

краевым задачам. Из хода рассуждений, проделанных выше для одного уравнения, можно заключить, что процесс построения фундаментальных решений системы с помощью первого и второго процессов по форме совпадает с разработанным в [1], поэтому нет надобности повторять громоздких выкладок, они повторят сделанные.

Первый процесс строго повторяется [1], уравнения второго строятся так же, как и для одного уравнения: коэффициенты разлагаются в ряд Тейлора, решение представляется в виде ряда, аналогичного (3.6), подставляется затем вместе с сингулярной частью решения первого процесса в систему, и приравниванием величин одного порядка малости система превращается в рекуррентную систему систем уравнений для определения приближений второго процесса, причем на каждом этапе решается одна и та же система уравнений с постоянными коэффициентами. Здесь, конечно, трудностей больше, чем в случае одного уравнения, однако они чисто технические.

Отметим, что приближения второго процесса определяются независимо от граничных условий и для какого-либо уравнения или системы они могут быть определены один раз и использованы для решения различных задач. Необходимо только, чтобы особая точка лежала на расстоянии r_0 от границы.

Поступила 2 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5, стр. 77.
3. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 4, стр. 94.
4. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщение функции и действия над ними. Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
5. Й о н Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частным производным. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. V e r s L. Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. Commun. Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 4.
7. Ч е р н ы ш е в Г. Н. Асимптотический метод в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки). Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластинок, Баку, 1966. М., «Наука», 1966.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Н. В. В а л и ш в и л и (Москва)

При рассмотрении многих вопросов теории оболочек приходится решать нелинейные краевые задачи [1,2], что часто сопряжено со значительными трудностями. Ниже показывается, что в ряде случаев такие задачи успешно решаются численно.³

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями

$$dY_n(x)/dx = f_n(Y_n(x), q) \quad (1)$$

$$\Phi_p(Y_n(0)) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \Psi_s(Y_n(1)) = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (2)$$

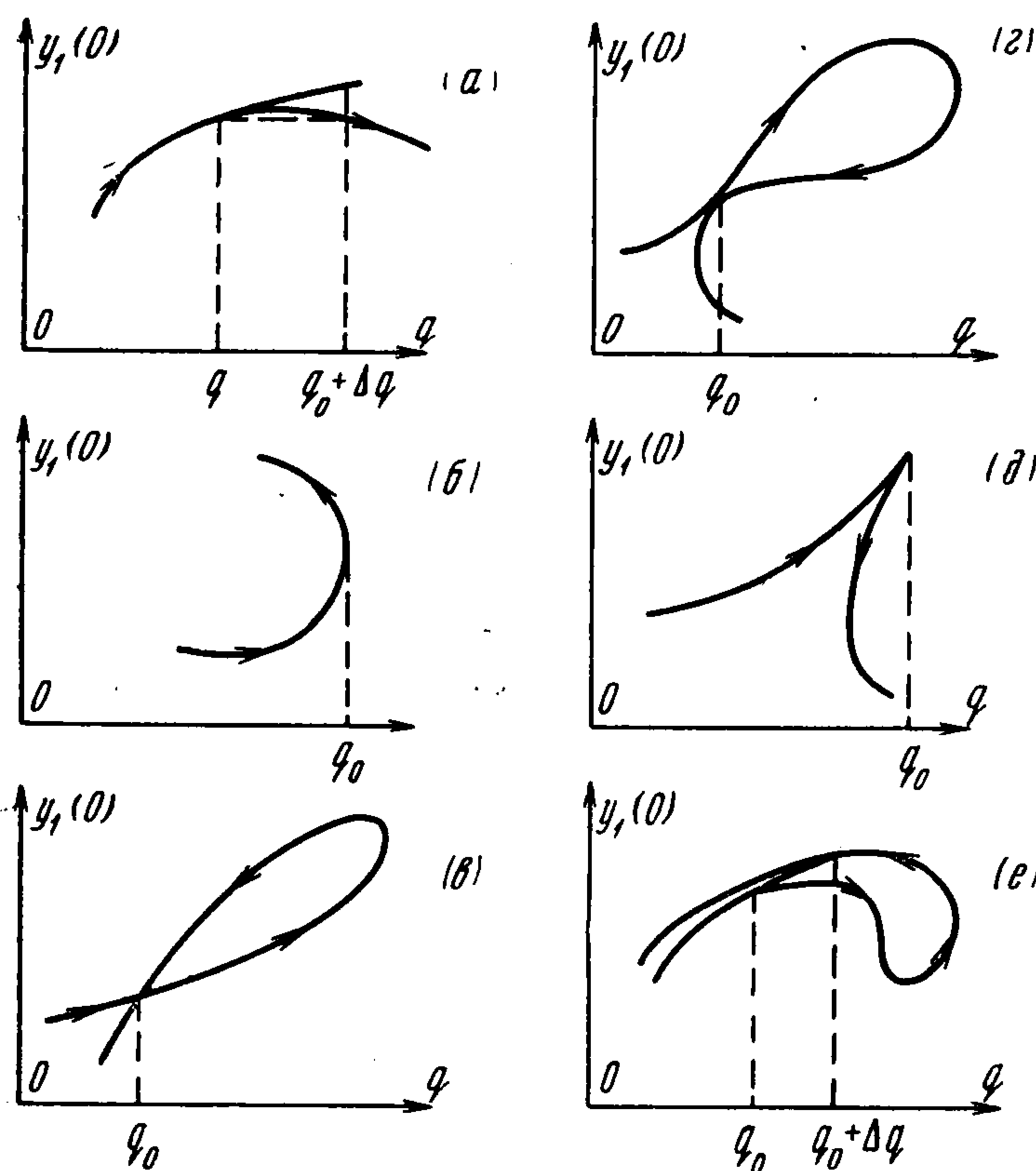
где

$$Y_n(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad f_n = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\Phi_p(Y_n(0)) = (\varphi_1(Y_n(0)), \dots, \varphi_p(Y_n(0)))$$

$$\Psi_s(Y_n(1)) = (\psi_1(Y_n(1)), \dots, \psi_s(Y_n(1))), \quad p + s = n \quad (3)$$

Здесь q —параметр, в зависимости от числовых значений которого ищутся решения задачи.



Фиг. 1

значениями следующих неизвестных функций при $x = 0$:

$$y_{p+1}(0), \quad y_{p+2}(0), \dots, \quad y_n(0) \quad (7)$$

Подставив (7) в первое из условий (2), получаем систему уравнений относительно

$$y_1(0), \quad y_2(0), \dots, \quad y_p(0) \quad (8)$$

Эта система при определенных условиях на функции φ_p может быть разрешена одним из приближенных методов решения систем нелинейных уравнений, [3].

После этого, зная значения функций при $x = 0$, интегрируем систему (1) методом Рунге — Кутты или каким-либо другим методом и получаем вектор $\psi_s(Y_n(1))$, который зависит от заданных начальных значений s неизвестных (7). Решение искомой задачи будем иметь, если начальные значения (7) подобраны так, что

$$\psi_s(Y_n(1)) = 0 \quad (9)$$

Таким образом, получено s уравнений с s неизвестными, функциональная зависимость которых устанавливается с помощью системы (1). Эта система уравнений, хотя и не может быть записана в явном виде, но также решается одним из приближенных методов. Даем параметру $q = q_0$ приращение Δq

$$q = q_0 + \Delta q \quad (10)$$

и ищем для него решение, взяв в качестве начального приближения значений функций¹

$$y_n^*(0) = y_n^{**}(0) + \frac{dy_n(0)}{dq} \Delta q \quad \text{при } x = 0 \quad (11)$$

где $y_n^*(0)$ — приближенное значение вектора для $q = q_0 + \Delta q$ при $x = 0$; $y_n^{**}(0)$ — значение вектора для $q = q_0$ при $x = 0$.

Из системы (2) уточняются значения неизвестных (8), а далее задача решается как и при $q = q_0$.

¹ При первом шаге приходится пользоваться формулой (11) без второго члена в правой части.

Пусть вместо некоторых условий из (3) имеем условия, сформулированные в интегральном виде, например

$$\int_0^1 F(Y_n(x)) dx + A = 0 \quad (4)$$

Введем вспомогательную функцию

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x F(Y_n(x)) dx + A \quad (5)$$

Если подынтегральная функция непрерывна на $x \in [0, 1]$, то можно записать

$$\begin{aligned} dy_{n+1}/dx &= F(Y_n(x)), \quad y_{n+1}(0) = A, \\ y_{n+1}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривая задачу в $n + 1$ -мерном пространстве, приходим к задаче, сформулированной выше.

Решение задачи (1) — (3) производится в следующем порядке. При фиксированном $q = q_0$ задаемся значениями

Если заранее определенное число итерации K не обеспечивает получение решения нелинейной системы уравнений с заданной точностью, то это значит, что формулы (11) плохо предсказали начальное приближение. Это может иметь место, например, в случае, представленном на фиг. 1, а. Для обеспечения сходимости Δq надо уменьшить в два раза и повторить процесс и т. д. до тех пор, пока не получим решение за K итераций. После прохождения «плохого» участка шаг по q следует увеличить.

В процессе счета проследим за элементами вектора $dy_n(0)'bq$ тогда, если какой-либо из них сильно возрастает, то необходимо вместо q фиксировать другой параметр. Так, например, если кривая $(y_1(0), q)$ в точке q_0 имеет вертикальную касательную (фиг. 1, б) то в окрестности q_0 возрастает $dy_1(0)/dq$, и в процессе счета вместо фиксирования q в окрестности необходимо фиксировать $y_1(0)$ и двигаться по кривой, рассматривая в качестве параметра $y_1(0)$.

Случай, когда в процессе счета одновременно возрастают несколько элементов вектора, требует особого рассмотрения.

Выбор начального приближения по формуле (11) обеспечивает обход петель вида, представленного на фиг. 1, в с непрерывным изменением угла наклона касательной к кривой.

Для обхода более сложных петель (фиг. 1, г) в формулах (11) должны быть учтены старшие производные в соответствии с возможным порядком касания ветвей кривой в пространстве.

Если на кривой имеются особые точки вида, представленного на фиг. 1, д, то задача требует специального рассмотрения в окрестности q_0 .

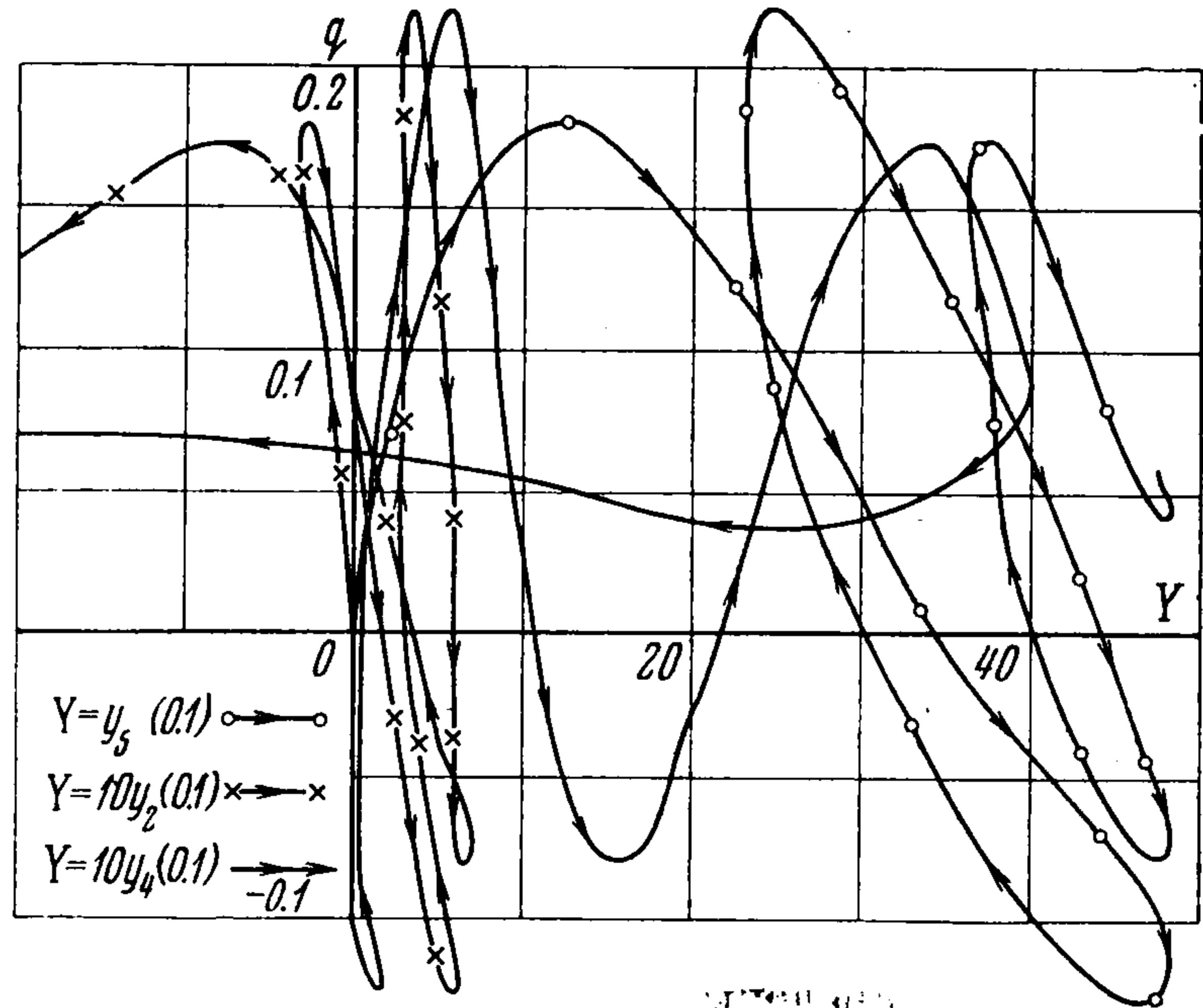
При прохождении ветвей кривой близко одна от другой (фиг. 1, е) имеется опасность перескока с одной ветви на другую.

Вероятность такого перескока уменьшается при уточнении формул (11) членами, содержащими высшие производные, и выборе достаточно малого шага по q .

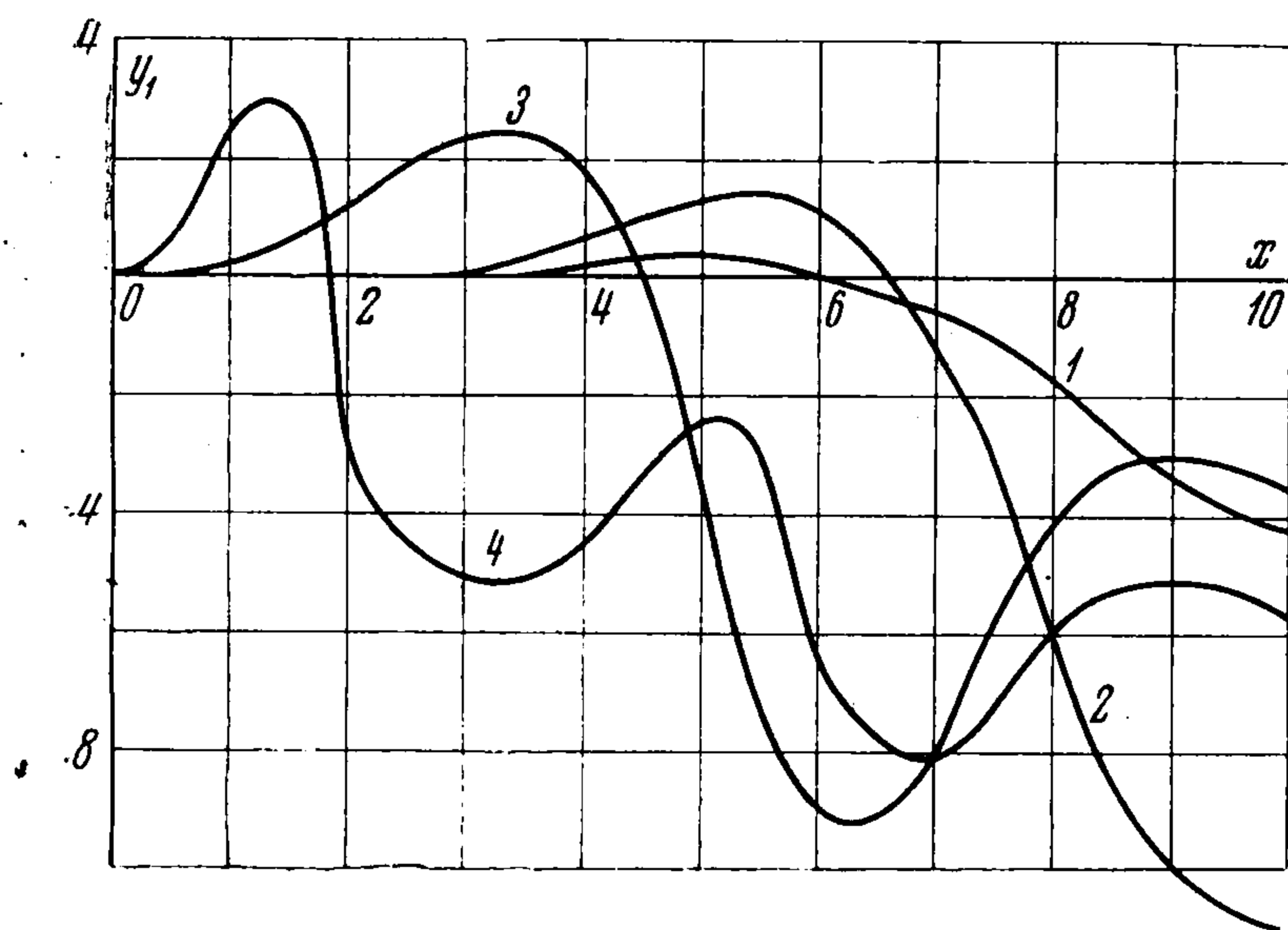
Решение задачи упрощается, если первые из условий (2) линейны или легко разрешаются относительно неизвестных (8). Если это имеет место при вторых условиях, то интегрирование целесообразно производить от $x = 1$.

Краткий анализ, проведенный выше, не может охватить всего многообразия возможных случаев. Можно привести примеры, при рассмотрении которых решение в соответствии с изложенным может оказаться затрудненным.

Однако применение алгоритма позволило получить решения задач, которые трудно решаются другими методами.



Фиг. 2



Фиг. 3

При помощи этого алгоритма решена, в частности, нелинейная система, к которой приводит рассмотрение форм равновесия и энергии деформации пологих сферических оболочек (Задача решена автором совместно с В. Н. Стегнием.)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= -\frac{y_2}{x} + \frac{y_1}{x^2} + y_3 \left(1 + \frac{y_1}{x}\right) + 2qx \\ y_3' &= y_4, & y_4' &= -\frac{y_4}{x} + \frac{y_3}{x^2} - y_1 \left(1 + \frac{y_1}{2x}\right) \\ y_5' &= y_1, & y_6' &= xy_2^2 + \frac{y_1^2}{x}, & y_7' &= xy_4^2 + \frac{y_3^2}{x} \\ y_2 - 10y_1 &= 0, & -y_6 + 0.01y_2^2 + 0.3y_1^2 &= 0 \\ y_4 - 10y_3 &= 0, & -y_7 + 0.01y_4^2 - 0.3y_3^2 &= 0, & \text{при } x &= 0.1 \\ y_2 + 0.03y_1 &= 0, & y_3 = y_5 = 0 & \text{при } x &= 10 \end{aligned}$$

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2. Стрелки на кривых показывают направление движения при непрерывном изменении параметра q от нуля. Видно, что задача при каждом фиксированном q имеет несколько решений. Так, например, при $q = 0.140$ задача имеет четыре решения. Графики $y_1(x)$, соответствующие этим решениям, приведены на фиг. 3. Номер кривой показывает порядок, в котором это решение получается при непрерывном изменении q от нуля.

Поступила 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф е о д о с ь е в В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
2. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2. М., «Наука», 1967.
3. Д е м и д о в и ч Б. П., М а р о н И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ИДЕАЛЬНО ГИБКОЙ НИТИ

М. А. З а к (Ленинград)

В работе [1] уравнения динамики идеально гибкой нити разрешены относительно кривизны и кручения ее формы и найдены характеристические скорости распространения волн этих параметров. В данной работе устанавливается связь между характеристическими скоростями и потерей устойчивости формы, которая отождествляется с потерей корректности в постановке задач с начальными условиями.

Под идеально гибкой нитью будем понимать материальную линию, не сопротивляющуюся изменению формы, т. е. кривизны Ω_3 и кручения Ω_1 .

Пусть невозмущенное движение нити характеризуется уравнениями

$$\Omega_i^0 = \Omega_i^0(s, t) \quad (i = 1, 3)$$

Здесь s — дуговая координата, t — время.

Дадим кривизне и кручению некоторые малые отклонения $\varepsilon_i^0(s)$ от невозмущенных значений, потребовав, чтобы эти отклонения удовлетворяли соответствующим граничным условиям. Тогда возмущенное движение нити примет вид

$$\Omega_i = \Omega_i^0(s, t) + \varepsilon_i(s, t) \quad (i = 1, 3)$$

Пусть в некоторой области D ($0 \leq s \leq s_1$, $0 \leq t \leq t_1$) имеют место неравенства

$$\max |\Omega_i - \Omega_i^0| < \delta, \quad \max |\varepsilon_i| < \nu \quad (1)$$

Будем считать форму нити неустойчивой в области D , если

$$\delta \rightarrow \delta_0 > 0 \text{ при } \nu \rightarrow 0. \quad (2)$$