ОБ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Л. Д. Акуленко (Москва)

На бесконечном промежутке времени строятся возмущенные резонансные решения существенно нелинейной вещественной системы, содержащей две фазы и квазипостоянный вектор. При помощи первого метода Ляпунова и известных теорем Вейерштрасса о неявных функциях выводятся достаточные условия устойчивости возмущенных резонансных движений. Полученные результаты представляют интерес и могут быть применены в некоторых задачах теории нелинейных колебаний.

§ 1. Постановка задачи. В резонансной области исследуется возмущенная система $(l+2)$ уравнений вида

$$da / dt = \varepsilon A\,(\theta, a, \psi, \varepsilon)$$

$$d\psi / dt = \Omega\,(a) + \varepsilon\Psi\,(\theta, a, \psi, \varepsilon), \qquad d\theta / dt = \sigma\,(a) + \varepsilon N\,(\theta, a, \psi, \varepsilon) \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [t_0, \infty)$ — время, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ — малый параметр; a — квазипостоянный вектор размерности l ($|a - a_0^*| < \delta$); ψ, θ — скалярные фазы ($|\psi|, |\theta| < \infty$). Относительно функций A, Ω, Ψ, σ и N предполагается, что они достаточно гладки по всем аргументам в указанной области и периодичны по θ, ψ с постоянными периодами $2\pi / \nu$ и 2π, соответственно. Степень гладкости будет установлена ниже. Предполагается также, что хотя бы одна из фаз, например, θ, будет вращающейся, т. е. $\sigma(a) > 0$.

Строятся и исследуются на устойчивость по Ляпунову такие решения системы (1.1), которые при $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$a_0, \quad \psi_0 = \Omega\,(a_0)\,(t - t_0) + \alpha, \quad \theta_0 = \sigma\,(a_0)(t - t_0) + \beta$$

а при $\varepsilon \neq 0$ для всех вещественных t остаются близкими к этим величинам (в написанных выражениях a_0, α, β — некоторые постоянные). В статье исследуется резонансный случай, когда

$$m\Omega\,(a_0) = n\nu\sigma\,(a_0) \tag{1.2}$$

Здесь m и n — «не очень большие» целые числа [1], причем n может принимать нулевое значение, т. е. фаза ψ может быть колеблющейся.

К исследованию системы (1.1) приводят многие задачи теории нелинейных колебаний. Это, в частности, задачи о вынужденных движениях в системе с одной степенью свободы и мало меняющимися параметрами, в некоторых сильно связанных автономных системах и др. Аналогичные системы исследовались [2,3] при помощи схем усреднения на промежутке $\Delta t \sim 1 / \sqrt{\varepsilon}$. Частный случай системы (1.1) ($l = 1$, $\theta \equiv \nu t$) исследован автором в основном и особом случаях [4,5] на интервале $t \in [t_0, \infty)$.

Следует еще отметить, что исследование устойчивости по Ляпунову установившихся резонансных режимов рассматриваемой существенно нелинейной системы (1.1) представляет большие трудности, так как $(l+2)$ кратному нулевому характеристическому показателю невозмущенной системы в вариациях отвечает только $(l+1)$ групп решений. Вычисление характеристических показателей в этом случае связано с дробными степенями ε [4–7].

§ 2. Построение резонансного решения. Для этого рассматривается следующая система $(l+1)$ уравнений:

$$da / d\theta = \varepsilon f\,(\theta, a, \psi, \varepsilon), \qquad d\psi / d\theta = \omega\,(a) + \varepsilon F\,(\theta, a, \psi, \varepsilon) \tag{2.1}$$

являющаяся следствием системы (1.1). Здесь введены обозначения

$$f = A / (\sigma + \varepsilon N), \quad \omega = \Omega / \delta, \; F = (\sigma\Psi - \Omega N) / \sigma\,(\sigma + \varepsilon N)$$

Предполагается, что функции f, ω, F удовлетворяют следующим требованиям гладкости: 1) f, F непрерывны по θ; 2) f, ω допускают первые частные производные по a, ψ, ε, удовлетворяющие условиям Липшица по этим переменным; 3) F удовлетворяет условиям Липшица по a, ψ, ε в указанной области определения системы (1.1). Тогда при помощи замены

$$a = a_0 + \varepsilon x, \quad \psi = (n / m)\,\nu\,(\theta - \theta_0) + \tau + \varepsilon y \qquad (a_0, \tau = \mathrm{const}) \tag{2.2}$$

можно получить квазилинейную систему вида

$$\frac{dx}{d\theta}=f(\theta,\ a_0,\ \psi_0,\ 0)+\varepsilon\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0+f^*(\theta,\ x,\ y,\ \varepsilon)\right]$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\left(\frac{\partial \omega}{\partial a}\right)_0 x+F(\theta,\ a_0,\ \psi_0,\ 0)+F^*(\theta,\ x,\ y,\ \varepsilon) \tag{2.3}$$

Здесь f^*, F^* суть известные функции, обращающиеся тождественно в нуль при $\varepsilon=0$. Периодическое периода $T=2\pi m/\nu$ решение этой системы можно строить последовательными приближениями [6–8]. Нулевое приближение неизвестных функций x, y определяется из уравнений

$$dx_0/d\theta=f(\theta,\ a_0, \psi_0,\ 0), \quad dy_0/d\theta=(\partial\omega/\partial a)_0 x_0+F(\theta,\ a_0, \psi_0,\ 0)$$

и равно

$$x_0=\int_{\theta_0}^{\theta} f_0 d\theta_1+c_0, \qquad y_0=\left(\frac{\partial \omega}{\partial a}\right)_0 a_0(\theta-\theta_0)+\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1} f_0 d\theta_2+F_0\right)d\theta_1+b_0$$

Здесь c_0 и b_0 — постоянные интегрирования. Вектор-функция x_0 будет периодической при любом c_0, если выполняются l равенств

$$P(a_0,\ \tau)\equiv\int_{\theta_0}^{\theta_0+T} f\left(\theta,\ a_0,\ \frac{n}{m}\nu(\theta-\theta_0)+\tau,\ 0\right)d\theta\equiv T\langle f_0\rangle=0 \tag{2.4}$$

Здесь и всюду в дальнейшем выражения в угловых скобках означают средние за период T. Соотношения (2.4) вместе с (1.2) будут определяющими уравнениями относительно постоянных a_0, τ. Пусть a_0^*, τ^* — вещественное решение этой системы. Тогда функция y_0 будет периодической при условии

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a}\right)_0 c_0=-\left\langle\int_{\theta_0}^{\theta} f_0 d\theta_1+F_0\right\rangle \tag{2.5}$$

В результате для x_0 и y_0 получены выражения $x_0=x_0^*+c_0$, $y_0=y_0^*+b_0$, в которых x_0^* и y_0^* суть известные периода T функции θ.

Первое приближение определяется из уравнений, в которых учтены члены $\sim\varepsilon$. Таким образом, для вектор-функции x_1 получается выражение

$$x_1=x_1^*+c_1+\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 c_0+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 b_0\right]d\theta_1 \qquad (c_1=\text{const})$$

$$\left(x_1^*\equiv x_0^*+\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 x_0^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y_0^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right]d\theta_1\equiv x_0^*+\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta} f_1 d\theta_1\right)$$

Первое приближение x будет периодическим, если постоянные c_0 и b_0 удовлетворяют следующим l линейным уравнениям:

$$\frac{\partial P}{\partial a_0^*}c_0+\frac{\partial P}{\partial \tau^*}b_0=-\langle f_1\rangle$$

Эти уравнения вместе с линейным уравнением (2.5) будут определяющей системой относительно c_0, b_0. Определитель ее

$$\Delta=\partial(\omega_0,\ P)/\partial(a_0^*,\ \tau^*) \tag{2.6}$$

в дальнейшем предполагается отличным от нуля, т. е. система (1.2), (2.4) допускает простой вещественный корень $(a_0^*,\ \tau^*)$.

Таким образом, периодические функции x_0 и y_0 полностью определены. Функция y_1 находится аналогично

$$y_1-\int_{\theta_0}^{\theta}(F_1-\langle F_1\rangle)\,d\theta_1+b_1\equiv y_1^*+b_1 \qquad (b_1=\text{const})$$

$$(F_1(\theta,\ \varepsilon)\equiv F_0+F^*(\theta,\ x_0,\ y_0,\ \varepsilon),\ (\partial\omega/\partial a)_0 c_1=-\langle F_1\rangle)$$

Более высокие приближения x, y находятся по схеме

$$\frac{dx_k}{d\theta}=f_0+\varepsilon\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 x_{k-1}+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y_{k-1}+\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0+f^*(\theta, x_{k-1}, y_{k-1}, \varepsilon)\right]$$
$$\frac{dy_k}{d\theta}=\left(\frac{\partial \omega}{\partial a}\right)_0 x_k+F_0+F^*(\theta, x_{k-1}, y_{k-1}, \varepsilon) \tag{2.7}$$

в которую последовательно подставляются (x_1, y_1) и т. д. Методом индукции доказывается, что таким способом можно построить любое приближение периодического решения системы (2. 3). Действительно, пусть

$$x_{p-1}=x_{p-1}^*+c_{p-1},\quad y_{p-1}=y_{p-1}^*+b_{p-1}\quad (p\geqslant 1)$$

суть известные периодические функции θ. Тогда известна правая часть векторного уравнения для x_p, из которого следует, что $x_p=x_p^*+c_p$, где c_p — некоторый постоянный вектор. После подстановки в уравнение для y_p можно получить, аналогично предыдущему,

$$y_p=y_p^*+b_p,\qquad (\partial\omega / \partial a)_0 c_p=-\langle(\partial\omega / \partial a)_0 x_p^*+F_0+F_{p-1}^*\rangle$$

Из условия периодичности вектор-функции x_{p+1} получается следующая система относительно постоянных c_p, b_p:

$$\frac{\partial P}{\partial a_0^*}c_p+\frac{\partial P}{\partial \tau^*}b_p+\langle f^*(\theta, x_p^*+c_p, y_p^*+b_p, \varepsilon)\rangle=-\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 x_p^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y_p^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right\rangle$$

На основании известных теорем о неявных функциях при достаточно малом ε находится единственное решение этой нелинейной системы. Искомые корни, в частности можно вычислить методом последовательных приближений

$$(\partial\omega / \partial a)_0 c_{p,i}=-\langle(\partial\omega / \partial a)_0 x_p^*+F_0+F_{p-1}^*\rangle$$
$$\frac{\partial P}{\partial a_0^*}c_{p,i}+\frac{\partial P}{\partial \tau^*}b_{p,i}+\langle f^*(\theta, x_p^*+c_{p,i-1}, y_p^*+b_{p,i-1}, \varepsilon)\rangle=$$
$$=-\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_0 x_p^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 y_p^*+\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right\rangle$$
$$(c_{p,0}=c_0,\quad b_{p,0}=b_0)$$

В результате построено единственное для фиксированных a_0^*, τ^* периодическое решение системы (2.3), а вместе с этим и резонансное решение вида (2.2) системы (2.1). Обоснование схемы последовательных приближений содержится в [7,8].

Для построения решения исходной системы (1.1) функции (2.2) подставляются в ее последнее уравнение. Получается уравнение с разделяющимися переменными

$$d\theta / dt=\sigma(a_0^*+\varepsilon x(\theta, \varepsilon))+\varepsilon N(\theta, a_0^*+\varepsilon x(\theta, \varepsilon))$$
$$(n / m)\nu(\theta-\theta_0)+\tau^*+\varepsilon y(\theta, \varepsilon), \varepsilon)\equiv 1 / M(\theta, \varepsilon)\geqslant\mu>0$$

Здесь M — известная ограниченная периодическая функция θ периода T, обращающаяся в $n\nu / m\Omega$ при $\varepsilon=0$, согласно соотношению (1,2). Из следствия этого уравнения

$$\theta=\frac{1}{\langle M\rangle}(t-t_0)+\gamma+\frac{1}{\langle M\rangle}\int_{\theta_0}^{\theta}(\langle M\rangle-M)\,d\theta_1$$

при помощи схемы последовательных приближений $(j\geqslant 1)$

$$\theta_j=\frac{1}{\langle M\rangle}(t-t_0)+\gamma+\frac{1}{\langle M\rangle}\int_{\theta_0}^{\theta_{j-1}}(\langle M\rangle-M)\,d\theta$$
$$\theta_0=(1 / \langle M\rangle)(t-t_0)+\gamma\equiv\varphi\qquad(\gamma=\text{const}\in(-\infty, \infty))$$

можно построить общее решение вида

$$\theta=\varphi+\varepsilon w(\varphi, \varepsilon) \tag{2.8}$$

Величина θ за любой целый промежуток времени $\Delta t = T\langle M\rangle \equiv \Pi$ получает постоянное приращение T, так как функция w периодична по φ с периодом T. Остальные неизвестные a и ψ находятся подстановкой (2.7) в (2.2)

$$a = a_0^* + \varepsilon x(\varphi + \varepsilon w(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) \tag{2.9}$$

$$\psi = (n / m)\nu\,[(1 / \langle M\rangle)(t - t_0) + \gamma - \theta_0] + \tau^* + \varepsilon y(\varphi + \varepsilon w(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)$$

Функция ψ за любой целый промежуток времени $\Delta t = \Pi$ получает постоянное приращение $2\pi n$, а y и a будут периодическими функциями периода Π.

§ 3. Исследование устойчивости по Ляпунову. С этой целью в системе (2.1) совершается замена

$$a = a(\theta, \varepsilon) + U, \quad \psi = \psi(\theta, \varepsilon) + V$$

в которой $a(\theta, \varepsilon)$ и $\psi(\theta, \varepsilon)$ — установившееся резонансное решение (2.2) системы (2.1), построенное в предыдущем параграфе. Таким образом, задача заключается в отыскании таких значений λ, для которых система

$$\frac{du}{d\theta} = \left(\varepsilon\frac{\partial f}{\partial a} - \lambda I\right)u + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\psi}v, \qquad \frac{dv}{d\theta} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial a} + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial a}\right)u + \left(\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\psi} - \lambda\right)v \tag{3.1}$$

допускает периодическое решение периода T. Методом последовательных приближений можно показать, что некоторые характеристические показатели λ имеют порядок дробной степени ε, причем при условии $(\partial P / \partial\tau^*)(\partial\omega / \partial a)_0 \neq 0$ два из них имеют порядок $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, а остальные $\sim \varepsilon$. Следовательно, периодическое решение системы (3.1) и искомые показатели имеют вид

$$u(\theta, \varepsilon) = u_0(\theta) + \delta u_1(\theta) + \delta^2 u_2(\theta) + \delta^3 u_3(\theta, \delta)$$

$$v(\theta, \varepsilon) = v_0(\theta) + \delta v_1(\theta) + \delta^2 v_2(\theta, \delta), \quad \lambda = \delta\lambda_1 + \delta^2\lambda_2(\delta)$$

Последовательными приближениями, аналогичными (2.7), можно показать, что λ_1 удовлетворяет уравнению $(l + 1)$-го порядка

$$(-\lambda_1)^{l-1}\,[\lambda_1^2 - (\partial P / \partial\tau^*)(\partial\omega / \partial a)_0 / T] = 0$$

Отсюда следует, что $(l - 1)$ величин λ_1 обращаются в нуль, а остальные два равны, соответственно, $\pm\,[(\partial P / \partial\tau^*)(\partial\omega / \partial a)_0 / T]^{1/2}$. Далее можно установить, что для устойчивости построенного резонансного решения необходимо $(\partial P / \partial\tau^*)(\partial\omega / \partial a)_0 < 0$.

Из условий периодичности функций $v_2(\theta, 0)$, $u_3(\theta, 0)$ следует, что определяющим уравнением для величин $\lambda_2(0)$, соответствующих значениям $\lambda_1 = 0$, будет следующее уравнение $(l - 1)$-го порядка:

$$D(\lambda_2(0)) \equiv \begin{vmatrix} (\partial\omega / \partial a_1)_0 & \ldots & (\partial\omega / \partial a_l)_0 & 0 \\ \partial P_1 / \partial a_{10}^* - \lambda_2(0) & T\ \ldots & \partial P_1 / \partial a_{l0}^* & \partial P_1 / \partial\tau^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial P_l / \partial a_{10}^* & \ldots & \partial P_l / \partial a_{l0}^* - \lambda_2(0)\,T & \partial P_l / \partial\tau^* \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Нужно отметить, что ни одна из величин λ_2, отвечающих значениям $\lambda_1 = 0$, не равна нулю, так как на основании (2.6) $D(0) = \Delta \neq 0$. Таким образом, рассматриваемое решение может быть устойчивым, если вещественные части всех корней неположительны. Для окончательного выяснения достаточных условий устойчивости нужно вычислить оставшиеся две величины λ_2 из вышеуказанных условий периодичности функций v_2 и u_3. На основании теоремы Кронекера — Капелли получаются для них следующие одинаковые выражения:

$$2\lambda_2(0)\,(-\lambda_1)^l - \frac{1}{\lambda^l}\begin{vmatrix} -\lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 & d_1 \\ 0 & -\lambda_1^2 & \ldots & 0 & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda_1^2 & d_l \\ (\partial\omega / \partial a_1)_0 & (\partial\omega / \partial a_2)_0 & \ldots & (\partial\omega / \partial a_l)_0 & d_{l+1} \end{vmatrix} = 0$$

Здесь ($j = 1, \ldots, l$)

$$d_j = \frac{1}{T^2} \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial P_j}{\partial a_{k,0}^*} \frac{\partial P_k}{\partial \tau^*} - \lambda_1^2 T \left\langle \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial \psi} \right)_0 - \frac{1}{T} \frac{\partial P_j}{\partial \tau^*} \right] d\theta_1 \right\rangle$$

$$d_{l+1} = \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \right)_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right)_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)_0 - \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial \tau^*} \right] d\theta_1 \right\rangle$$

Из вышеизложенного следует, что все $(l + 1)$ характеристических показателей системы первого приближения имеют вид

$$\lambda_{(1,\ldots,\, l-1)} = \varepsilon \lambda^*_{(1,\ldots,\, l-1)} + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$\lambda_{l,\, l+1} = \pm \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right)_0 \frac{\partial P}{\partial \tau^*} \right)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} \left[d_{l+1} + \sum_{j=1}^{l} d_j \left(\frac{\partial \omega}{\partial a_j} \right)_0 \Big/ \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a_j} \right)_0 \frac{\partial P_j}{\partial \tau^*} \right] + O(\varepsilon^{3/2})$$

Здесь $\lambda^*_{(1,\ldots\, l-1)}$ — корни уравнения (3.2).

В результате можно утверждать, что решение (2.2) асимптотически устойчиво при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, если наряду с указанными выше условиями выполняется неравенство

$$d_{l+1} + \sum_{j=1}^{l} d_j \left(\frac{\partial \omega}{\partial a_j} \right)_0 \Big/ \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a_j} \right)_0 \frac{\partial P}{\partial \tau^*} < 0$$

а также вещественные части корней уравнения (3.2) отрицательны. Это решение неустойчиво, если эти условия не выполняются. Случай равенства нулю вещественных частей величин $\lambda_2(0)$ требует дополнительного исследования, связанного с более высокой гладкостью рассматриваемой системы. Следует отметить, что на функцию F по сравнению с условиями § 2 налагаются более высокие требования гладкости.

На основании теоремы Андронова — Витта [7] можно утверждать, что решение (2.8), (2.9) системы (1.1) будет устойчивым по Ляпунову при $\varepsilon > 0$ достаточно малом для $t \geqslant t_0$, если все величины $\delta(a_0^*)\,\lambda$ имеют отрицательные вещественные части.

Весьма просто записываются условия устойчивости для $l = 1$ [4,9]

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega_0'}{T} \frac{\partial P}{\partial \tau^*} < 0, \qquad \lambda_2(0) = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \right)_0 \right\rangle < 0$$

Поступила 5 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3, М., Физматгиз, 1963.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Асимптотический расчет некоторых вращательных движений в резонансном случае. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 6, стр. 1303—1305.
3. Черноусько Ф. Л. О резонансе в существенно нелинейной системе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 131—144.
4. Акуленко Л. Д. О резонансе в нелинейных системах с одной степенью свободы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6, стр. 1115—1119.
5. Акуленко Л. Д. О резонансных движениях в существенно нелинейной системе с одной степенью свободы в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6, стр. 1379—1385.
6. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
7. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
8. Акуленко Л. Д. К копросу о стационарных колебаниях и вращениях. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 5, стр. 7—18.
9. Акуленко Л. Д. О резонансных колебательных и вращательных движениях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, стр. 306—313.