

**ПОДВИЖНЫЙ ГОДОГРАФ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ В РЕШЕНИИ ГЕССА
ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ**

А. М. Ковалев (Донецк)

В отличие от других случаев интегрируемости уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, нахождение компонент угловой скорости тела в подвижных осях в решении Гесса [1] не сводится к квадратурам, а приводится к дифференциальному уравнению Риккати, что существенно осложняет исследование.

Случай интегрируемости, указанный Гессом, изучался многими авторами, в основном аналитическими методами [2-7]. Геометрическая интерпретация движения тела в этом решении дана Жуковским [8], при этом использована промежуточная подвижная система координат.

В предлагаемой работе дано прямое (не использующее промежуточных систем координат) истолкование, основанное на динамических [9,10] и кинематических [11, 12] уравнениях П. В. Харламова.

Отказ от обычно применяемых в этой задаче главных осей координат и использование предложенных П. В. Харламовым специальных осей дало возможность получить сравнительно простое уравнение подвижного годографа угловой скорости.

§ 1 Движение тела в рассматриваемом случае удобно изучать в специальной системе координат, предложенной П. В. Харламовым. Условия Гесса и четвертый интеграл имеют следующий вид [11].

$$a_1 = a_2 = a^*, \quad x = 0$$

Повернем оси координат вокруг первой оси так, чтобы $b_2 = 0$, и выпишем уравнения и интегралы движения

$$\begin{aligned} dy/dt &= b_1 yz - v_2 \Gamma, & dz/dt &= -b_1 y^2 + v_1 \Gamma \\ dv/dt &= a^* (zv_1 - yv_2), & dv_1/dt &= byv_2 - azv, & dv_2/dt &= y(av - bv_1) \\ \frac{1}{2}a^*(y^2 + z^2) - v\Gamma &= E, & yv_1 + zv_2 &= k, & v^2 + v_1^2 + v_2^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Компоненты вектора угловой скорости тела записываются так:

$$\omega_1 = b_1 y, \quad \omega_2 = a^* y, \quad \omega_3 = a^* z \quad (1.2)$$

Когда $b_1 = 0$, приходим к случаю Лагранжа, поэтому в дальнейшем считаем $b_1 \neq 0$. Пусть $b_1 > 0$. Вводя безразмерные переменные y', z', τ, ω_i'

$$y = \sqrt{\Gamma/b_1} y', \quad z = \sqrt{\Gamma/b_1} z', \quad t = \tau / \sqrt{\Gamma b_1}, \quad \omega_i = a^* \sqrt{\Gamma/b_1} \omega_i'$$

и параметры

$$c = 2b_1/a^*, \quad h = E/\Gamma, \quad k' = k\sqrt{b_1/\Gamma} \quad (1.3)$$

получаем из (1.1), (1.2)

$$y' = yz - v_2, \quad z' = -y^2 + v_1 \quad (1.4)$$

$$v' = 2(zv_1 - yv_2)/c, \quad v_1' = yv_2 - 2zv/c, \quad v_2' = y(2v/c - v_1) \quad (1.5)$$

$$y^2 + z^2 - cv = ch, \quad yv_1 + zv_2 = k, \quad v^2 + v_1^2 + v_2^2 = 1 \quad (1.6)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}cy, \quad \omega_2 = y, \quad \omega_3 = z \quad (1.7)$$

Для удобства записи штрих в соотношениях (1.4) — (1.7) опущен, и точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ .

Из уравнений (1.4) с учетом (1.6) находим

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2)' = \sqrt{(y^2 + z^2) \{1 - [(y^2 + z^2)/c - h]^2\} - k^2}$$

$$yz' - zy' = -y(y^2 + z^2) + k$$

Вводим полярные координаты $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Для определения ρ , φ получаем систему двух дифференциальных уравнений

$$\rho \rho' = \sqrt{f(\rho)}, \quad \rho^2 \varphi' = -\rho^3 \cos \varphi + k \left(f(\rho) = \rho^2 \left[1 - \left(\frac{\rho^2}{c} - h \right)^2 \right] - k^2 \right) \quad (1.8)$$

Зависимость ρ от φ дается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho^3 \cos \varphi - k}{\rho \sqrt{f(\rho)}} \quad (1.9)$$

§ 2. Определим область изменения параметров c , h , k . Для отыскания границ изменения c выразим ее через компоненты тензора инерции. Полагая $A_{11} >$ имеем

$$A_{22} > A_{33}, \quad c = 2 \sqrt{(A_{22} - A_{33}) / A_{11}}, \quad 0 < c \leq 2$$

Первое уравнение (1.8) имеет действительные решения лишь при $f(\rho) \geq 0$, это накладывает ограничение на один из параметров h , k .

Оставим k независимым параметром. Область изменения h зависит от величины k .

Для того чтобы $f(\rho) \geq 0$, необходимо выполнение неравенства $f(\rho_0) \geq 0$, где ρ_0 — наибольший корень уравнения $f'(\rho) = 0$. Отсюда $h > h_* > -1$; в этом условии h_* — наибольший корень уравнения, определяющего h

$$2c [9h - h^3 + (h^2 + 3)\sqrt{h^2 + 3}] - 27k^2 = 0$$

Отметим, что с уменьшением $|k|$ до нуля, h_* уменьшается до -1 .

§ 3. Из (1.7) видно, что подвижный годограф лежит в плоскости $\omega_1 = 1/2 c \omega_2$, проекцией же подвижного годографа на плоскость $\omega_1 = 0$ будет кривая s , определяемая системой уравнений (1.8), или эквивалентным ей уравнением (1.9).

Исследуем эту кривую. Проекция подвижного годографа расположена в кольце G : $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, где ρ_1 , ρ_2 — положительные корни уравнения $f(\rho) = 0$. Существование этих корней доказывается тем, что

$$f(0) < 0, \quad f(\rho_0) \geq 0, \quad f(\infty) < 0$$

При этом существенно, что $\rho_1 \geq 0$, причем обращение ρ в нуль возможно лишь при $k = 0$.

Вид кривой s существенно зависит от количества особых точек уравнения (1.9). Особые точки обозначим так:

$$\begin{aligned} & M_1(\rho_1, \varphi_1), M_{-1}(\rho_1, -\varphi_1), M_2(\rho_2, \varphi_2), M_{-2}(\rho_2, -\varphi_2) \\ & \varphi_1 = \arccos(k / \rho_1^3), \quad \varphi_2 = \arccos(k / \rho_2^3) \end{aligned}$$

Число особых точек изучаемого уравнения не превосходит четырех. Обозначим

$$h_1 = (k^{2/3} - c \sqrt{1 - k^{4/3}}) / c, \quad h_2 = (k^{2/3} + c \sqrt{1 - k^{4/3}}) / c$$

В зависимости от числа особых точек будем различать пять случаев.

1. Уравнение (1.9) имеет четыре особые точки, когда $\rho_1^3 > |k|$. Это выполняется для любых $h > h_*$, если $|k| \geq 1$, и для $h > h_2$, если $|k| < 1$.

2. Уравнение (1.9) имеет три особые точки, если выполняется $\rho_1^3 = |k|$. При этом $|k| < 1$, $h = h_2$.

3. Уравнение (1.9) имеет две особые точки, если в промежутке (ρ_1, ρ_2) существует значение ρ_* , такое, что $\rho_*^3 = |k|$. При этом $|k| < 1$, $h_1 < h < h_2$.

4. Уравнение (1.9) имеет одну особую точку, если выполняется $\rho_2^3 = |k|$, при этом $|k| < 1$, $h = h_1$.

5. Уравнение (1.9) не имеет особых точек, если $\rho_2^3 < |k|$, при этом $h_* < h < h_1$. Для изучения кривой s построим поле направлений для уравнения (1.9).

$$\operatorname{tg} \vartheta = \rho \frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\rho^3 \cos \varphi - k}{\sqrt{f(\rho)}} \quad (3.1)$$

Здесь ϑ — угол между положительным направлением координаты ρ и касательной к кривой в данной точке, отсчитываемый против часовой стрелки.

Равенство (3.1) определяет в каждой точке области два направления, так как $\sqrt{f(\rho)}$ имеет в каждой точке два значения, отличающиеся знаком. Эти направления симметричны относительно луча, проведенного из начала координат в данную точку. Поэтому достаточно изучить поле направлений, считая $\sqrt{f(\rho)}$ в выражении (3.1) величиной положительной.

Когда $\rho = \rho_1, \rho_2, \operatorname{tg} \vartheta = \infty$, т. е. кривая s касается при этом соответственно внутренней и внешней границ кольца G . Область G_1 , в которой $\operatorname{tg} \vartheta > 0$, отделяется от области G_2 , в которой $\operatorname{tg} \vartheta < 0$, кривой $L: \rho^2 \cos \varphi - k = 0$, вдоль которой $\operatorname{tg} \vartheta = 0$. Кривая L проходит через особые точки изучаемого уравнения.

Рассмотрим изменение $\operatorname{tg} \vartheta$ при движении переменной точки по радиусу от одной границы кольца G до другой. Вдоль радиуса, не пересекающего линии L , $|\operatorname{tg} \vartheta|$ уменьшается от бесконечности до некоторого значения и затем вновь возрастает неограниченно.

Если радиус пересекает линию L , то $\operatorname{tg} \vartheta$ изменяется от бесконечности до нуля, который достигается в точке пересечения радиуса с линией L , при этом $\operatorname{tg} \vartheta$ меняет знак и, когда точка достигает границы области G , $\operatorname{tg} \vartheta$ вновь обращается в бесконечность.

Если $k < 0$, то поле направлений (и кривая L) будет симметрично полю направлений для $k > 0$ относительно оси z . Поэтому сначала рассмотрим случай $k > 0$.

Из первого уравнения (1.8) находим, что ρ есть эллиптическая функция времени τ с периодом

$$T = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

Полярный угол φ определяется вторым уравнением (1.8). Если начальная точка выбрана в области G_1 , то с возрастанием времени φ начинает возрастать, если — G_2 , то φ с возрастанием времени начинает убывать. Поэтому для каждого из случаев 1—5 следует рассмотреть два варианта, соответствующих двум различным положениям начальной точки.

1) начальная точка расположена в G_1 ($\varphi = \pi$);

2) начальная точка расположена в G_2 ($\varphi = 0$).

§ 4. Для дальнейшего исследования введем обозначения $S_k^1, S_k^2, s_k^1, s_k^2$ — точки касания кривых s^1, s^2 соответственно с окружностями $\rho = \rho_2, \rho = \rho_1$.

Пусть α_k^1, α_k^2 — значения полярного угла φ , при которых s^1, s^2 пересекают линию L .

Здесь и в дальнейшем верхний индекс означает номер области G_p , в которой выбрана начальная точка.

Установим два важных свойства кривой s , вытекающие из особенности поля направлений уравнения (1.9).

(А) Дуги $S_i^1 s_i^1, S_i^2 s_i^2$ кривой s не могут пересекаться с дугами $S_j^1 s_j^1$ и $S_j^2 s_j^2$ ни при каких i, j и могут пересекать дуги $s_j^1 S_{j+1}^1, s_j^2 S_{j+1}^2$ в симметричном направлении.

(В) Для всех i выполняется $\alpha_{2i}^1 > \alpha_{2i+1}^1$ и $\alpha_{2i}^2 < \alpha_{2i+1}^2$.

Дуги $S_j^1 s_j^1, S_j^2 s_j^2$ получаются как решения системы (1.8) для промежутка времени $(0, \frac{1}{2}T)$, где в качестве начальных точек берутся точки S_j^1, S_j^2 . При этом выполняются все условия существования и единственности решения для системы (1.8), т. е. через каждую точку области G проходит единственная интегральная кривая, или, что то же, единственная дуга $S_j^1 s_j^1, S_j^2 s_j^2$. Это доказывает первую половину утверждения (А).

Если в первом уравнении (1.8) изменить знак перед радикалом на противоположный, то решениями полученной системы (1.8), на промежутке $(0, \frac{1}{2}T)$ будут дуги $s_j^1 S_{j+1}^1, s_j^2 S_{j+1}^2$, если в качестве исходных взять точки s_j^1, s_j^2 . Отсюда и из предыдущего рассуждения следует справедливость второй части утверждения (А).

Свойство (В) очевидно.

Отметим одно следствие свойства (А).

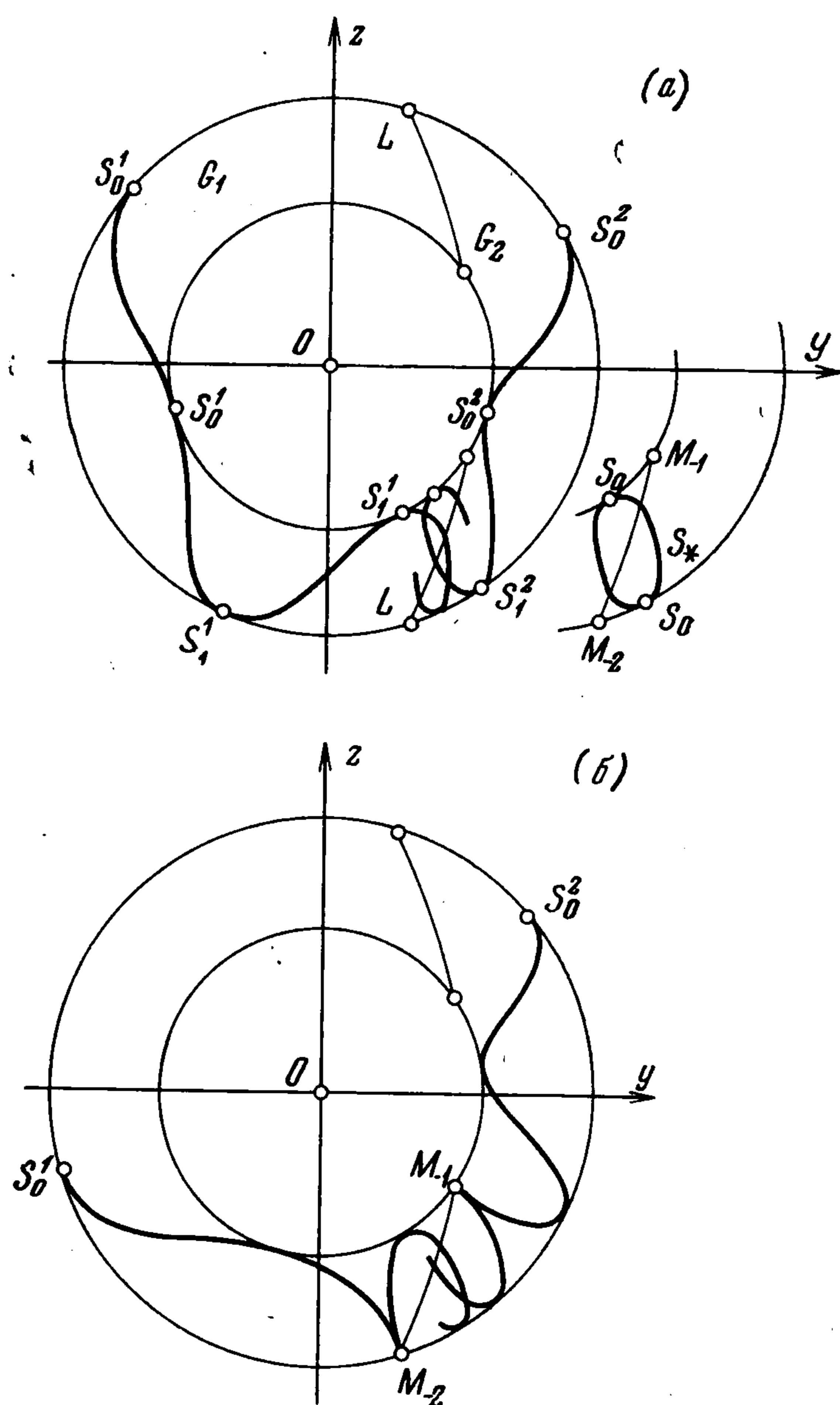
(С) Если точкам $S_k^1, s_k^1, S_k^2, s_k^2$ ставить в соответствие значения их дуговых координат, за начало отсчета которых приняты какие-либо точки окружностей $\rho = \rho_1$,

$\rho = \rho_2$ (при этом считаем направление против часовой стрелки положительным), то из свойства (А) получим, что последовательности $S_k^1, s_k^1, S_k^2, s_k^2$ есть строго монотонные.

Перейдем к изучению случаев 1—5.

1а. В качестве начальной берем какую-либо точку S_0^1 , лежащую на окружности $\rho = \rho_2$ в области G_1 и не являющуюся особой для уравнения (1.9), и последим за движением переменной точки M кривой s .

В начальный момент кривая s^1 касается окружности $\rho = \rho_2$. С возрастанием времени ρ начинает убывать, а φ — возрастать. Точка M выходит из S_0^1 и через промежуток времени $1/2T$ достигает точки s_0^1 .



Фиг. 1

кривая s^1 касается при этом окружности $\rho = \rho_1$ (в промежутке (ρ_1, ρ_2) кривая s_1 имеет точку перегиба). В этот момент радикал в первом уравнении (1.8) меняет знак и в дальнейшем ρ возрастает. Кривая s^1 снова проходит через точку перегиба и при $\tau = T$ касается внешней окружности в точке S_1^1 и т. д. Кусок кривой s , имеющий точки перегиба, будем относить к типу F_1 . Кусок кривой s^1 , не пересекающий линии L , принадлежит типу F_1 .

Пусть S_m^1 — первая из точек S_i^1 , расположенная в области G_2 . При пересечении линии L кривая s^1 переходит из области G_1 в область G_2 , при этом угол φ начинает убывать. Точка M проходит через точку S_m^1 и при некотором значении τ выходит из области G_2 (кривая s^1 второй раз пересекает линию L). По свойству (B) $\alpha_0^1 > \alpha_1^1$, из следствия (C) имеем $s_m^1 > s_{m-1}^1$, поэтому с возрастанием времени точка M пересекает дугу $s_{m-1}^1 S_m^1$ и достигает точки s_m^1 . Затем кривая s^1 снова пересекает линию L и картина повторяется. Кусок кривой s , имеющий точки самопересечения и не имеющий точек перегиба, будем относить к типу F_2 . Кусок кривой s^1 , пересекающий линию L , принадлежит типу F_2 .

Очевидно, что кривая s^2 , которая получается, если за исходную взять какую-нибудь точку S_0^2 из области G_2 , имеет такой же вид, что и кривая s^1 .

Если s_e^2 есть первая из точек s_i^2 , которая находится в области G_1 , то точки S_i^1, S_j^2 не покинут дугу $S_m^1 S_e^2$ окружности $\rho = \rho_2$, а точки s_i^1, s_j^2 — дуги $s_m^1 s_e^2$ окружности $\rho = \rho_1$ для $i > m, j > e$. При $\tau \rightarrow \infty$ точки S_i^1, S_i^2 будут стремиться к S_0 , и точки $s_i^1, s_i^2 \rightarrow k s_0$, а траектория переменной точки M кривых s^1, s^2 будет неограниченно приближаться к предельной замкнутой траектории S_* , проходящей через точки s_0, S_0 . Траектория S_* будет предельным циклом для кривых s^1, s^2 .

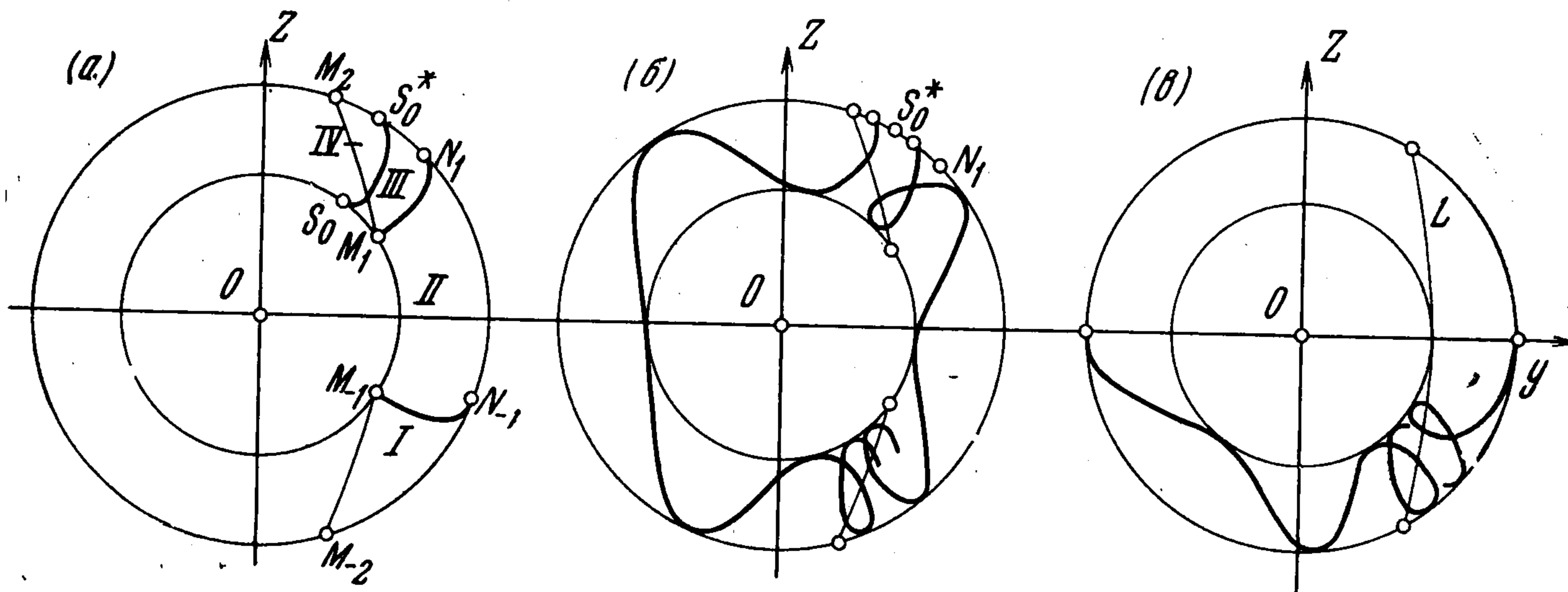
Траектория S_* единственна для любых начальных положений точки при выбранных значениях параметров, т. е. при фиксированных областях G, G_1, G_2 . Это доказывается тем, что оставив начальную точку в G_2 неподвижной и беря в качестве исходной любые точки из области G_1 , получим, что траектория S_* есть предельный цикл кривых s^1 , когда любые точки области G_1 выбираются в качестве начальных. Аналогично,

закрепив какую-либо исходную точку в G_1 , находим, что S_* — единственный предельный цикл для кривых s^2 при любых положениях начальной точки в G_2 . На фиг. 1,а показаны кривые s^1, s^2 . Предельный цикл S_* на фиг. 1,а вынесен отдельно.¹

16. Рассмотрим вопрос о существовании кривой s^1 , проходящей через особую точку M_{-2} . Примем эту точку за начальную; так как в этом положении скорость точки M кривой s^1 равна нулю, найдем тангенциальную и радиальную составляющие ускорения в этой точке

$$w_\varphi = 0, w_\rho = F'(\rho_2) / 2\rho_2^2$$

Отсюда видно, что точка M выходит из точки M_{-2} , кривая s^1 при этом касается радиуса.



Фиг. 2

Дальнейшее поведение кривой не отличается от описанного ранее, когда кривая s пересекает линию L . Кривая s^1 принадлежит типу F_2 и имеет предельный цикл S_* .

Если во втором уравнении (1.8) заменить τ на $-\tau$, то полученная система (1.8) определит кривую s^1 при изменении τ от 0 до $-\infty$. При этом угол φ убывает, точка M выходит из точки M_{-2} , кривая s^1 касается радиуса. Дальнейшее поведение кривой s^1 такое же, как описано в п. 1а, когда кривая s^1 не пересекает линии L , т. е. кривая s^1 принадлежит типу F_1 .

Взяв теперь какую-либо точку этой кривой, расположенную на окружности $\rho = \rho_2$, в качестве начальной, получим кривую σ_{-2}^1 , проходящую через особую точку уравнения (1.9) и имеющую предельный цикл S_* , причем точка M_{-2} есть точка возврата для кривой σ_{-2}^1 . Аналогично получаем, что в области G_2 существует траектория σ_{-1}^2 , проходящая через особую точку M_{-1} . Вид кривой s для этого случая показан на фиг. 1,б.

Рассмотрим, как изменяется вид кривой s^2 при различном выборе начальных точек в области G_2 . Для этого продолжим кривые s^1, s^2 для отрицательных значений времени. Когда $\tau \rightarrow -\infty$, траектория переменной точки M данных кривых s^{o1}, s^{o2} неограниченно приближается к единственной предельной замкнутой траектории S_*^o , проходящей через точки s_0^o, S_0^o . Заметим, что траектория S_*^o симметрична траектории S_* относительно оси y .

Легко показать, что в области G_2 существуют две траектории $\sigma_1^2, \sigma_{-1}^2$, проходящие через особые точки M_1, M_{-1} , соответственно.

Введем обозначения: N_1, N_{-1} — ближайшие из предшествующих к M_1, M_{-1} точек кривых $\sigma_1^2, \sigma_{-1}^2$, расположенные на окружности $\rho = \rho_2$.

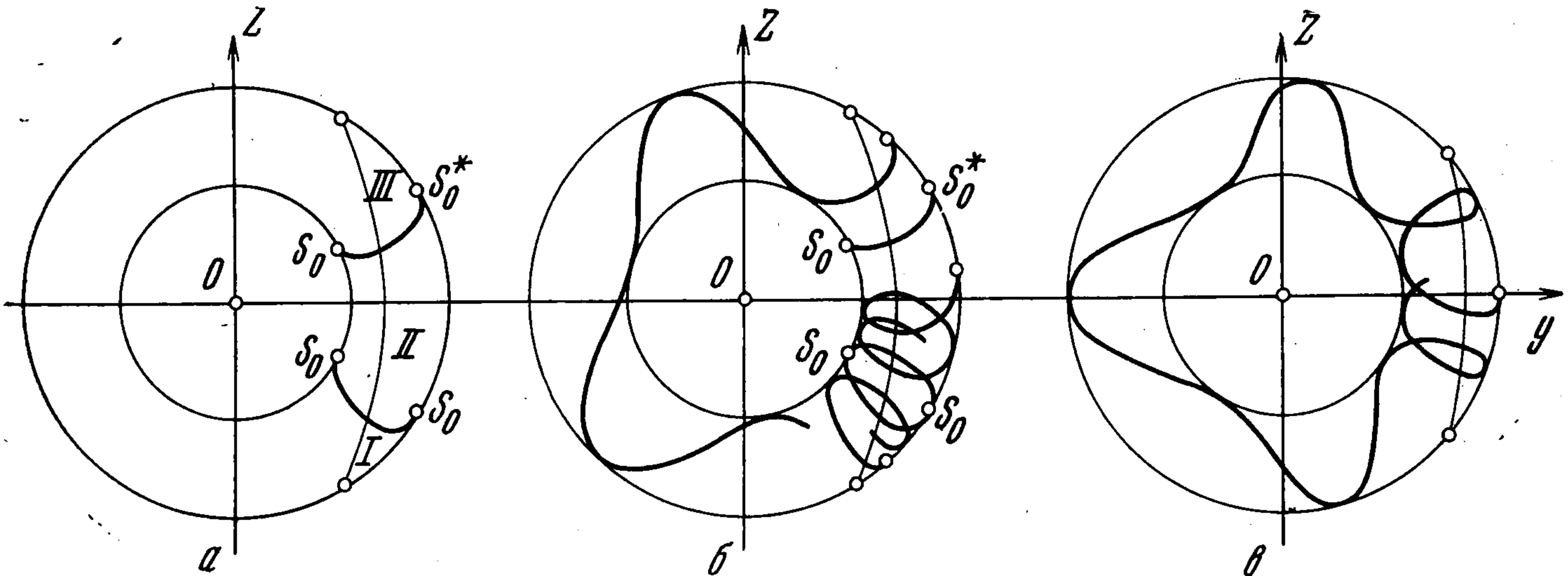
Точки $M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2}, N_1, N_{-1}, s_0^o, S_0^o$ делят G_2 на четыре области (фиг. 2,а); вид кривой s^2 зависит от того, в какой из этих областей выбрана начальная точка.

¹ На внутренней окружности фиг. I—4 все буквы S нужно считать малыми (строчными), а на внешней окружности все S — большими (прописными); при этом буква S^* на фигурах соответствует S^o по тексту.

Куски кривой s^2 , заключенные в областях I, II, IV , принадлежат типу F_2 , а в области III — типу F_1 .

Кривые s^2 , когда в качестве начальной взяты точки в областях II, I , получаются из линии, указанной на фиг. 1, a , если за начальную точку взять S_0^2, S_1^2 соответственно.

На фиг. 2, b показаны кривые s^2 , когда исходные точки выбраны в областях III, IV . Следует отметить, что, если начальная точка находится в области IV , то кривая s^2 покидает область G_2 и проходит через всю область G_1 .



Фиг. 3

Совершенно также область G_1 по виду кривой s^1 делится на четыре подобласти.

Таким образом, в рассмотренном случае при любом выборе начальной точки кривая s имеет единственный предельный цикл S_* . Если начальная точка выбрана на траекториях S_*, S_*^o , то кривая s представляет собой замкнутую линию. Каждой особой точке уравнения (1.9) соответствует единственная траектория, проходящая через эту точку. Особая точка есть точка возврата данной кривой. В данном случае существует четыре траектории, имеющие точку возврата.

2. Повторяя предыдущие рассуждения, получим кривую s в этом случае (фиг. 2, b). Деление G_1, G_2 на области, определяющие вид кривой s , осуществляется аналогично случаю 1.

Как и в предыдущем случае, существуют две замкнутые траектории, которые получаются при соответствующем выборе начальной точки. При любых других положениях исходной точки кривые s^1, s^2 имеют единственный предельный цикл S_* .

При данном выборе параметров в отличие от предыдущего существуют три траектории, имеющие точку возврата.

3. В качестве начальной выберем точку S_0^2 ($\varphi = 0$) из области G_2 . С возрастанием времени ρ и φ убывают. Как только кривая s^2 пересечет линию L , угол φ начинает возрастать, а с момента $\tau = 1/2 T$, когда линия s^2 коснется окружности $\rho = \rho_1$, начинает увеличиваться и ρ . Когда траектория s^2 второй раз пересечет линию L , угол φ снова начинает уменьшаться, и в момент $\tau = T$ кривая s^2 касается внешней окружности в точке S_1^2 .

При этом возможны три варианта:

$$a) S_1^2 < S_0^2, \quad б) S_1^2 > S_0^2, \quad в) S_1^2 = S_0^2$$

Исследуем кривые s^2 для каждого из этих вариантов.

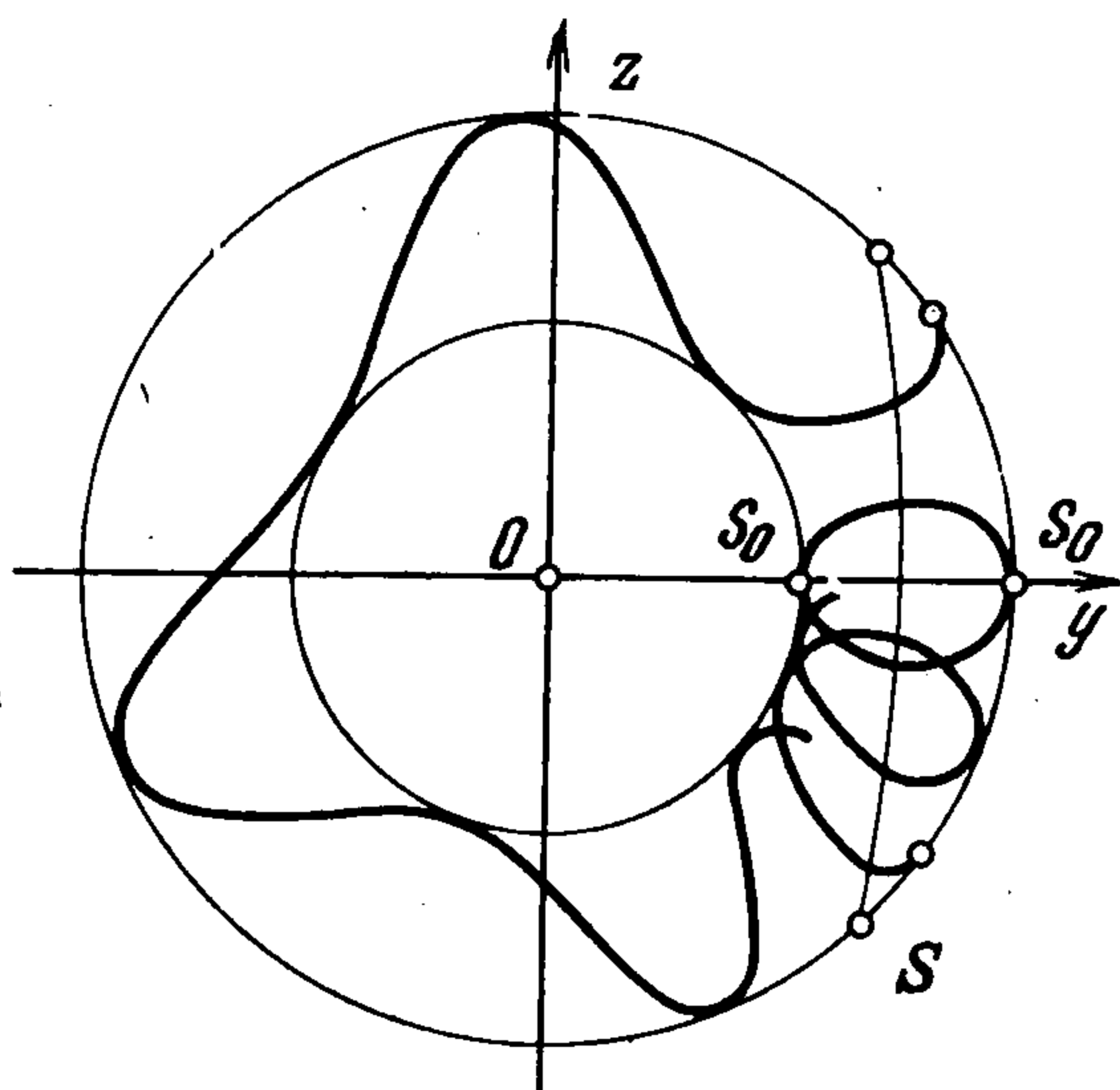
а) Рассматривая кривую s^2 совместно с s^1 , получим, что траектория переменной точки M кривых s^1, s^2 при $\tau \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к замкнутой кривой S_* . Как и в случае 1, существует замкнутая кривая S_*^o , симметричная S_* относительно оси y .

Изучим кривую s^2 при различных положениях начальных точек в области G_2 . Дуги $s_0 S_0, s_0^o S_0^o$ делят G_2 на три области (фиг. 3, a). Для областей I и III справедливо $S_{i+1}^2 > S_i^2$, в области II по условию $S_{i+1}^2 < S_i^2$.

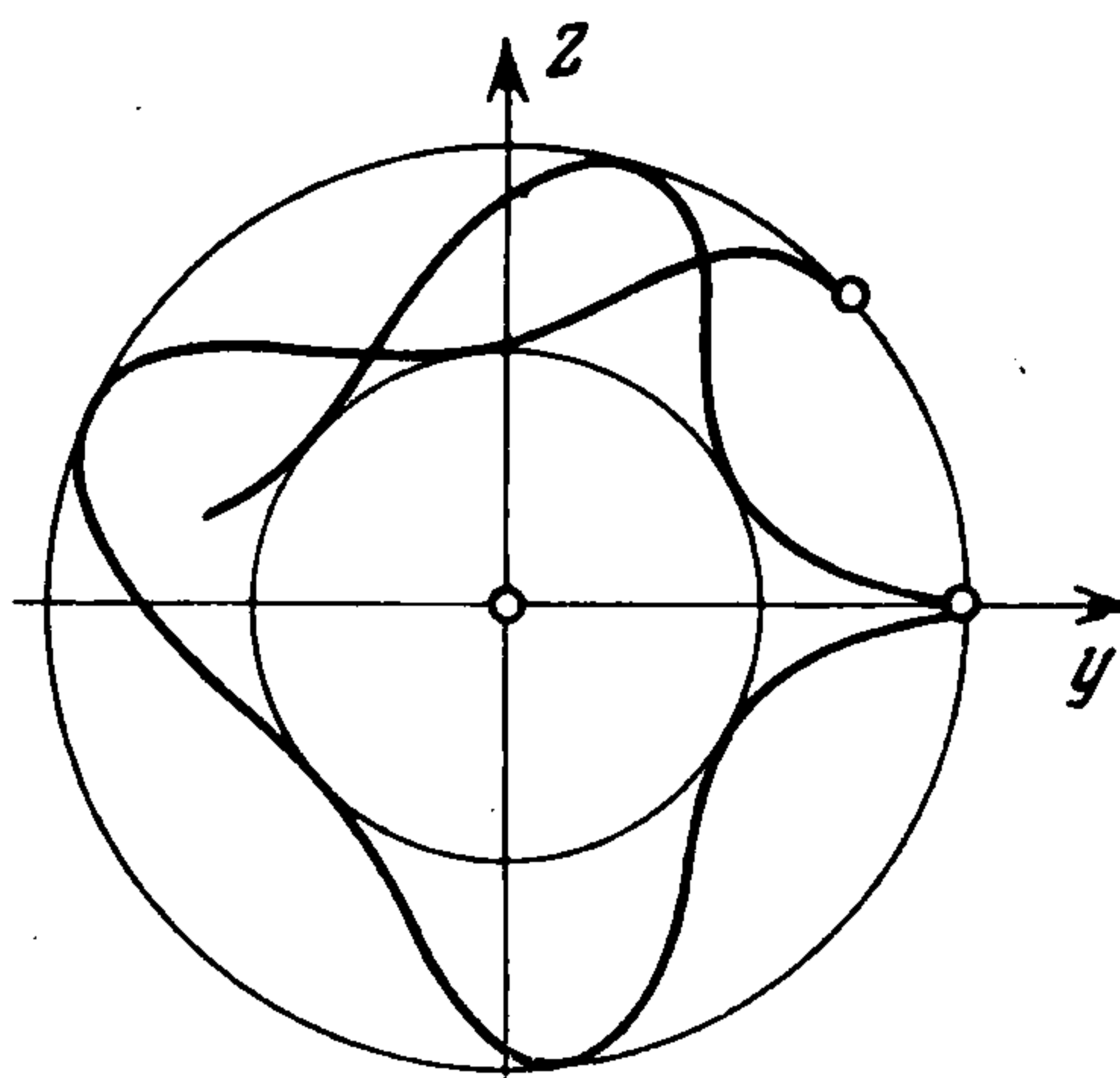
Вид кривой s^2 , когда за исходную точку берется какая-либо точка из областей I—III, указан на фиг. 3,б.

Итак, при данных предположениях, если начальная точка выбрана на кривых S_* , S_*^o , кривые s^1 , s^2 замкнуты. При любых других положениях исходной точки кривые s^1 , s^2 имеют единственный предельный цикл S_* .

б) В этом случае кривая s не имеет предельного цикла (фиг. 3, в). Переменная точка M кривой s при $\tau \rightarrow \infty$ совершает бесконечное число оборотов вокруг начала коор-



Фиг. 4



Фиг. 5

динат. Кривая s заполняет всюду плотно кольцо G . Кусок кривой s , который пересекает линию L , принадлежит типу F_2 , а остальной кусок — типу F_1 .

в) При данном условии существует одна замкнутая, симметричная относительно оси y траектория S_* , проходящая через точки пересечения оси y с окружностями $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$. Для всех точек области G_2 , кроме точек кривой S_* , справедливо $S_{i+1}^2 > S_i^2$, поэтому угол φ за период $\tau = T$ получает отрицательное приращение. Если начальная точка в области G_2 выбрана так, что $\varphi_0 > 0$, то переменная точка M кривой s^2 покидает область G_2 , проходит через всю область G_1 и затем снова попадает в G_2 .

На фиг. 4 показана траектория S_* и кривые s^2 при двух различных положениях исходной точки.

Кривые s в этом случае имеют единственный предельный цикл S_* .

Отметим, что во всех рассмотренных вариантах a , b , v существует по две траектории, имеющие точки возврата.

4. За начальную точку возьмем любую точку области G , не совпадающую с особой точкой M_2 уравнения (1.9). Для всех точек кольца G , кроме точки M_2 , выполняется условие $k - \rho^3 \cos \varphi > 0$, поэтому угол φ всегда возрастает. Кривая s (фиг. 5) принадлежит к типу F_1 . Переменная точка M кривой s при $\tau \rightarrow \infty$ совершает бесконечное число оборотов вокруг начала координат. Кривая s заполняет всюду плотно кольцо G . Особая точка M_2 есть точка возврата кривой s .

5. Данный случай отличается от предыдущего только тем, что кривая s не имеет точки возврата.

Таким образом, полностью рассмотрен случай $c > 0$, $k > 0$. При изменении знака u на противоположный получим кривую s , симметричную рассмотренной относительно оси y ; случаю $c > 0$, $k < 0$ соответствует кривая s , симметричная изученной относительно оси z .

Заметим, что системе (1.8) удовлетворяют решения $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$. При этом кривая представляет собой окружность, а подвижный годограф есть эллипс.

Автор благодарит П. В. Харламова за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. H e s s W. Über die Eulèrschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., 1890, Bd. 37, N. 2.
2. Н е к р а с о в П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, стр. 508—517.
3. Н е к р а с о в П. А. О движении твердого тела около неподвижной точки. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 5, № 2, стр. 17—37.
4. Н е к р а с о в П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Матем. сб., 1896, т. 18, № 2, стр. 161—274.
5. М л о д з е е в с к и й Б. К., Н е к р а с о в П. А. Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 6, вып. 1, стр. 43—52.
6. Ч а п л ы г и н С. А. По поводу локсодромического маятника Гесса. В кн. С. А. Чаплыгина Собр. соч., т. 1, М., Гостехтеориздат, 1948, стр. 133—135.
7. B r e s s a n A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, t. 27, N. 2. (Рус. пер.: Брессан А. О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса. Период. сб. пер. иностр. статей, Механика, 1958, № 6, (52), стр. 153—158).
8. Ж у к о в с к и й Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Тр. отд. физ. наук о-ва люб. естеств., 1893, т. 5, вып. 2.
9. Х а р л а м о в П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5, стр. 1048—1050.
10. Х а р л а м о в П. В. Лекции по динамике твердого тела, ч. I. Новосибирск, 1965, Новосиб. ун-т.
11. Х а р л а м о в П. В. Об уравнениях движения гиростата. Тр. Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1962. Казань, 1964.
12. Х а р л а м о в П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, стр. 703—707.

К ДИНАМИКЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Фролов

(Москва)

По существующим представлениям одной из основных причин кавитационной эрозии материалов являются интенсивные колебания кавитационных пузырьков без их полного захлопывания. Когда размер кавитационных пузырьков достигает некоторого предела, в окружающей их жидкости могут возникать достаточно сильные импульсы давления, способные вызвать при помощи локальных циклических нагрузок эрозию [1,2].

Колебания кавитационных пузырьков в вязкой жидкости имеют ряд отличительных особенностей, обусловленных вязкостью жидкости. Принципиальное влияние вязкости отмечено в работах [3,4] при теоретическом исследовании поведения пустой сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Было обнаружено существование двух различных типов движения: пузырьки, начальный размер которых меньше критического, заполняются медленно за неограниченное время; заполнение больших пузырьков происходит быстро с бесконечно большой скоростью в стадии фокусировки.