О ВОЛНЕ РАЗГРУЗКИ В МАТЕРИАЛАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ТЕКУЧЕСТЬЮ

Ю. П. Гуляев, В. С. Ленский
(Москва)

В работе решается вопрос о существовании волны разгрузки в случае распространения одномерных волн в полубесконечном стержне из материала с запаздывающей текучестью. Здесь же формулируются условия разгрузки и излагается аналитический метод получения выражения для начальной скорости волны разгрузки.

1. Условие разгрузки. В работе [1] для задач о распространении активных продольных волн в стержне из материала с запаздывающей текучестью принята зависимость $\sigma \sim \varepsilon \sim t$ в виде $\sigma = F(\varepsilon, t - x/a_0)$. В частности, исследовано решение для закона

$$\sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_s, \quad \sigma = E_1\varepsilon + (E - E_1)\,\varepsilon_s\,(t - x / a_0), \quad |\varepsilon| > \varepsilon_s \tag{1.1}$$

соответствующего линейному упрочнению при мгновенном нагружении. При этом ε_s — монотонно убывающая функция своего аргумента. Рассматривая в дальнейшем лишь случай растяжения ($\sigma \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$) отметим, что требование возрастания напряжения в сечении, в частности, нагрузки на торце полубесконечного стержня не является необходимым. Действительно, определяя, как обычно, пластическую деформацию как $\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma / E$, видим, что переход к пассивной деформации определяется требованием

$$E\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\sigma}{\partial t} \leqslant 0 \tag{1.2}$$

С помощью (1.1) это условие представляется в одном из двух видов:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \leqslant \varepsilon_S'\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} \leqslant E\varepsilon_S'\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \tag{1.3}$$

Предельный случай «нейтрального» нагружения, исследованный в работе [1] (область *2* на фиг. 1 и формула (13) указанной работы), соответствует знаку равенства в (1.3). В частности, разгрузка на конце стержня начинается в момент $t = t_0$, если приложенное напряжение $\varphi(t) = \sigma(0, t)$ удовлетворяет условию

$$\varphi'(t) \leqslant E\varepsilon_S'(t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \tag{1.4}$$

2. Волна разгрузки. Пусть τ — момент возникновения пластической деформации на конце $x = 0$ полубесконечного стержня и с момента времени $t = t_0 \geqslant \tau$ удовлетворяется условие (1.4). Покажем, что граница между областями активной и пассивной деформаций $t = f(x)$ на плоскости характеристик (x, t), т. е. волна разгрузки имеет конечную скорость распространения $b = 1/f'(x)$, удовлетворяющую условию

$$a_1 \leqslant b \leqslant a_0, \qquad a_0 = \sqrt{E / \rho}, \qquad a_1 = \sqrt{E_1 / \rho} \tag{2.1}$$

Здесь a_0, a_1 — скорости распространения продольных упругих и пластических волн соответственно. Для области разгрузки примем связь между напряжением и деформацией в виде $\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$, или, согласно (1.1)

$$\sigma = E\varepsilon - (E - E_1)(\varepsilon_0 - \varepsilon_{S0}) \tag{2.2}$$

Здесь $\varepsilon_0(x)$ — максимальное значение деформации в сечении x; ε_{S0} — значение $\varepsilon_S(t - x / a_0)$ при $t = f(x)$. Эта гипотеза соответствует наблюдаемым фактам, в частности, — «замораживанию» релаксации и времени прохождения активной деформации при разгрузке, проявляющемуся в исчерпании периода запаздывания путем повторных ударов [2,3]. Уравнение движения в области разгрузки $t > f(x)$, если таковая существует, согласно (2.2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_0^2 - a_1^2)\frac{d}{dx}(\varepsilon_{S0} - \varepsilon_0)$$

а его общим решением будет

$$u(x, t) = F_1(x + a_0 t) + F_2(x - a_0/t) - \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2}\int_0^x (\varepsilon_{S0} - \varepsilon_0)\,dx \tag{2.3}$$

Напомним [1], что в области активных деформаций

$$u = -\frac{a_1}{E_1}\int\limits_{\tau}^{t-x/a_1}[\varphi(\xi) - E\varepsilon_S(\xi)]\,d\xi - a_0\int\limits_{\tau}^{t-x/a_0}\varepsilon_S(\xi)\,d\xi - \frac{a_0}{E}\int\limits_{0}^{\tau}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (2.4)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1}\left[\varphi(t - x/a_1) - E\varepsilon_S(t - x/a_1)\right] + \varepsilon_s(t - x/a_1)$$

Если искомая волна разгрузки является волной сильного разрыва, то из кинематических и динамических условий

$$b\,[u_x] = -\,[u_t] \quad \rho b\,[u_t] = -\,[\sigma] \equiv -\,E[u_x]$$

следует, что $b = a_0$, поскольку скачки указанных величин отличны от нуля. Следовательно, при снижении нагрузки на конце стержня скачком волна разгрузки существует и распространяется со скоростью упругих волн.

Исследуем случай волны разгрузки слабого разрыва, когда

$$u_x = \varepsilon_0, \quad u_t = u_{t0} \quad \text{при } t = f(x) \qquad (2.5)$$

где под u_{t0}, согласно (2.5), понимаем выражение

$$u_{t0} = -\frac{a_1}{E_1}\left[\varphi\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right) - E\varepsilon_S\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right)\right] - a_0\varepsilon_S\left(f(x) - \frac{x}{a_0}\right) \qquad (2.6)$$

Вычисляя u_x и u_t на основании (2.3) и используя (2.4) — (2.6), найдем

$$F_1'(x + a_0 f(x)) = \frac{a_1(a_0 - a_1)}{2a_0^2}(\varepsilon_{S0} - \varepsilon_0) \quad F_2'(x - a_0 f(x)) = \frac{a_1(a_0 + a_1)}{2a_0^2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{S0}) + \varepsilon_{S0}$$

Используя эти выражения и вычисляя по (2.3) величину $\partial\varepsilon / \partial t$ на волне разгрузки, получим

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{a_1^2 - b^2}{E_1(a_0^2 - b^2)}\left[\varphi'\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right) - F\varepsilon_S'\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right)\right] + \varepsilon_S'\left(f(x) - \frac{x}{a_0}\right) \qquad (2.7)$$

Если линия $t = f(x)$ является действительно волной разгрузки, то согласно первому неравенству (1.3) должно иметь место неравенство

$$\frac{a_1^2 - b^2}{E_1(a_0^2 - b^2)}\left[\varphi'\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right) - E\varepsilon_S'\left(f(x) - \frac{x}{a_1}\right)\right] \leqslant 0 \qquad (2.8)$$

Исследуем его, чтобы выяснить свойства волны разгрузки, т. е. условия, при которых она существует.

Скорость волны разгрузки не может превосходить скорости упругой волны. Действительно, если $b > a_0$ (а значит $b > a_1$), то геометрически ясно, что $f(x) - x / a_1 < t_0$. Но при этом выражение в квадратных скобках в (2.8) неотрицательно и неравенство (2.8) не выполняется.

Если положить $b < a_1$ (а значит $b < a_0$), то волна разрузки не будет пересекать область активных деформаций, что противоречит ее определению.

Таким образом, неравенство (2.8) справедливо при условии $a_1 \leqslant b \leqslant a_0$, если нагрузка на конце стержня подчиняется требованию (1.4).

3. Начальная скорость волны разгрузки. Основываясь на результатах разделов 1 и 2, получим формулы для начальной скорости волны разгрузки. Предположим вначале, что в начальной точке разгрузки на плоскости характеристик ($t = t_0$, $x = 0$) давление $\varphi(t)$ скачком изменяет свою скорость, так что имеют место следующие соотношения

$$k_1 = \varphi'(t_0 - 0), \qquad k_2 = \varphi'(t_0 + 0)$$

Очевидно, что k_1 и k_2 должны удовлетворять неравенствам

$$k_1 \geqslant E\varepsilon_S'(t_0), \qquad k_2 < E\varepsilon_S'(t_0)$$

На основании (2.4) и (2.7) связь между предельными скоростями деформации на торце стержня ($x = 0$) дается формулой

$$\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial t} = \frac{a_1^2 - b^2}{a_0^2 - b^2}\frac{\partial\varepsilon^-}{\partial t} + \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 - b^2}\varepsilon_S'(t_0) \qquad (3.1)$$

Но, согласно законам линейного упрочнения и разгрузки, в той же точке имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial t} = \frac{k_2}{\rho a_0^2}, \qquad \frac{\partial \varepsilon^-}{\partial t} = \frac{k_1}{\rho a_1^2} + \frac{a_1^2 - a_0^2}{a_1^2} \varepsilon_S'(t_0) \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим алгебраическое уравнение для начальной скорости волны разгрузки

$$\frac{k_2}{\rho a_0^2} = \frac{k_1 (a_1^2 - b^2)}{\rho a_1^2 (a_0^2 - b^2)} + \frac{b^2 (a_0^2 - a_1^2)}{a_1^2 (a_0^2 - b^2)} \varepsilon_S'(t_0) \tag{3.3}$$

из которого вытекает, что

$$b(0) = \left(\frac{a_1^2 a_0^2 (k_1 - k_2)}{a_0^2 k_1 - a_1^2 k_2 - \rho a_0^2 (a_0^2 - a_1^2) \varepsilon_S'(t_0)}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

В частности, если $k_2 = -\infty$, т. е. давление на конце стержня резко уменьшается, то $b \equiv a_0$.

Если $k_1 = k_2 = E\varepsilon_s'(t_0)$, то формула (3.4) теряет смысл. Соотношение (3.1) при этом удовлетворяется тождественно. Чтобы найти $b(0)$ в случае плавной разгрузки, достаточно предположить непрерывность $\varphi''(t)$ в начальной точке разгрузки.

Процесс определения $b(0)$ сводится к следующему. Вычислим предельные значения вторых производных по времени от деформации при $x = 0$, $t = t_0$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^+}{\partial t^2} = \frac{a_1}{2} \left[\frac{a_0 + a_1}{(1 - a_0 f')^2} - \frac{a_0 - a_1}{(1 + a_0 f')^2}\right] \left[\frac{d^2 \varepsilon_0}{dx^2} - \varepsilon_S' f'' - \frac{(a_0 f' - 1)^2}{a_0^2} \varepsilon_S''\right] + \varepsilon_S''$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^-}{\partial t^2} = \frac{a_1^2}{(a_1 f' - 1)^2} \frac{d^2 \varepsilon_0}{dx^2} - \frac{a_1^2 (a_0 f' - 1)^2}{a_0^2 (a_1 f' - 1)^2} \varepsilon_S'' - \frac{a_1^2}{(a_1 f' - 1)^2} f'' \varepsilon_S'$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^+}{\partial t^2} - a(f') \frac{\partial^2 \varepsilon^-}{\partial t^2} = \varepsilon_s''(t_0) [1 - a(f')] \tag{3.5}$$

$$a(f') = \frac{1}{2a_1} \left[\frac{a_0 + a_1}{(1 - a_0 f')^2} - \frac{a_0 - a_1}{(1 + a_0 f')^2}\right] (a_1 f' - 1)^2$$

С другой стороны, законы линейного упрочнения и разгрузки дают

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^+}{\partial t^2} - \frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon^-}{\partial t^2} = \varepsilon_S''(t_0) \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) будет следствием непрерывности $\varphi''(t)$ при $t = t_0$. Сравнивая (3.5) и (3.6), получим алгебраическое уравнение для определения начальной скорости волны разгрузки

$$a_1 b^2 + 2a_0^2 b - 3a_0^2 a_1 = 0 \tag{3.7}$$

Решая (3.7), находим

$$b(0) = a_0 \left[\left(\frac{a_0^2}{a_1^2} + 3\right)^{1/2} - \frac{a_0}{a_1}\right] \tag{3.8}$$

Формула (3.8) имеет место и при отсутствии эффекта запаздывания текучести и приводится в монографии [4].

Полученные выражения для начальной скорости волны разгрузки будут отправным пунктом построения всей волны разгрузки методом характеристик.

Поступила 4 IV 1968 Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С., Фомина Л. Н. Распространение одномерных волн в материалах с запаздывающей текучестью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 3.
2. Vreeland T., Wood D. S., Clark D. S. A stady of the mechanism of the delayed time phenomenon. Trans. Amer. Soc. Metals. 1953, vol. 45.
3. Johnson J. E., Wood D. S., Clark D. S., Delayed yielding in annealed low — carbon steel under compression impact. Proc. Amer. Soc. Testing Materials., 1953, vol. 53.
4. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.