ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОСТОЯННЫХ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Н. С. Цодокова

(Москва)

В работе [1] Ляпунов исследовал вопрос о существовании и устойчивости (при помощи теоремы Рауса и дополнения к ней) постоянных винтовых движений твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью. Стеклов [2] установил существование постоянных винтовых движений твердого тела, ограниченного многосвязной поверхностью. Ниже изучается устойчивость найденных Стекловым движений при помощи теоремы Рауса с дополнением Ляпунова. Найдены некоторые достаточные условия устойчивости, а также необходимые условия устойчивости.

§ 1. Пусть в беспредельной массе однородной идеальной несжимаемой жидкости движется твердое тело с несколькими полостями, заполненными идеальной жидкостью. Предположим, что пространство, занимаемое жидкостью (ограниченное поверхностью тела), а также полости многосвязны. Допустим, что на тело и жидкость не действуют силы и что движение жидкостей безвихревое. Принимая за координатные оси $OXYZ$ какие-либо три взаимно-перпендикулярные прямые, неизменно связанные с телом, назовем через u, v, w проекции на эти оси скорости начала координат, а через p, q, r — проекции на эти же оси угловой скорости тела. Обозначим главные циркуляции через k_i, k_j' $(i = 1,\ldots, n)$, $(j = 1,\ldots, m)$.

Как показал Стеклов, уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + \left(\frac{\partial T}{\partial w} + \beta_3\right) q - \left(\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_2\right) r = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_3\right) q - \left(\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_2\right) r + \left(\frac{\partial T}{\partial w} + \beta_3\right) v - \left(\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_2\right) w = 0$$

$$(uwv,\ pqr,\ 123)$$

Здесь T — живая сила в совместном движении твердого тела и жидкостей, а α_i, β_i — некоторые постоянные, зависящие от формы тела, полостей и циклического движения жидкости. Символы $(uwv,\ pqr,\ 123)$ указывают буквы и индексы, круговой перестановкой которых получаются невыписанные уравнения. Уравнения (1.1) допускают три первых интеграла

$$T = \text{const}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_2\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w} + \beta_3\right)^2 = \text{const}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_1\right)\left(\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_1\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_2\right)\left(\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_2\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial w} + \beta_3\right)\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_3\right) = \text{const}$$

Сделаем замену переменных, следуя [1]

$$\frac{\partial T}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = y, \quad \frac{\partial T}{\partial w} = z, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \xi, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \eta, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \zeta$$

Надлежащим выбором системы координат выражение для T может быть сделано следующим:

$$2T = Sa_{11}x^2 + 2Sa_{12}xy + 2Sb_{11}\, x\xi + 2Sb_{23}\,(y\xi + Z\eta) + Sc_1\xi^2 + C$$

$$a_{ij} = a_{ji},\ b_{ij} = b_{ji},\ c_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3),\ (j = 1, 2, 3)\ (c_1 < c_2 < c_3)$$

Здесь и в дальнейшем S означает суммирование трех членов, получаемых из находящегося под знаком S круговой перестановкой одновременно $(xyz,\ \xi\eta\zeta,\ 123)$. Тогда уравнения для определения постоянных винтовых движений примут вид

$$(b_{11} - \lambda)\, x + b_{12}y + b_{13}z + c_1\xi = \beta_1\lambda \tag{1.2}$$

$$(a_{11} - \mu)\, x + a_{12}y + a_{13}z + (b_{11} - \lambda)\,\xi + b_{12}\eta + b_{13}\zeta = \mu\beta_1 + \lambda\alpha_1$$

$$(xyz,\ \xi\eta\zeta,\ 123)$$

Положим для сокращения

$$A_{ii}=a_{ii}-\frac{(b_{ii}-\lambda)^2}{c_i}-\frac{b_{ij}{}^2}{c_j}-\frac{b_{ik}{}^2}{c_k},\quad A_{ij}=a_{ij}-\frac{b_{ki}b_{kj}}{c_k}-\frac{(b_{ii}-\lambda)\,b_{ij}}{c_i}-\frac{b_{ji}\,(b_{jj}-\lambda)}{c_j}$$

$$(i=1,\,2,\,3;\ j=1,\,2,\,3;\ k=1,\,2,\,3;\ i\neq j,\ j\neq k,\ i\neq k)$$

Если внести в последние три уравнения (1.2) величины ζ, η, ξ, следующие из первых трех, то получим

$$(A_{11}-\mu)\ x+A_{12}y+A_{13}z=\Phi_1 \underset{(x\ y\ z,\ 1\ 2\ 3)}{} \tag{1.3}$$

Для того чтобы система (1.3) имела определенное решение, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\det\|A_{ij}-\mu\delta_{ij}\|\neq 0,\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\qquad (i,\,j=1,\,2,\,3) \tag{1.4}$$

Для каждого значения μ, удовлетворяющего (1.4), из системы (1.3) определится x, y, z, а затем и ξ, η, ζ. Таким образом, для получения постоянных винтовых движений можно придавать λ произвольные вещественные значения. Каждому из этих значений соответствует бесчисленное множество винтовых движений, оси которых не будут осями поверхности второго порядка

$$SA_{11}x^2+2SA_{13}\,xz=\text{const}$$

§ 2. Устойчивость постоянных винтовых движений исследуем по отношению к переменным x, y, z, ξ, η, ζ, полагая в возмущенном движении

$$x'=x+\delta x,\quad \xi'=\xi+\delta\xi,\qquad (xyz,\ \xi\eta\zeta)$$

Приложим к рассматриваемому случаю теорему Рауса. Положим

$$(x+\beta_1)^2+(y+\beta_2)^2+(z+\beta_3)^2=h^2,\qquad S\,(x+\beta_1)\,(\xi+\alpha_1)=g \tag{2.1}$$

Пусть δx, δy, δz, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ — приращения величин x, y, z, ξ, η, ζ, не изменяющие постоянных h и g. Соответствующее приращение T назовем δT.

$$2\delta T=S\,(A_{11}-\mu)\,(\delta x)^2+2SA_{23}\delta y\delta z+Sc_1\,(\delta\xi_0)^2 \tag{2.2}$$

$$\delta\xi=\delta\xi_0-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}\,\delta x-\frac{b_{12}}{c_1}\,\delta y-\frac{b_{13}}{c_1}\,\delta z\ \ (xyz,\ \xi\eta\zeta,\ 123)$$

В новых переменных условия (2.1) имеют вид

$$2S\,(x+\beta_1)\,\delta x+S\,(\delta x)^2=0$$

$$SX\delta x-S\,(x+\beta_1)\,\delta\xi_0-S\delta x\delta\xi_0+S\,\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}\,(\delta x)^2+S\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\delta y\delta z=0 \tag{2.3}$$

Здесь

$$X=2\,(x+\beta_1)\,\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}+(y+\beta_2)\left(\frac{b_{12}}{c_1}-\frac{b_{21}}{c_2}\right)+(z+\beta_3)\left(\frac{b_{13}}{c_1}-\frac{b_{13}}{c_3}\right)-f_1$$

$$f_1=\alpha_1+\frac{b_{11}\beta_1+b_{12}\beta_2+b_{13}\beta_3}{c_1}\ \ (XYZ,\ xyz,\ 123) \tag{2.4}$$

Пусть μ_1, μ_2, μ_3 — корни уравнения $\det\|A_{ij}-\mu\delta_{ij}\|=0$. Движения, соответствующие $\mu<\mu_1$, обращают T в минимум, и, следовательно, устойчивы, по крайней мере, для возмущений, не изменяющих h и g.

Перейдем к случаю $\mu > \mu_1$. Так как рассматриваются только бесконечно малые значения величин δx, δy, δz, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, уравнения (2.3) можно заменить уравнениями

$$2S\,(x+\beta_1)\,\delta x = 0, \qquad SX\delta x - S\,(x+\beta_1)\,\delta\xi_0 = 0 \tag{2.5}$$

Для получения условий, необходимых и достаточных для минимума T, будем искать минимум функции (2.2) при условиях (2.5) и при условии

$$S\,(\delta x)^2 = C^2$$

Необходимое условие минимума T состоит в том, что $\min \delta T \geqslant 0$. Если же $\min \delta T = 0$ только при $C = 0$, то найденные условия достаточны для минимума T. Разыскивая минимум T, приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}(A_{11}-\mu-k)\,\delta x + A_{12}\delta y + A_{13}\delta z + (x+\beta_1)\,m + Xl = 0 \\ c_1\delta\xi_0 - (x+\beta_1)\,l = 0 \qquad (xyz,\ \xi\eta\zeta,\ 123)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Внося из (2.6) величины $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ во второе уравнение (2.5), получим

$$SX\delta x - Hl = 0 \qquad \left(H = S\,\frac{(x+\beta_1)^2}{c_1}\right)$$

Система пяти уравнений

$$\begin{gathered}(A_{11}-\mu-k)\,\delta x + A_{12}\delta y + A_{13}\delta z + (x+\beta_1)\,m + Xl = 0 \qquad (xyz,\ 123) \\ S\,(x+\beta_1)\,\delta x = 0, \qquad SX\delta x - Hl = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

будет линейной и однородной относительно δx, δy, $\delta z m$ и l; поэтому для определения k будем иметь уравнение

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu-k & A_{12} & A_{13} & x+\beta_1 & X \\ A_{21} & A_{22}-\mu-k & A_{23} & y+\beta_2 & Y \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\mu-k & z+\beta_3 & Z \\ x+\beta_1 & y+\beta_2 & z+\beta_3 & 0 & 0 \\ X & Y & Z & 0 & -H \end{vmatrix} = 0$$

Все корни этого уравнения вещественны. Из уравнений (2.6), учитывая условные уравнения, получим

$$2\delta T = kC^2$$

Минимум δT имеет знак меньшего корня k. Уравнение (2.7) приведем к виду

$$Hh^2k^2 - Pk + R = 0 \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}P = S\,[(y+\beta_2)\,Z - (z+\beta_3)\,Y]^2 + HS\,[A_{22}-\mu+A_{33}-\mu]\,(x+\beta_1)^2 - \\ -2HSA_{23}\,(y+\beta_2)\,(z+\beta_3)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}R = S\,(A_{11}-\mu)\,[(y+\beta_2)\,Z - (z+\beta_3)\,Y]^2 + 2\,SA_{23}\,[(z+\beta_3)\,Y - (y+\beta_2)\,Z]^2 + \\ HS\,(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu) - A_{23}]\,(x+\beta_1)^2 + 2HS\,[A_{12}A_{13} - (A_{11}-\mu)\,A_{23}]\,(y+\beta_2)\,(z+\beta_3)\end{gathered}$$

Условия положительности k выразятся двумя неравенствами $P > 0$, $R > 0$.

Покажем, что они могут быть удовлетворены для $\lambda = 0$ и $\mu < \mu_3$. Придадим T следующий вид:

$$2T = SA_{11}{}^*x^2 + 2SA_{23}{}^*yz + S\,\frac{p^2}{c_1}$$

Здесь $A_{ij}{}^*$ — значения функций A_{ij} при $\lambda = 0$; x, y, z зависят при $\lambda = 0$ только от A_{ij} и μ.

При всяких данных x, y, z выбором коэффициентов b_{ij} можно сделать X, Y, Z, какими угодно (при этом меняем коэффициенты a_{ij} так, чтобы $A_{ij}{}^*$, а следовательно и x, y, z_* не менялись бы).

Матрицу (A_{ij}^*) выберем положительно-определенной. При $\mu > \mu_3$ квадратичная форма от неизвестных

$$[(x+\beta_1)Y-(y+\beta_2)X] \qquad (xyz,\ XYZ,\ 123)$$

входящая в выражение для R, может быть положительной при некоторых значениях X, Y, Z. Придадим этим выражениям такие значения; затем, увеличивая их пропорционально, сделаем положительной величину R. Дальнейшим пропорциональным увеличением X, Y Z (если это окажется необходимым) добьемся положительности величины P.

Таким образом, показано, что при $\mu < \mu_3$ возможны устойчивые движения для возмущений, не изменяющих h и g. Достаточные условия такой устойчивости: $P > 0$, $R > 0$.

Если в числе движений, соответствующих величинам h и g, бесконечно близким к тем, которые определяются рассматриваемым движением, существуют бесконечно близкие к последнему, то, будем говорить, что это движение изменяется непрерывно с изменением h и g. Найдем условия такой непрерывности. Из уравнений (1.3) получим следующие дифференциальные уравнения:

$$(A_{11}-\mu)\,dx+A_{12}dy+A_{13}dz-(x+\beta_1)\,d\mu+Xd\lambda=0 \qquad (xyz,\ 123) \tag{2.9}$$

Кроме того, имеем

$$\mathbf{S}\,(x+\beta_1)\,dx=2hdh, \qquad \mathbf{S}\,(\xi+\alpha_1)\,dx+\mathbf{S}\,(x+\beta_1)\,d\xi=dg \tag{2.10}$$

Если же в (2.10) вместо ξ, η, ζ, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ подставим их величины, получаемые дифференцированием первых трех уравнений (1.2), то получим

$$\mathbf{S}X\,dx-Hd\lambda=-dg \tag{2.11}$$

Пять уравнений (2.9), (2.10) и (2.11) дадут возможность по данным величинам dg и dh найти определенные значения величин dx, dy, dz, $d\mu$ и $d\lambda$, пока определитель этих уравнений не обращается в нуль.

Определитель рассматриваемой системы в развернутом виде будет R (2.8). Движения, для которых $R\neq 0$, устойчивы безусловно.

Итак, при помощи теоремы Рауса с дополнением Ляпунова показано, что для $\mu < \mu_3$ существуют безусловно устойчивые движения.

Достаточные условия устойчивости следующие:

$$R>0,\quad P>0.$$

§ 3. Выпишем теперь уравнения возмущенного движения

$$\begin{gathered}
\frac{d\delta x}{dt}=\delta y\frac{\partial T}{\partial\zeta}-\delta z\frac{\partial T}{\partial\eta}+(y+\delta y+\beta_2)\left(\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)_\delta-(z+\delta z+\beta_3)\left(\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)_\delta \\
\frac{d\delta\xi}{dt}=\delta y\frac{\partial T}{\partial z}-\delta z\frac{\partial T}{\partial y}+(y+\delta y+\beta_2)\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_\delta-(z+\delta z+\beta_3)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_\delta+ \\
+\delta\eta\frac{\partial T}{\partial\zeta}-\delta\zeta\frac{\partial T}{\partial\eta}+(\eta+\delta\eta+\alpha_2)\left(\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)_\delta-(\zeta+\delta\zeta+\alpha_3)\left(\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)_\delta \qquad (xyz,\ \xi\eta\zeta,\ 123)
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь индекс δ означает результат подстановки в $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ и т. д., величин $\delta x,\ldots$, δy и т. д. вместо x, $y,\ldots$ и т. д. Положим

$$\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\xi}=\omega_1 \qquad (\xi\eta\zeta,\ 123)$$

Тогда

$$2\delta T=2A+\mathbf{S}\,\frac{\omega_1^2}{c_1}, \qquad 2A=\mathbf{S}\,(A_{11}-\mu)\,(\delta x)^2+2\mathbf{S}A_{23}\delta y\delta z$$

Полагая $\sigma = S(b_{11} - \lambda) / c_1$, приведем, следуя [1], систему уравнений (3.1) к виду

$$\frac{d\delta x}{dt} = (y + \beta_2)\,\omega_3 - (z + \beta_3)\,\omega_2 \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt} = (y + \beta_2)\frac{\partial A}{\partial \delta z} - (z + \beta_3)\frac{\partial A}{\partial \delta y} + [Z - \sigma(z + \beta_3)]\,\omega_2 - $$
$$- [Y - \sigma(y + \beta_2)]\,\omega_3 \qquad (xyz,\ 123,\ XYZ)$$

Будем искать частное решение уравнений (3.2)

$$\delta x = \gamma_1 e^{kt}, \qquad \omega_1 = \theta_1 e^{kt} \qquad (xyz,\ 123) \qquad (\gamma_i,\ \theta_i = \text{const})$$

Положим

$$2B = S(A_{11} - \mu)[(y + \beta_2)\,\theta_3 - (z + \beta_3)\,\theta_2]^2 +$$
$$2SA_{23}\,[(z + \beta_3)\,\theta_1 - (x + \beta_1)\,\theta_3]\,[(x + \beta_1)\,\theta_2 - (y + \beta_2)\,\theta_1]$$
$$B_{11} = (A_{22} - \mu)(z + \beta_3)^2 + (A_{33} - \mu)(y + \beta_2)^3 - 2A_{23}\,(y + \beta_2)\,(z + \beta_3)$$
$$B_{23} = A_{12}\,(x + \beta_1)(z + \beta_3) - A_{13}\,(x + \beta_1)(y + \beta_2) -$$
$$-A_{23}\,(x + \beta_1)^2 - (A_{11} - \mu)\,(y + \beta_2)\,(z + \beta_3)$$
$$(x\ y\ z,\ 123)$$

Тогда система уравнений (4.2), после исключения γ_1, γ_2, γ_3 примет вид

$$\frac{\partial B}{\partial \theta_1} + \frac{k^2}{c_1}\,\theta_1 + [Y - \sigma(y + \beta_2)]\,k\theta_3 - [Z - \sigma(z + \beta_3)]\,k\theta_2 = 0 \qquad (xyz,\ XYZ,\ 123)$$

Исключая отсюда θ_1, θ_2, θ_3 получим искомое уравнение

$$\det \|C_{ij}\| = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad C_{ii} = B_{ii} + \frac{k^2}{c_i} \tag{3.3}$$

$$C_{12} = B_{12} - [Z - \sigma(z + \beta_3)]\,k, \qquad C_{23} = B_{23} - [X - \sigma(x + \beta_1)]\,k$$
$$C_{13} = B_{13} + [Y - \sigma(y + \beta_2)]\,k, \qquad C_{31} = B_{31} - [Y - \sigma(y + \beta_2)]\,k$$
$$C_{21} = B_{12} + [Z - \sigma(z + \beta_3)]\,k, \qquad C_{32} = B_{32} + [X - \sigma(x + \beta_1]\,k$$

Уравнение (3.3) имеет два равных нулю корня.

После сокращения на k^2 уравнение (3.3) приводится к виду

$$\frac{k^4}{c_1c_2c_3} + Qk^2 + R = 0$$

$$Q = S\frac{1}{c_2c_3}B_{11} + S\frac{1}{c_1}[X - \sigma(x + \beta_1)]^2 \tag{3.4}$$

$$R = S\frac{1}{c_1}(B_{22}B_{33} - B^2{}_{23}) + SB_{11}[X - \sigma(x + \beta_1)]^2 + 2SB_{23}[Y - \sigma(y + \beta_2)]\,[Z - \sigma(z + \beta_3)]$$

Коэффициент R есть величина, определяемая формулой (2.8), а для Q можно получить выражение

$$Q = S\frac{1}{c_1}[X - \sigma(x + \beta_1)]^2 + HS\frac{A_{11} - \mu}{c_1} -$$
$$- S(A_{11} - \mu)\frac{(x + \beta_1)^2}{c_1{}^2} - 2SA_{23}\frac{(y + \beta_2)\,(z + \beta_3)}{c_2c_3}$$

Необходимое условие устойчивости состоит в том, чтобы уравнение (3.3) не имело корней с положительными вещественными частями, что эквивалентно выполнению следующих условий:

$$Q^2 - \frac{4}{c_1c_2c_3}R \geqslant 0, \qquad Q \geqslant 0, \qquad R \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Эти необходимые условия делаются достаточными для устойчивости в первом приближении, если в них отбросить знаки равенства. Покажем, что условиям (3.5) всегда можно удовлетворить при $\mu > \mu_3$ для достаточно больших значений λ^2.

Пусть $\lambda \to \infty$. При этом

$$\frac{A_{ii}}{\lambda^2} = -\frac{1}{c_i} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{A_{ij}}{\lambda^2} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{\Phi_i}{\lambda^2} = \beta_i\left(-k + \frac{1}{c_i}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ \left(\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mu}{\lambda^2} = -k\right) \ k \neq \frac{1}{c_i}$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mu_i}{\lambda^2} = -k_i = -\frac{1}{c_i}$$

Будем одновременно с λ изменять μ таким образом, чтобы

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mu}{\lambda^2} = -\frac{1}{c_1} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

где ε — некоторое малое число. Очевидно, что для достаточно больших значений λ будем иметь $\mu > \mu_3$.

Полагая

$$x = -\beta_1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (xyz,\ 123)$$

Найдем из уравнений (1.2), разделив их на λ^2

$$x = -\beta_1 + \frac{1}{k - \dfrac{1}{c_1}} \frac{1}{\lambda}\left(\alpha_1 + \beta_1\frac{b_{11}}{c_1} + \beta_2\frac{b_{12}}{c_1} + \beta_3\frac{b_{13}}{c_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (xyz,\ 123)$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda(x + \beta_1)}{c_1} = \frac{1}{c_1 k - 1} f_1$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} X = -f_1 \frac{c_1 k + 1}{c_1 k - 1} \qquad (xyz,\ XYZ\ 123)$$

Если выбрать ε достаточно малым, то будем иметь

$$\lim_{\lambda\to\infty} R = c_1 \frac{1}{\varepsilon^4} f_1^4 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3}\right)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q = \frac{f_1^2}{c_1\varepsilon^2}\left[\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3}\right) + \frac{1}{c_2 c_3}\right]$$

и, как легко видеть, все условия устойчивости в первом приближении удовлетворяются. Аналогично, этим условиям можно удовлетворить при $\mu = \mu_1 + \varepsilon$. Напротив, при $\mu = \mu_2 + \varepsilon$ при достаточно больших λ и достаточно малых ε нарушаются необходимые условия устойчивости.

Итак, показано, что при $\mu > \mu_3$, есть движения, устойчивые в первом приближении, а при μ, близким к μ_2, рассматриваемые движения неустойчивы.

Автор благодарит В. В. Румянцева за помощь в работе.

Поступила 28 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Сочинения, т. I. М., Изд-во АН СССР, 1953.
2. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.