ЛИТЕРАТУРА

1. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., 1890, Bd. 37, H. 2.
2. Некрасов П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, стр. 508—517.
3. Некрасов П. А. О движении твердого тела около неподвижной точки. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 5, № 2, стр. 17—37.
4. Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Матем. сб., 1896, т. 18, № 2, стр. 161—274.
5. Млодзеевский Б. К., Некрасов П. А. Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 6, вып. 1, стр. 43—52.
6. Чаплыгин С. А. По поводу локсодромического маятника Гесса. В кн. С. А. Чаплыгина Собр. соч., т. 1, М., Гостехтеориздат, 1948, стр. 133—135.
7. Bressan A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess. Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova, 1957, t. 27, N 2. (Рус. пер.: Брессан А. О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса. Период. сб. пер. иностр. статей, Механика, 1958, № 6, (52), стр. 153—158).
8. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 5, вып. 2.
9. Харламов П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5, стр. 1048—1050.
10. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела, ч. I. Новосибирск, 1965, Новосиб. ун-т.
11. Харламов П. В. Об уравнениях движения гиростата. Тр. Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1962. Казань, 1964.
12. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, стр. 703—707.

К ДИНАМИКЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Фролов

(Москва)

По существующим представлениям одной из основных причин кавитационной эрозии материалов являются интенсивные колебания кавитационных пузырьков без их полного захлопывания. Когда размер кавитационных пузырьков достигает некоторого предела, в окружающей их жидкости могут возникать достаточно сильные импульсы давления, способные вызвать при помощи локальных циклических нагрузок эрозию [1,2].

Колебания кавитационных пузырьков в вязкой жидкости имеют ряд отличительных особенностей, обусловленных вязкостью жидкости. Принципиальное влияние вязкости отмечено в работах [3,4] при теоретическом исследовании поведения пустой сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Было обнаружено существование двух различных типов движения: пузырьки, начальный размер которых меньше критического, заполняются медленно за неограниченное время; заполнение больших пузырьков происходит быстро с бесконечно большой скоростью в стадии фокусировки.

Ниже найдено, что в случае газонаполненного пузырька, находящегося в вязкой несжимаемой жидкости, в зависимости от начального радиуса пузырька также существуют два режима движения: колебательный и монотонно апериодический. В работе [5] на основе анализа размерностей приведена качественная формула для определения критического размера пузырьков D_*, разграничивающего инерционный и безынерционный режимы расширения газовой сферы в вязкой жидкости

$$D_* = \left(\frac{\mu\tau_*}{\rho}\right)^{1/2}$$

где μ, ρ — коэффициент динамической вязкости и плотность жидкости соответственно, τ_* — характерное время процесса, определяемое экспериментально. Ниже выводится формула критического диаметра пузырька газа.

Пусть в безграничной вязкой несжимаемой жидкости находится сферический газовый пузырек. Будем считать, что давление и плотность газа в каждой точке внутри пузырька одинаковы. Это условие, очевидно, выполняется, если скорость стенки газовой сферы значительно меньше скорости звука в газе при данной температуре. Вязкость газа предполагается пренебрежительно малой. Изменение радиуса пузырька описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка [5]

$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{\rho R}\frac{dR}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho R} + \frac{p_0 - p'}{\rho} = 0 \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$R = R_0, \; dR/dt = 0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь $R = R(t)$ — радиус пузырька, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, p_0 — постоянное давление жидкости вдали от пузырька, p' — давление газа внутри пузырька.

Считая процесс расширения и сжатия газа в пузырьке адиабатическим, можно связать давление p' в произвольный момент времени t с радиусом пузырька

$$p' = p_0'\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n} \qquad (2)$$

где n — показатель адиабаты, p'_0 — начальное давление газа в пузырьке. Для адиабатических пульсаций [6] паровоздушного пузырька в воде $n = 4/3$. При этом предполагается, что диффузия газа на границе пузырька и жидкости отсутствует.

Несмотря на ряд упрощающих предположений, нахождение общего решения уравнения (1) составляет значительные трудности. Однако некоторые выводы о явлении кавитации, описываемом этим уравнением, можно сделать на основе изучения общих свойств интегральных кривых уравнения (1) на фазовой плоскости. Этот метод успешно применяется при качественном исследовании нелинейных дифференциальных уравнений.

Введем безразмерные переменные

$$u = \frac{R}{R_0}, \quad \tau = \frac{t}{R_0}\left(\frac{p_0'}{\rho}\right)^{1/2} \qquad (3)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$uu^{\cdot\cdot} + \frac{3}{2}u^{\cdot 2} + \frac{4\mu}{R_0\sqrt{\rho p_0'}}\frac{u^{\cdot}}{u} + \frac{2\sigma}{R_0 p_0'}\frac{1}{u} + \frac{p_0}{p_0'} - u^{-4} = 0 \qquad (4)$$

Полагая

$$u^{\cdot} = \frac{du}{d\tau} = y(u), \quad a = \frac{4\mu}{R_0\sqrt{\rho p_0'}}, \quad b = \frac{2\sigma}{R_0 p_0'}, \quad c = \frac{p_0}{p_0'} \qquad (5)$$

сведем (4) к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{du}=\frac{1-cu^4-bu^3-ayu^3-1.5y^2u^4}{yu^5} \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет одну изолированную особую точку [7]

$$y=0, \quad u=u_* \tag{7}$$

Здесь u_* — единственный положительный корень уравнения

$$1-bu^3-cu^4=0 \tag{8}$$

Отметим, что u_* может быть как >1, так и <1.

В окрестности особой точки уравнение (6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(4cu_*^3+3bu_*^2)\,x-ayu_*^3+P_2(x,y)}{yu_*^5+Q_2(x,y)} \tag{9}$$

Здесь $x=u-u_*$, а функции $P_2(x,y)$ и $Q_2(x,y)$ — малые второго порядка относительно малых величин первого порядка x, y.

Так как в рассматриваемом случае

$$(3b+4cu_*)\,u_*^7\neq 0$$

то для выяснения типа особой точки составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+au_*\lambda+(3b+4cu_*)\,u_*^3=0 \tag{10}$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$d=(3b+4cu_*)\,u_*^3-{}^1/_4\,a^2u_*^2 \tag{11}$$

Исследование корней характеристического уравнения показывает, что могут представиться две принципиально различные возможности.

1. Корни характеристического уравнения действительные, различные и одного знака ($d<0$). Следовательно, особая точка — узел. Все интегральные кривые из окрестности особой точки входят в нее с одной и той же касательной, уравнение которой

$$y+kx=0, \qquad k=\frac{a+[a^2-4u_*(3b+4cu_*)]^{1/2}}{2u_*^2}$$

Скорость стенки пузырька при $x\to 0$ стремится к нулю линейно.

2. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Особая точка — фокус. Каждая интегральная кривая заключена между двумя логарифмическими спиралями и приближается к точке $y=0$, $u=u_*$, совершая бесконечное число оборотов. Пузырек газа колеблется неограниченное время с уменьшающейся амплитудой.

В промежуточном случае, соответствующем $d=0$, когда характеристическое уравнение (10) имеет кратный корень, особая точка — вырожденный узел. Все интегральные кривые входят в особую точку, касаясь прямой

$$y+\frac{ax}{2u_*^2}=0$$

Критическое значение начального радиуса пузырька, разграничивающее два существенно различных режима поведения пузырька, находится при решении системы двух уравнений

$$d=0,\ 1-bu_*^3-cu_*^4=0 \tag{12}$$

Если начальный радиус пузырька больше критического, имеем фокус, в противном случае — узел.

В идеальной жидкости ($\mu = 0$) уравнение (4) интегрируется в конечном виде

$$y^2u^4 + \frac{2p_0'}{\rho} R_0^4 + \frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho} u^4 + \frac{2\sigma}{\rho} u^3 + c_1 u = 0$$

Здесь c_1 — постоянная интегрирования.

Рассматривая этот интеграл в окрестности особой точки и опуская малые третьего порядка и выше, получим уравнение эллипса

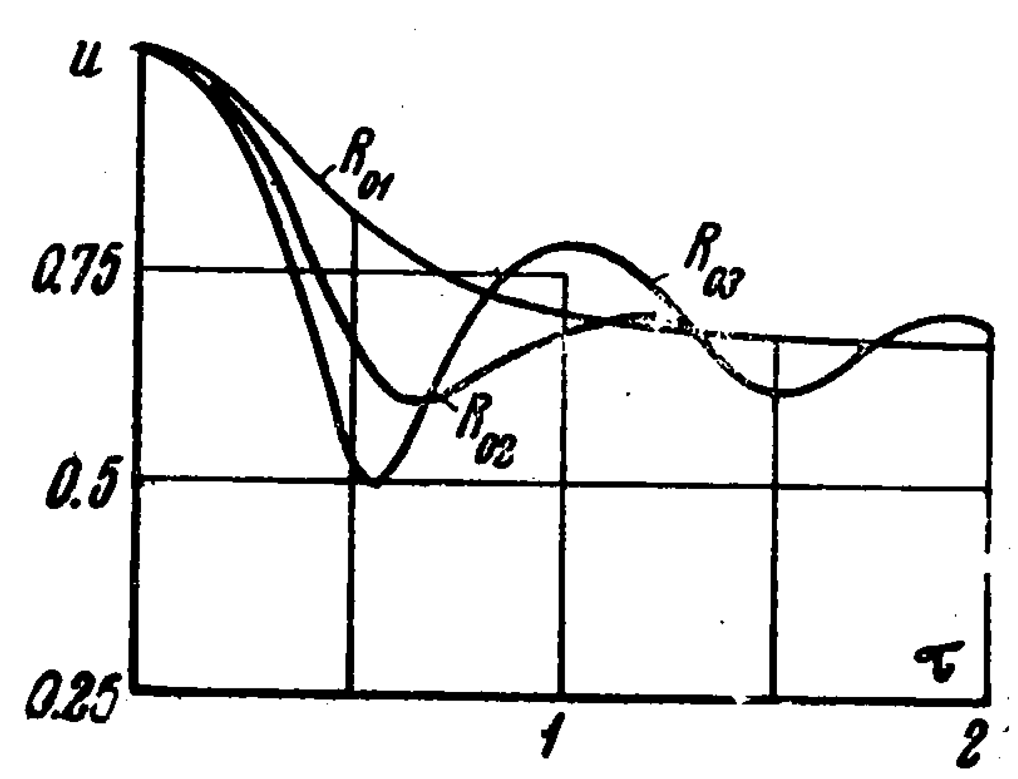
$$y^2u_*^4 + u^2(3bu_* + 4cu_*^2) + c_2y + c_3u + c_4 = 0, \ (c_2, c_3, c_4 = \mathrm{const};\ c_4 < 0)] \quad (13)$$

Следовательно, особая точка является центром. Газовый пузырек совершает незатухающие колебания.

Необходимо отметить, что в отличие от заполнения пустого пузырька в вязкой жидкости, когда учет сил поверхностного натяжения качественно меняет характер захлопывания полости (время заполнения пузырька остается конечным при любом значении коэффициента вязкости [4]), при расширении и сжатии газонаполненного пузырька указанные выше два типа движения пузырька наблюдаются и при отсутствии поверхностного натяжения. При этом изменяется только величина критического радиуса пузырька.

В частности, полагая $b = 0$ в уравнениях (12), находим

$$R_{0*} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho}\,(p_0p_0')^{0.25}} \quad (14)$$



Фиг. 1

Критический размер газовых пузырьков в действительности весьма невелик. Например, при $p_0 = 1\,атм$, $p_0' = 0.2\,атм$ для воды $R_{0*} = 0.178 \cdot 10^{-3}\,мм$, для глицерина $R_{0*} = 0.24\,мм$. На фигуре приведены результаты прямого численного расчета по уравнению (1) при $b = 0$ для значений $R_{01} = 0.15 \cdot 10^{-3}\,мм < R_{0*}$, $R_{03} = 1 \cdot 10^{-3}\,мм > R_{0*}$, $R_{02} = 0.4 \cdot 10^{-3}\,мм > R_{0*}$

Поступила 24 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Numachi F. Kavitationsblasen und Ultraschallwellen am Tragflügelprofil. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1958, Bd. 24, N 4, S. 125—132.
2. Sutton G. W. A photoelastic study of strain waves caused by Cavitation. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
3. Забабахин Е. И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Poritsky H. The collapse or growth of a spherical Bubble or cavity in a viscous fluid. Proc. 1—t U. S. Nat. Congress Appl. Mech. Chicago, 1951, N. J., Amer. Soc. Mech. engr., 1952.
5. Баканов С. П., Рухадзе А.А., Сандомирский В. Б. К теории расширения газового пузырька в вязкой жидкости. Инж.-физ. ж., 1961, № 7.
6. Сиротюк М. Г. Об энергетике и динамике кавитационной области. Акуст. ж., 1967, т. 13, вып. 2.
7. Shu S. S. Note on the collapse of a Spherical cavity in a viscous incompressible fluid. Proc. 1—t U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Chicago, 1951, N. Y., Amer. Soc. Mech. engr., 1952, p. 823—826.