При помощи этого алгоритма решена, в частности, нелинейная система, к которой приводит рассмотрение форм равновесия и энергии деформации пологих сферических оболочек (Задача решена автором совместно с В. Н. Стегнием.)

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = -\frac{y_2}{x} + \frac{y_1}{x^2} + y_3\left(1 + \frac{y_1}{x}\right) + 2qx$$

$$y_3' = y_4, \qquad y_4' = -\frac{y_4}{x} + \frac{y_3}{x^2} - y_1\left(1 + \frac{y_1}{2x}\right)$$

$$y_5' = y_1, \qquad y_6' = xy_2^2 + \frac{y_1^2}{x}, \qquad y_7' = xy_4^2 + \frac{y_3^2}{x}$$

$$y_2 - 10y_1 = 0, \qquad -y_6 + 0.01y_2^2 + 0.3y_1^2 = 0$$

$$y_4 - 10y_3 = 0, \ -y_7 + 0.01\ y_4^2 - 0.3y_3^2 = 0, \qquad \text{при } x = 0.1$$

$$y_2 + 0.03y_1 = 0, \qquad y_3 = y_5 = 0 \qquad \text{при } x = 10$$

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2. Стрелки на кривых показывают направление движения при непрерывном изменении параметра q от нуля. Видно, что задача при каждом фиксированном q имеет несколько решений. Так, например, при $q = 0.140$ задача имеет четыре решения. Графики $y_1(x)$, соответствующие этим решениям, приведены на фиг. 3. Номер кривой показывает порядок, в котором это решение получается при непрерывном изменении q от нуля.

Поступила 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2. М., «Наука», 1967.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ИДЕАЛЬНО ГИБКОЙ НИТИ

М. А. Зак (Ленинград)

В работе [1] уравнения динамики идеально гибкой нити разрешены относительно кривизны и кручения ее формы и найдены характеристические скорости распространения волн этих параметров. В данной работе устанавливается связь между характеристическими скоростями и потерей устойчивости формы, которая отождествляется с потерей корректности в постановке задач с начальными условиями.

Под идеально гибкой нитью будем понимать материальную линию, не сопротивляющуюся изменению формы, т. е. кривизны Ω_3 и кручения Ω_1.

Пусть невозмущенное движение нити характеризуется уравнениями

$$\Omega_i^0 = \Omega_i^0(s, t) \qquad (i = 1,3)$$

Здесь s — дуговая координата, t — время.

Дадим кривизне и кручению некоторые малые отклонения $\varepsilon_i^0(s)$ от невозмущенных значений, потребовав, чтобы эти отклонения удовлетворяли соответствующим граничным условиям. Тогда возмущенное движение нити примет вид

$$\Omega_i = \Omega_i^0(s, t) + \varepsilon_i(s, t) \qquad (i = 1,3)$$

Пусть в некоторой области D $(0 \leqslant s \leqslant s_1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1)$ имеют место неравенства

$$\max|\Omega_i - \Omega_i^0| < \delta, \qquad \max|\varepsilon_i| < \nu \tag{1}$$

Будем считать форму нити неустойчивой в области D, если

$$\delta \to \delta_0 > 0 \text{ при } \nu \to 0. \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{lj}\frac{\partial q_j}{\partial t}+b_{lj}\frac{\partial q_j}{\partial s}+c_{lj}q_j\right)=0 \tag{3}$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$q_m{}^\circ=\frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 si},\quad \lambda_1>0;\quad q_j{}^\circ=0,\quad (j=1, 2, \ldots, n\neq m)\quad \text{при } t=0;\ 0\leqslant s\leqslant s_1 \tag{4}$$

Будем полагать, что соотношения (4) удовлетворяют граничным условия уравнений (3). Отвлекаясь от конкретного вида этих граничных условий, положим, что ряд соответствующих собственных чисел $\lambda_1{}^1$, $\lambda_1{}^2$,... и т. д. неограничен сверху.

Решение системы (3) может быть записано в виде

$$q_j=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}e^{\lambda_1(\lambda_k t-s)i}\qquad (j=1,\ldots,n) \tag{5}$$

Здесь λ_k — корни характеристического уравнения

$$\det\left(a_{lj}\lambda_k-b_{lj}-\frac{c_{lj}}{\lambda_1}\right)=0 \tag{6}$$

а A_{jk} определяются из системы

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{lj}\lambda_k-b_{lj}-\frac{c_{lj}}{\lambda_1}\right)A_{jk}=0\qquad (k=1,\ldots,n) \tag{7}$$

с точностью до произвольных постоянных $C_1,\ldots, C_k$, Положим вначале, что все корни λ_k различны. Тогда

$$A_{jk}=B_{jk}C_k,\qquad \det(B_{jk})\neq 0 \tag{8}$$

причем коэффициенты B_{jk} определяются только коэффициентами системы (7) и значениями λ_k. Очевидно, что для каждого фиксированного значения k_+ имеется такое значение j_+, что

$$B_{j+k+}\neq 0$$

Для определения C_k имеем систему

$$q_j{}^\circ=\sum_{k=1}^{n}B_{jk}C_k \tag{9}$$

Здесь

$$q_j{}^0=q_j\quad \text{при } t=0,\ s=0$$

Положим, что

$$q_{j=m}{}^\circ=\frac{1}{\lambda_1},\quad q_{j\neq m}{}^\circ=0 \tag{10}$$

Тогда

$$C_k=\frac{1}{\lambda_1}\alpha_k,\quad \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_k\\ \cdots\\ \alpha_n\end{matrix}\right\|=\|B_{jk}\|^{-1}\left\|\begin{matrix}0\\ \cdots\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{matrix}\right\| \tag{11}$$

Так как матрица (B_{jk}) — неособая, коэффициенты α_k не могут быть равны нулю одновременно. С учетом равенств (9) и (11) соотношение (5) принимает вид

$$q_j=\frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{n}B_{jk}\alpha_k e^{\lambda_1(\lambda_k t-s)i},\qquad (j=1,\ldots,n) \tag{12}$$

Помимо соотношений (6) и (7), рассмотрим вспомогательные соотношения

$$\det(a_{lj}\lambda^*-b_{lj})=0,\qquad \sum_{j=1}^{n}(a_{lj}\lambda_k{}^*-b_{lj})A_{jk}{}^*=0 \tag{13}$$

Очевидно, что определяемые из них λ_k^* и A_{jk}^* не зависят от λ_1, а значит, не зависят от λ_1 и коэффициенты B_{jk}^*, α_k^*, определяемые из формул (7), (8), (11) по λ_k^* и A_{jk}^*. Отметим при этом, что λ_k^* представляют собой характеристические скорости распространяющихся волн.

Пусть $\lambda_1 \to \infty$. Тогда

$$\lambda_k \to \lambda_k^*, \quad A_{jk} \to A_{jk}^*, \quad B_{jk} \to B_{jk}^*, \quad \alpha_k \to \alpha_k^*, \quad (j=1,\ldots,n) \tag{14}$$

и при достаточно больших значениях λ_1 соотношение (12) может быть записано в виде

$$q_j = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^{n} (B_{jk}^* \alpha_k^* + \varepsilon_k)\, e^{\lambda_1[(\lambda_k^* + \zeta_k)t - s]i} \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{15}$$

где ε_k, ζ_k — малые положительные числа, причем

$$\varepsilon_k, \zeta_k \to 0 \quad \text{при } \lambda_1 \to \infty \tag{16}$$

Положим, что среди чисел λ_k^* имеются комплексные. Вследствие вещественности коэффициентов a_{lj}, b_{lj} уравнений (3) число комплексных корней четное и в каждой паре этих корней есть такое λ_{k+}^*, для которого $\operatorname{Jms}\lambda_{k+}^* < 0$.

Выберем число m, фигурирующее в формулах (10), таким образом, чтобы в соответствии с формулами (11) имело место неравенство $\alpha_{k+} \neq 0$. Нетрудно убедиться, что такая возможность есть всегда, так как матрица (B_{jk}) — неособая. Действительно, рассмотрим k_+-ю строку матрицы $(B_{jk})^{-1}$. Среди элементов этой строки обязательно найдется ненулевой элемент. Пусть этот элемент соответствует p-му столбцу. Выбирая $m = p$, придем к ненулевому значению α_{k+}. Выше отмечалось, что для каждого k_+ можно найти, по крайней мере, такое значение j_+, что $B_{j+k+} \neq 0$.

Выберем из формулы (15) решение для q_{j+}, которое можно записать так:

$$q_{j+} = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ (B_{j+k+}^* \alpha_{k+}^* + \varepsilon_k)\, e^{\lambda_1[(\lambda_{k+}^* + \zeta_{k+})t - s]i} + \sum_{k \neq k_+} (B_{j+k}^* \alpha_k^* + \varepsilon_k)\, e^{\lambda_1[(\lambda_k^* + \zeta_k)t - s]i} \right\} \tag{17}$$

Устремляя $\lambda_1 \to \infty$, получим

$$q_{j+} \to \infty \quad \text{при } q_j^\circ \to 0 \tag{18}$$

причем соотношения (18) имеют место при любых s_1 и t_1, т. е. при любых областях D.

Ход рассуждений не изменится, если среди корней λ_k есть кратные. При этом коэффициенты B_{jk} будут многочленами от t, что не повлияет на результат (18).

Сформулированный результат получен при «искусственных» начальных условиях, определяемых из соотношений (13) при $t = 0$, а именно

$$q_j(t=0) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^{n} B_{jk} \alpha_k e^{-\lambda_1 i} \tag{19}$$

Пусть начальные условия системы (3) произвольны (но удовлетворяют граничным условиям)

$$q_j\ (t=0) = q_j^*\ (s) \qquad (j = 1,\ldots, n) \tag{20}$$

и решение ее принимает вид

$$q_j = q_j^*\ (s,\ t) \qquad (j = 1,\ldots, n) \tag{21}$$

Добавим к начальным условиям (20) начальные условия (19). Выбирая λ_1 достаточно большим, можно сделать изменения начальных условий (20) настолько малыми, что они не будут выходить за пределы точности их задания.

Однако решение исходной системы (3) на основании принципа суперпозиции приобретает вид

$$q_j = q_j^*(s,t) + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^{n} B_{jk} \alpha_k e^{\lambda_1(\lambda_k t - s)i} \tag{22}$$

и обладает тем же свойством, что и решение (14) при $\lambda_1 \to \infty$. Итак, достаточным условием для неустойчивости в классе дифференцируемых функций решений системы (3) в задачах с начальными условиями будет наличие комплексных скоростей распространения упругих волн, имеющее место в случае, когда исходная система будет ультрагиперболической или эллиптической. Этот результат хорошо согласуется с примером Адамара [2] и может рассматриваться как его обобщение.

Пусть исходная система (3) будет квазилинейной, т. е. a_{ej}, b_{ej}, c_{ej} зависят от q_j, t, s. Будем полагать, что эти зависимости даются аналитическими функциями. Линеаризуем систему относительно некоторых невозмущенных значений $q_j^0\,(s, t)$, а полученные коэффициенты линеаризованной системы $a_{ej}^0\,(s, t)$, $b_{ej}^0\,(s, t)$, $c_{ej}^0\,(s, t)$ еще раз линеаризуем относительно фиксированных значений $s_0 = 0$, $t_0 = 0$.

В результате придем к линейной системе с постоянными коэффициентами типа (3), которая будет «близка» к исходной квазилинейной системе при «достаточно малых» t, s и $\Delta q_j = q_j - q_j^0$. Полученные выше результаты о потере устойчивости остаются справедливыми для сколь угодно малых t и s, поэтому они останутся справедливыми и для квазилинейной системы в этой же области с той лишь разницей, что здесь следует довольствоваться более слабым утверждением, а именно: из $\Delta q_j\ (t = 0) \to 0$ следует $\Delta q_j \geqslant \delta_0 > 0$, где δ_0 — достаточно малое фиксированное число, так как при $\Delta q_j \to \infty$ линеаризованная система может существенно отличаться от исходной.

Действительно, если бы для исходной системы из $\Delta q_j\ (t = 0) \to 0$ следовало бы $\Delta q_j \to 0$ для сколь угодно малых t и s, то этот же результат имел бы место и в линеаризованной системе.

Таким образом, если система (3) квазилинейна и в некоторой достаточно малой окрестности значений t_0, s_0, q_0 будет ультрагиперболической или эллиптической, то ее решения в задачах с начальными условиями неустойчивы в классе дифференцируемых функций. При этом, конечно, предполагается, что имеют место существование и единственность этих решений при соответствующих граничных условиях.

В работе [1] показано, что в нерастяжимой идеально гибкой нити имеют место два типа характеристических скоростей распространения волн (волн кривизны и кручения)

$$\lambda_1 = \pm\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \pm\left[\frac{T}{\rho} + \frac{1}{\rho\Omega_3}\left(F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial v_2}\, v_3 - \frac{\partial F_3}{\partial v_3}\, v_2\right)\right]^{1/2} \tag{23}$$

Здесь T — натяжение, ρ — линейная плотность, Ω_3 — кривизна формы, F_1, F_2, F_3, v_1, v_2, v_3 — соответственно проекции сил сопротивления и скорости на оси естественного трехгранника нити.

Согласно полученным выше результатам устойчивость формы нити теряется при выполнении одного из двух условий

$$T < 0, \quad T + \frac{1}{\Omega_3}\left(F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial v_2}\, v_3 - \frac{\partial F_3}{\partial v_3}\, v_2\right) < 0 \tag{24}$$

Первое неравенство свидетельствует о том, что форма сжатой гибкой нити неустойчива. Этот вывод хорошо согласуется с повседневными практическими наблюдениями. Действительно, хотя сжатое состояние гибкой нити не противоречит ни одному из законов механики, это состояние практически нереализуемо из-за того, что сжатая гибкая нить неустойчива.

Однако из второго неравенства (24) следует, что неустойчивость в нити может наступить не только при сжатии; она может иметь место и в растянутой нити, если скобка в (24) отрицательна, а кривизна Ω_3 достаточно мала (например, вблизи точки перегиба). Этот результат менее очевиден и непосредственно не усматривается, хотя физически потеря устойчивости здесь должна происходить с той же интенсивностью, что и в первом случае, с той лишь разницей, что в первом случае причиной потери устойчивости будет вырождение волн кривизны, а во втором — волн кручения.

Известно [1], что в растяжимой нити появляется третья система волн (волн расстяжения). Нетрудно убедиться в том, что ни при каких параметрах нити скорости распространения этих волн не подвержены вырождению. Следовательно, устойчивость формы растяжимых нитей теряется при выполнении тех же неравенств (24), что и для нерастяжимой нити.

Пусть нить движется по поверхности. В соответствии с результатами, полученными в [1], следует различать два случая, а именно: а) нить совпадает с асимптотической кривой поверхности, б) нить не совпадает с асимптотической кривой поверхности. В первом случае имеют место лишь волны кривизны, распространяющиеся со скоростью λ_1, и потеря устойчивости формы происходит при $T < 0$. Примером для этого случая может явиться движение нити по плоскости, осуществляющей двустороннюю связь. Во втором случае имеют место волны кручения, распространяющиеся со скоростью

$$\lambda_2' = \pm \sqrt{\rho^{-1}(T + A/B)}, \qquad B = \Omega_3 [1 + k(p_3 \sin\delta + p_2 \cos\delta)]$$

$$A = \cos\delta \left[(\sin\delta + kp_3)\left(F_3 + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} v_3 - \frac{\partial F_2}{\partial v_3} v_2\right) + (\cos\delta + kp_2) \times \right.$$
$$\left. \times \left(F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial v_2} v_3 - \frac{\partial F_3}{\partial v_3} v_2\right)\right] \tag{25}$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — направляющие косинусы вектора силы трения в осях естественного трехгранника, k — коэффициент трения нити о поверхность, δ — угол геодезического отклонения нити на поверхности.

Условие потери устойчивости в этом случае принимает вид

$$T + A/B < 0 \tag{26}$$

Приведенные выше результаты вызывают интерес к тем точкам нити, в которых происходит перерождение гиперболической системы уравнений динамики в ультрагиперболическую или эллиптическую систему, т. е. к тем точкам нити, в которых вместо неравенств (24) или (26) имеют место равенства. Окрестности этих точек должны быть подвергнуты специальному исследованию. Одно из таких исследований было выполнено в работе [3], где было показано, что вблизи свободного конца нити (при $T = 0$) происходит резкое повышение скоростей (щелчок кнута), связанное с потерей устойчивости формы вблизи точки $T = 0$.

В заключение остановимся несколько подробнее на особенностях сформулированного условия неустойчивости (2). Согласно этому условию неустойчивость проявляется в сколь угодно малом интервале времени в отличие от неустойчивости по Ляпунову, которая обнаруживается при $t \to \infty$. В этом смысле рассмотренная неустойчивость будет более сильной, чем неустойчивость по Ляпунову.

Существенным является также и то, что критерии введенной неустойчивости зависят только от коэффициентов при старших производных в соответствующих уравнениях динамики (которыми определяется тип системы) и не зависят не только от остальных коэффициентов, но и от граничных условий. Таким образом, введенная неустойчивость отражает весьма общие динамические свойства нити и может быть названа абсолютной неустойчивостью. Ясно, что абсолютная неустойчивость принципиально неосуществима в системах с конечным числом степеней свободы. До настоящего времени эта неустойчивость не обнаруживалась и в трехмерных континуальных системах, так как в последних волны, несущие изменения параметров внутренней геометрии (волны растяжений, сдвигов, давлений), не вырождаются ни при каких значениях параметров (даже при нелинейных характеристиках деформации). И только в одномерных или двумерных континуальных системах, где существуют «поперечные» волны, или волны, несущие изменения параметров формы, т. е. внешней геометрии, абсолютная неустойчивость может иметь место.

Поступила 19 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Зак М. А. Распространение волн в гибких нитях двоякой кривизны. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
2. Соболев С. А. Уравнения математической физики. Изд. 3 М., Гостехиздат, 1954.
3. Зак М. А. О некоторых динамических явлениях в гибких нитях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.