ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. К. Персидский (Алма-Ата)

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений (1). Налагая ограничения на функции в правой части и на корни векового уравнения, получаем ряд теорем об устойчивости, устойчивости в целом и неустойчивости нулевого решения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}\varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + p_{sn}\varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

где P_{sk} — вещественные постоянные, а функции φ_s определены и непрерывны в некоторой области

$$(h)\ t \geqslant 0,\ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < A, \qquad (\varphi_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0)$$

В отдельных случаях заключение об устойчивости или о неустойчивости нулевого решения системы (1) можно сделать на основании свойств корней уравнения

$$\det \| p_{sk} - \lambda\delta_{sk} \| = 0 \tag{2}$$

Например, имеют место следующие теоремы

Теорема 1. Пусть правые части системы (1) таковы, что функция

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} a_s\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

где хотя бы одно из чисел $a_s \neq 0$ будет знакоопределенной. Если при этом уравнение 2) не имеет корней, равных нулю, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Для доказательства теоремы найдем линейную форму

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s \tag{4}$$

полная производная которой удовлетворяла бы, в силу системы (1), соотношению

$$v' = \sum_{s=1}^{n} b_s [p_{s1}\varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + p_{sn}\varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n)] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_s\varphi_s(t, x_1, \ldots x_n) = u(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

Приравняв в обеих частях этого равенства коэффициенты при $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$, приходим к системе уравнений

$$P_{1s}b_1 + \ldots + P_{ns}b_n = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

определитель которой отличен от нуля.

Таким образом, искомая форма v существует и, как нетрудно видеть, удовлетворяет всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 2. Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию

$$p_{sk} \geqslant 0 \quad \text{при } s \neq k \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

и существуют такие положительные постоянные α_s, что функция

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sgn} x_s \tag{7}$$

где $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $x_s = 0$, будет положительной знакопостоянной. Если при этом все корни уравнения (2) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение рассматриваемой системы устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

коэффициенты которой p_{sk} совпадают с соответствующими коэффициентами системы (1).

Из леммы 4.1, приведенной в книге М. А. Красносельского [1], следует, что при выполнении условия (6) область

$$(G) \ t \geqslant 0, \ x_s \geqslant 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будет положительно инвариантным множеством для системы (8).

Выберем линейную форму

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \beta_s x_s \tag{9}$$

полная производная которой удовлетворяла бы в области G в силу системы (8) следующему соотношению:

$$v' = \sum_{s=1}^{n} \beta_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_{s=1}^{n} \alpha_s x_s \tag{10}$$

Выбор указанной формы v возможен в силу того, что определитель системы уравнений

$$p_{1s}\beta_1 + \ldots + p_{ns}\beta_s = -\alpha_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

отличен от нуля. При этом все числа β_s, определяемые из этой системы, будут положительными.

Действительно, на основании (10) легко показать, что все числа $\beta_s \neq 0$; причем, если хотя бы одно из чисел $\beta_s < 0$, то форма (9) будет удовлетворять в силу системы (8) в области G всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, а нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво. Итак, все $\beta_s > 0$.

Положим

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \beta_s |x_s| \tag{12}$$

На основании (6) и (11) нетрудно заключить, что правая полная производная функции V в области G будет удовлетворять в силу системы (1) неравенству:

$$V' \leqslant \sum_{s=1}^{n} (\beta_1 p_{1s} + \ldots + \beta_n p_{ns}) \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sgn} x_s =$$

$$= -\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sgn} x_s = -U(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Тем самым для системы (1) будут выполнены все условия теоремы Ляпунова об устойчивости.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Если при выполнении условий теоремы 2 функция $U(t, x_1, \ldots, x_n)$, определяемая соотношением 7, будет положительной знакоопределенной при некоторых $\alpha_s > 0$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво равномерно при t_0 и x_{s_0}.

Следствие. Пусть область h определения правых частей системы (1) задается неравенствами $t \geqslant 0$, $\| x \| < \infty$.

Если в этой области выполняются условия теоремы 3, то нулевое решение рассматриваемой системы уравнений асимптотически устойчиво в целом равномерно по t_0 и x_{s0}.

Действительно, в этом случае форма (12) будет удовлетворять в силу системы (1) всем условиям теоремы об асимптотической равномерной устойчивости в целом, приведенной работе [2].

Рассмотрим далее систему уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + p_{sn}\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) + R_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

где p_{sk} — вещественные постоянные, φ_s — некоторые многочлены относительно величин $x_1, \ldots, x_n$, степени которых не выше чем m, а функции R_s разлагаются в некоторой окрестности начала координат по степеням x_s в ряды, начинающиеся членами порядка не ниже чем $m + 1$.

Теорема 4. Пусть система (13) такова, что функция

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} a_s\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \tag{14}$$

где хотя бы одно из чисел $a_s \neq 0$ будет знакоопределенным. Если при этом уравнение (2) не имеет корней, равных нулю, то нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Действительно, в рассматриваемом случае в некоторой достаточно малой окрестности начала координат полная производная линейной формы (4) будет в силу системы (13) знакоопределенной функцией.

Теорема 5. Пусть коэффициенты p_{sk} системы (13) удовлетворяют условию (6). Если при этом функция

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sgn} x_s \quad (a_0 > 0) \tag{15}$$

где $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $x_s = 0$, а, будет положительной знакоопределенной и все корни уравнения (2) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение рассматриваемой системы уравнений асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и x_{s0}.

В заключение рассмотрим несколько примеров. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} x' &= -2xy + R_1(x, y, z) \\ y' &= 2yz + y^2 + R_2(x, y, z) \\ z' &= zy - 2z^2 - x^2 + R_3(x, y, z) \end{aligned} \tag{16}$$

где разложения функций R_s в ряды по степеням $x, y,$ и z начинаются в некоторой окрестности начала координат членами не ниже третьего порядка. Положим

$$\varphi_2 = 2xy, \ \varphi_2 = 2yz + y^2, \ \varphi_3 = zy - 2z^2 - x^2$$

Затем выберем числа $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ и $\alpha_3 = 2$, тогда функция

$$u(x, y, z) = \sum_{s=1}^{3} \alpha_s\varphi_s = -2x^2 - y^2 - 4z^2$$

будет отрицательной знакоопределенной. При этом уравнение (2) рассматриваемой системы не будет иметь корней, равных нулю. Отсюда, на основании теоремы 4 заключаем, что нулевое решение системы (16) неустойчиво.

Рассмотрим далее систему уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}\varphi_1(x_1) + \ldots + p_{sn}\varphi_n(x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

где p_{sk} — вещественные постоянные, а $\varphi_s(x_s)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\varphi_s(0) = 0; \quad \varphi_s(x_s) \operatorname{sgn} x_s > 0 \text{ при } x_s \neq 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

Если при $k = 1, \ldots, l$, где $l < n$, $\varphi_k(x_k) = x_k$, то приходим к системе регулирования с одним или несколькими исполнительными органами.

Пусть коэффициенты системы (17) удовлетворяют условию (6), а все корни уравнения (2) имеют отрицательные вещественные части. Тогда на основании следствия из теоремы 3 заключаем, что нулевое решение рассматриваемой системы будет равномерно асимптотически устойчиво в целом при любых непрерывных функциях $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих условию (18).

Замечание. Если при выполнении сделанных выше предположений относительно правых частей системы (17) уравнение (2), не имея корней равных нулю, имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то тогда нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Действительно, при выполнении условий (6) и (18) область G будет [1] положительно инвариантным множеством для системы (17). При этом нетрудно убедиться в том, что функция v вида (4), коэффициенты которой b_s, определяются из системы уравнений

$$p_{1s}b_1 + \ldots + p_{ns}b_n = 1 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

будет удовлетворять в области G в силу системы (17) всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Поступила 6 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966, стр. 62—64.
2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, стр. 345—350.

О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА, РАЗДЕЛЯЮЩИХ ИДЕАЛЬНЫЕ СРЕДЫ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ. ВОЛНЫ РЕКОМБИНАЦИИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. Г. Куликовский (Москва)

Известным примером поверхности разрыва разделяющей идеальные среды с различными свойствами являются магнитогидродинамические ударные волны, ионизующие газ [1-5]. В этом случае поведение газа с одной стороны от поверхности разрыва описывается уравнениями газовой динамики, а с другой,— уравнениями магнитной гидродинамики. Было показано, что в ряде случаев граничных условий, задаваемых законами сохранения, недостаточно для описания ионизующих ударных волн, и необходимо использовать дополнительные граничные условия, вытекающие из требования существования непрерывного решения, представляющего структуру волны. Вид дополнительных условий зависит от отношений диссипативных коэффициентов газа.

Ниже рассматриваются общие свойства поверхностей разрыва, разделяющих две произвольные идеальные среды (в частном случае это могут быть одинаковые среды). Находится число дополнительных соотношений, которые следуют из условия существования решения, представляющего структуру такой волны и, вообще говоря, зависят от диссипативных процессов в узком слое, представляющем ударную волну.

В п. 1 дана классификация эволюционных разрывов, разделяющих различные среды. В п. 2 проводится общее рассмотрение структуры таких разрывов, получение дополнительных граничных условий и обсуждение условий эволюционности. В п. 3 в качестве примера рассмотрены волны рекомбинации (т. е. волны при прохождении через которые проводимость газа меняется от бесконечности до нуля) при наличии произвольно ориентированного магнитного поля.