волны рекомбинации, параллельные магнитному полю, рассматривались ранее в работе [2].

Проводимость газа будем считать функцией плотности и температуры $\sigma = \sigma(\rho, T)$, причем $\sigma > 0$ в некоторой области переменных ρ и T, граница которой задается уравнением $F(\rho, T) = 0$ и тождественно равна нулю вне этой области.

Основные граничные условия следуют из непрерывности потоков массы, импульса (три уравнения), энергии, непрерывности касательной составляющей электрического поля (два уравнения) и нормальной составляющей магнитного поля.

При получении конкретного вида дополнительных граничных условий все диссипативные коэффициенты предполагаются значительно меньше магнитной вязкости.

Уравнения, описывающие структуру волн рекомбинации, совпадают с уравнениями, описывающими структуру ионизующих волн. Отличие заключается в том, что в данном случае требуется найти интегральную кривую, идущую от одной из особых точек, расположенных в области $\sigma > 0$ к одной из особых точек в области $\sigma = 0$, а не наоборот, как в случае ионизующих волн. Используя сведения об особых точках и характере интегральных кривых, изложенные в работе [5], посвященной ионизующим ударным волнам, нетрудно построить решения, представляющие структуру волн рекомбинации. Методы построения подобных решений хорошо развиты [1-5,13], поэтому ограничимся здесь только сводкой окончательных результатов.

Будем обозначать через u_1 и u_2 нормальную составляющую скорости газа относительно разрыва перед и за ним, через a_2, ρ_2, T_2 — газодинамическую скорость звука, плотность и температуру за разрывом, через a_+, a_A и a_- — скорости распространения быстрых альфвеновских и медленных возмущений перед разрывом.

Выпишем условия на скорости газа u_1 и u_2 для четырех возможных типов волн рекомбинации и дополнительные граничные условия, полученные для случая, когда магнитная вязкость много больше остальных диссипативных коэффициентов. При других соотношениях между диссипативными коэффициентами дополнительные граничные условия могут изменить свой вид, но число их не изменится

$$1. \quad u_1 > a_+, \quad u_2 > a_2, \quad F(\rho_2, T_2) = 0 \tag{3.1}$$

$$2. \quad a_A < u_1 < a_+, \quad u_2 < a_2, \quad F(\rho_2, T_2) = 0 \tag{3.2}$$

$$3. \quad a_+ < u_1 < a_+, \quad u_2 > a_2, \quad F(\rho_2, T_2) = 0, \quad H_y = f(H_z^2) \tag{3.3}$$

$$4. \quad a_- < u_1 < a_A, \quad u_2 < a_2, \quad F(\rho_2, T_2) = 0, \quad \Delta H_z \equiv H_{z1} - H_{z2} = 0 \tag{3.4}$$

Последнее отношение (3.3) представляет уравнение интегральных кривых, которые выходят при увеличении x из особой точки, соответствующей состоянию, перед волной. Вид функции f может быть определен либо путем численного интегрирования либо путем построения решения в виде ряда. Соотношения (3.3) — (3.4) написаны в системе координат, в которой $H_{z1} = 0$. Для волн типа (3.4) справедливо также неравенство $u_1 < a_1$, где a_1 — газодинамическая скорость звука перед волной.

Если зависимость проводимости газа от ρ и T такова, что проводимость может быть отлична от нуля перед некоторой газодинамической ударной волной и равна нулю за ней, то, кроме перечисленных, возможны волны рекомбинации еще двух типов:

$$5. \quad u_1 > a_+, \quad u_2 < a_2 \tag{3.5}$$

В этом случае дополнительных соотношений нет.

$$6. \quad a_- < u_1 < a_A, \quad u_2 < a_2, \quad \Delta H_y \equiv H_{y1} - H_{y2} = 0, \quad \Delta H_z = 0 \tag{3.6}$$

Для волн этого типа имеет место неравенство $u_1 > a_1$.

Во всех перечисленных волнах происходит изменение гидродинамических величин и магнитного поля (за исключением волн типа (3.6), в которых магнитное поле не меняется). Кроме этих волн, существуют волны рекомбинации, в которых гидродинамические величины и магнитное поле непрерывно. Их положение и движение в пространстве определяется полем температуры и плотности непрерывного течения согласно уравнению $F(\rho, T) = 0$. Последнее равенство, а также равенства $\Delta H_y = 0$, $\Delta H_z = 0$ можно считать тремя дополнительными соотношениями на этих волнах. Скорость газа $u = u_1 = u_2$ на таких волнах должна удовлетворять одному из неравенств

$$u < a_-, \qquad a < u < a_A \tag{3.7}$$

где $a = a_1 = a_2$ — газодинамическая скорость звука.

Поступила 27 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизующих газ. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 1.
2. Butler D. S. One dimensional flow an ionizing gas. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 1.
3. Taussig R. T. Comparsion of oblique, normal and transverse ionizing shock waves. Phys. of Fluids, 1967, vol. 10, No. 6.
4. Cowley M. D. Gas-ionizing shocks in magnetic field. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, No. 1.
5. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизующих газ, находящийся в электромагнитном поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 1.
6. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 3.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953, стр. 569—596.
8. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
9. Половин Р. В., Демуцкий В. П. О магнитогидродинамическом горении. ЖЭТФ, 1961, т. 40, № 6.
10. Soubmayer. Sur les chocs dans un milien magnetodynamique reactif avec application an probleme du piston. Thes. Doct. sci. math. Fac. sci Univ. Paris Rapp. CEA, 1967, N 3137.
11. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
12. Hersh R. Boundary Conditions for equations of evolution. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1964, vol. 16, No. 4.
13. Жилин Ю. Л. Особый случай взаимодействия сильной стационарной ударной волны в газе с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.