

Соотношение (5.4) показывает, что напряжение σ_{s_2} в точках на незагруженной поверхности отверстия Γ_2 имеет вид

$$\sigma_{s_2} = \sigma_{s_{20}} + \lambda \sigma_{s_{21}} + \lambda^2 \sigma_{s_{22}} + \dots \quad (5.7)$$

при этом член $\sigma_{s_{20}}$ дается решением соответствующей плоской задачи.

Член первого порядка малости по λ — $\sigma_{s_{21}}$ также определяется аналитическими функциями $\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ$ и φ_1^*, ψ_1^* , которые, однако, не совпадают с функциями Колосова—Мухелишвили, так как граничные условия для них зависят от функций $a_{k1}^\circ(s_1)$. Лишь начиная с членов второго порядка малости по λ в решение войдут функции $a_{k3}^*(s_2)$ и $f_{p3}^*(s_2)$, описывающие добавочное напряженное состояние на внутреннем контуре.

Напряжение τ_{s_2z} будет величиной второго порядка малости по λ по сравнению с основным напряжением, характеризующим коэффициент концентрации $\sigma_{s_{20}}$. Напряжение $\tau_{n_2s_2}$ в точном решении равно нулю на свободном контуре отверстия, в плоском решении в силу условия (4.4) оно также равно нулю. Напряжение σ_z равно нулю в плоской теории, на самом деле оно будет величиной порядка λ^2 по сравнению с единицей.

Таким образом, по каким бы характеристикам ни вычислялся коэффициент концентрации на свободном отверстии, достаточно удаленном от наружного контура, в случае сжатия плиты погрешность плоской теории будет по крайней мере величиной первого порядка малости по λ по сравнению с основным значением.

Этот вывод несколько отличается от результатов, полученных в случае изгиба плиты [2] — там погрешность прикладной теории имеет порядок λ по сравнению с единицей лишь в напряжении σ_{s_2} . При вычислении же напряжения τ_{s_2z} в случае изгиба плиты прикладная теория приносит искажение самого порядка рассматриваемой величины.

Поступила 18 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. Напряженное состояние толстой плиты, ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. С а в и н Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
6. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА ГРИНА УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Г. Н. Чернышев (Москва)

Излагается метод асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек (рассматриваются выпуклые оболочки) в случае, когда свободные члены в уравнениях состоят из δ -функции Дирака или ее производных. Эти решения, будучи решениями типа функции Грина, соответствуют действию на оболочку сосредоточенных сил или моментов.

Вначале проводится исследование для одного уравнения и затем показывается, как полученные результаты распространяются на систему.

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, содержащее малый параметр ε , являющийся в теории оболочек относительной толщиной

$$\varepsilon^s M(w) + L(w) = \delta \quad (1.1)$$

Здесь M, L — эллиптические дифференциальные операторы с переменными коэффициентами и старшими производными соответственно порядков $2m, 2l, m > l$. Без ущерба для дела можем положить $s = 2(m - l)$.

В теории оболочек порядки операторов M, L равны $2m = 8, 2l = 4$, однако все рассуждения будем проводить для произвольных m, l . Так как размерность пространства n для рассуждений не имеет значения, будем проводить их для произвольного четного n (случай нечетного n рассматривается аналогично).

Для этого уравнения будем строить решение, используя метод асимптотического интегрирования [1-3]. Такие решения называются фундаментальными, и основное содержание данной работы состоит в приспособлении строгого процесса асимптотического метода к построению этих решений.

Метод асимптотического интегрирования состоит в следующем: решение представляется в виде суммы двух решений так называемых медленно меняющихся основных и решений типа краевого эффекта [1] (в работах [2,3] последние названы пограничным). Те и другие решения раскладываются в ряд по малому параметру и для членов ряда строится рекуррентная система уравнений. Процесс построения приближений основного решения назван первым итерационным процессом, аналогичный процесс для быстро изменяющихся решений назван вторым итерационным процессом.

Построим эти процессы для определения фундаментального решения уравнения (1.1). Решения второго процесса так же, как и решения типа краевого эффекта, должны носить местный характер и быстро убывать при удалении от особой точки. Такие решения будем называть локальными.

Ниже будут нужны некоторые свойства обобщенных однородных и присоединенных однородных функций, будем обозначать их одной буквой P_i (i — индекс, равный степени функции). Необходимые сведения о них изложены в монографии [4].

Однородная функция степени i будет регулярной, если все производные ее порядка больше i равны нулю. В противном случае она имеет в нуле особенность. Такую функцию будем называть особенностью степени i . Все функции степени $i < 0$ будут особенностями.

Если какая-нибудь функция имеет особую точку и в окрестности этой точки разлагается в ряд по однородным (присоединенным) функциям, то особенность наименьшей степени будем называть главной.

Структура фундаментального решения дифференциального уравнения эллиптического типа описана в работах [5,6]. Показано, что оно представляется в виде суммы сингулярной и регулярной частей, причем сингулярная часть разлагается в ряд по особенностям, главная из них имеет степень $2m - n$ ($2m$ — порядок уравнения).

2. Рассмотрим предварительно уравнение с постоянными коэффициентами, которое получим, оставив в уравнении (1.1) в операторах M, L только члены со старшими производными, приравняв коэффициенты их значениям в точке $x = 0$, т. е. особой точке правой части уравнения

$$\varepsilon^s M_{2m,0}(w) + L_{2l,0}(w) = \delta \quad (2.1)$$

Решение уравнения с постоянными коэффициентами просто определяется при помощи плоских волн [4]

$$\xi = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$$

где ω_i — составляющие единичного вектора нормали плоскости $\xi = \text{const}$. Функция Дирака $\delta(x)$ представляется следующим образом [4]:

$$\delta(x) = c \int_{\omega} |\xi|^{-n} d\omega, \quad c = (-1)^{n/2} (2\pi)^{-n} (n-1)!$$

Здесь ω — единичная сфера, $d\omega$ — ее элемент. Такое представление позволяет искать решение уравнения (2.1) в виде

$$w = \int_{\omega} \Phi(\xi) d\omega \quad (2.2)$$

и свести задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^s M_0 \Phi^{(2m)} + L_0 \Phi^{(2l)} = c |\xi|^{-n}$$

Здесь M_0, L_0 — постоянные — зависят от параметров ω_i и определяются операторами $M_{2m,0}, L_{2l,0}$ при переходе к переменной ξ . Решение этого уравнения состоит из суммы решений Φ_0, Φ_1 следующих уравнений:

$$L_0 \Phi_0^{(2l)} = c |\xi|^{-n}, \quad L_0 \Phi_1^{(2m-2l)} + \varepsilon^{-s} M_0^{-1} L_0^2 \Phi_1 = -c (|\xi|^{-n})^{(2m-4l)} \quad (2.3)$$

Если справа $2m - 4l < 0$, то дифференцирование заменяется интегрированием. Исходное уравнение, таким образом, распадается на два, первое не содержит малого параметра и соответствует вырожденному уравнению $\varepsilon = 0$, второе содержит малый параметр. Решение уравнения (2.3) можно построить с помощью фундаментального решения ψ -этого уравнения, а последнее определяется легко [4]. Убывающее при $|\xi| \rightarrow \infty$ фундаментальное решение уравнения (2.3), а именно такое нужно для построения локального решения, существует и единственно только тогда, когда половина корней λ в характеристическом уравнении $L_0 \lambda^{2(m-l)} + \varepsilon^{-s} M_0^{-1} L_0^2 = 0$ имеет положительную действительную часть, половина отрицательную. Это условие аналогично условию существования решений типа краевого эффекта [1-3]. Для уравнений оболочек оно выполняется всегда, а решение Ψ построено в работе [7]. Решение уравнения Φ_1 определяется сверткой

$$\Phi_1 = -c \Psi * (|\xi|^{-n})^{(2m-4l)}$$

Решение уравнения (2.1) будет

$$w = w' + w^* = \int_{\omega} \Phi_0 d\omega + \int_{\omega} \Phi_1 d\omega$$

Функцию w^* при $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ можно представить в виде

$$w^* = \varepsilon^s P_{\kappa} + O(\varepsilon^{2s} P_{\kappa-1}), \quad \kappa = 2m - 4l - n \quad (2.4)$$

Она растет, если $\kappa > 0$, и убывает, если $\kappa < 0$, но имеет коэффициент ε^s и в некоторой области $r > r_0$ (величина r_0 обсуждается ниже) мала по величине, следовательно с какой-то точностью ею можно пренебречь по сравнению с w' .

Найденные решения w', w^* , как нетрудно проследить, удовлетворяют уравнениям:

$$L_{2l,0}(w') = \delta, \quad \varepsilon^s M_{2m,0} L_{2l,0}^{-1}(w^*) + w^* = -\varepsilon^s L_{2l,0}^{-2} M_{2m,0}(\delta)$$

Оператор L^{-k} обратный L^k . На этом примере показано, как формально можно подойти к расщеплению исходного уравнения на два и выделить уравнение, определяющее локальное решение. Решение сложного на вид второго уравнения можно строить методом плоских волн. Действительно, фундаментальное решение, полученное этим методом, можно записать следующим образом:

$$G = c \int_{\omega} \Psi' * |\xi|^{-n} d\omega, \quad \Psi' = \varepsilon^s M_0 L_0^{-2} \Psi \quad (2.5)$$

При помощи этой функции локальное решение w^* записывается иначе

$$w = -\varepsilon^s G * L_{2l,0}^{-2} M_{2m,0}(\delta) \quad (2.6)$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (2.1) можно строить поэтапно: вначале определить его для вырожденного уравнения, полагая $\varepsilon = 0$. Главная особенность этого решения будет типа P_{2l-n} , особенность же исходного уравнения долж-

на быть P_{2m-n} . Эта неувязка устраняется добавлением решения w^* , главная особенность которого согласно (2.2), (2.3) та же, что у решения w' , но с обратным знаком. Действительно, это можно проследить, если получить в окрестности особой точки решение уравнения (2.3) в виде ряда по степеням ξ и затем проинтегрировать по сфере ω . Решение $w = w' + w^*$ будет искомым с требуемой главной особенностью.

Решение уравнения (2.1) с постоянными коэффициентами можно представить в другом виде, более удобном для обобщения на случай переменных коэффициентов

$$w = w' + w^* = \sum_{i=0}^k \varepsilon^{is} w_i' + w_1^* \quad (2.7)$$

функций w_i' удовлетворяют следующей рекуррентной системе уравнений:

$$L_{2l,0}(\omega_0') = \delta, \quad L_{2l,0}(\omega_{i+1}') = -M_{2m,0}(\omega_i'), \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

Справа стоят производные обобщенных функций, определенные в [4]. Для функции w_1^* из условия, чтобы w было решением уравнения (2.1), получится уравнение:

$$\varepsilon^s M_{2m,0}(w_1^*) + L_{2l,0}(w_1^*) = -\varepsilon^{(k+1)s} M_{2m,0}(w_k')$$

Разделив правую и левую части этого уравнения на оператор $L_{2l,0}$ по вышеизложенному методу, придем к уравнению

$$\varepsilon^s M_{2m,0} L_{2l,0}^{-1}(w_1^*) + w_1^* = -\varepsilon^{(k+1)s} M_{2m,0} L_{2l,0}^{-1}(w_k') \quad (2.8)$$

Локальное решение этого уравнения согласно (2.6) имеет вид

$$w_1^* = -\varepsilon^{(k+1)s} G^* M_{2m,0} L_{2l,0}^{-1}(w_k')$$

Правая часть уравнения (2.8) — однородная функция степени $\gamma = 2l - n - 2k(m - l)$, поведение же функции w_1^* при $r \rightarrow \infty$, как следует из уравнения, определяется этой функцией, т. е.

$$w_1^* = \varepsilon^{(k+1)s} P_\gamma + \varepsilon^{(k+2)s} O(P_{\gamma-s})$$

Если при $k = 0$ функция w_1^* возрастает, когда $r \rightarrow \infty$, то при $k \geq (2l - n) / s$ функция w_1^* будет убывающей, причем параметр ε входит в нее в степени ks . Следовательно, с увеличением числа шагов локальное решение носит все более местный характер, т. е. интенсивнее затухает с удалением от особой точки. Нетрудно проследить, что главная особенность решения w будет требуемой, потому что, хотя главные особенности приближений w_i' с ростом номера возрастают, структура решения w_1^* такова, что «лишние» особенности функции w' входят в w^* с теми же коэффициентами, но с обратным знаком и при суммировании взаимно уничтожаются. Это утверждение проверяется непосредственными построениями функций w' , w^* .

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (2.1) представляется в виде суммы функций w' , w^* , которые по аналогии с [1-3] назовем соответственно медленно меняющейся и быстро меняющейся.

3. Переходим теперь к основной задаче определения решения уравнения (1.1).

Первый процесс формально строим точно так же, как в работах [1-3]

$$w' = w_0' + \varepsilon^s w_1' + \dots + \varepsilon^{ks} w_k' + R_1 \quad (3.1)$$

$$L(w_0') = \delta, \quad L(w_{i+1}') = -M(w_i'), \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

Ряд асимптотически сходится всюду, за исключением некоторой окрестности особой точки, в которой он расходится, так как порядок главной особенности каждого следующего приближения уменьшается.

При помощи второго процесса устраним эти неувязки в особенностях приближений первого процесса и расходимости ряда в окрестности особой точки. Уравнения второго процесса определяют быстро изменяющуюся часть решения, производная которой значительно больше самой функции, а именно $\partial w^* / \partial x_i \sim \varepsilon^{-1} w^*$. Это соотношение определяет вид уравнений второго процесса.

В окрестности особой точки изменимость особенностей может быть большей. Действительно, при дифференцировании таких функций степень однородности уменьшается на единицу $\partial P_i / \partial x_j \sim r^{-1} P_i$. При $r \ll \varepsilon$ выполняется неравенство $\partial w^* / \partial x_i \gg \varepsilon^{-1} w^*$, т. е. вместо первого соотношения, принятого для построения второго процесса, выполняется более сильное. Можно, однако показать, что уравнения, построенные для определения решений, удовлетворяющих первому условию, охватывают решения, удовлетворяющие более сильному второму условию. Построим поэтому формально второй процесс так же, как это сделано в работах [1-3], а именно разложим коэффициенты уравнения (1.1) в окрестности особой точки в ряд Тейлора

$$N(w) = \varepsilon^s \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} M_{ij}(w) + \sum_{i=0}^{2l} \sum_{j=0}^{\infty} L_{ij}(w) = \delta \quad (3.2)$$

Здесь первый индекс i указывает на порядок производной в операторе, второй индекс j — на степень однородности коэффициентов в этом операторе. Возьмем k приближений первого процесса и выделим сингулярную часть W этого решения, представив ее в виде ряда по особенностям и выпишем первые члены ряда

$$W = \varepsilon^{ks} P_{\gamma} + \varepsilon^{ks} P_{\gamma+1} + \dots + \varepsilon^{(k-1)s} P_{\gamma+2(m-l)} + \dots$$

В окрестности особой точки решения w^* в сумме с W должно уничтожать выписанные особенности. Представим решение w в виде ряда

$$w^* = \sum_{i=0}^{\rho} w_i^* + R \quad (3.3)$$

считая, что каждое последующее приближение в ε^{-1} раз больше предыдущего.

Сумма функций w^* , W должна удовлетворять вблизи особой точки уравнению (3.2). Подставляя эту сумму в (3.2), получим

$$N(w^*) = -N(W) + \delta$$

Подставляем (3.3) в (3.2) и приравниваем члены одинакового порядка по величине. Учитывая при сравнении, что в окрестности особой точки выполняется неравенство $P_i \gg P_{i+1}$ (особенности разной степени по величине не сравнимы между собой и в одном уравнении стоять не могут), получим следующую рекуррентную систему второго процесса для определения приближений w_i^* :

$$\begin{aligned} \varepsilon^s M_{2m,0}(w_0^*) + L_{2l,0}(w_0^*) &= -\varepsilon^{(k+1)s} M_{2m,0}(P_{\gamma}) \\ \varepsilon^s M_{2m,0}(w_1^*) + L_{2l,0}(w_1^*) &= -\varepsilon^s M_{2m,1}(w_0^*) - L_{2l,1}(w_0^*) - \varepsilon^s M_{2m-1,0}(w_0^*) - \\ &- L_{2l-1,0}(w_0^*) - \varepsilon^{(k+1)s} [M_{2m,1}(P_{\gamma}) + M_{2m-1,0}(P_{\gamma}) + M_{2m,0}(P_{\gamma+1})], \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Слева во всех уравнениях стоит знакомый (см. 2) дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, справа — известная на каждом этапе функция.

Исключение из уравнений оператора $L_{2l,0}$, дающего медленно меняющиеся части решений, осуществляется по методу 2, а локальное решение получившихся таким образом уравнений определяется, например, сверткой фундаментального решения (2.5) с правыми частями. Принципиальных трудностей при решении не возникает.

Выпишем полученные системы уравнений первого и второго процессов

$$\begin{aligned} L(w_0') &= \delta, \quad L(w_{i+1}') = -M(w_i'), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ s^s L_{2l,0}^{-1} M_{2m,0}(w_j^*) + w_j^* &= F_j, \quad j = 1, 2, \dots, \rho \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь F_j — правые части системы (3.4), умноженные на оператор $L_{2l,0}^{-1}$. Решение уравнения (1.1) будет

$$w = \sum_{i=0}^k \varepsilon^{is} w_i' + \sum_{i=0}^{\rho} w_i^* + R \quad (3.6)$$

Нетрудно теперь проследить, что «лишние» особенности в решении w' уничтожаются решением w^* , притом так, что первое приближение w_0^* устраняет главную особенность сразу во всех приближениях w_i' , следующее приближение w_1^* устраняет следующую особенность также во всех приближениях (проверяется непосредственным построением главных особенностей в решениях w' , w^* , например, методом плоских волн). Число итераций второго приближения, необходимых для уничтожения лишних особенностей приближений первого процесса, равно $2(k+1)(m-l)+1$.

Асимптотическая сходимость решения (3.6) к точному доказывается аналогично тому, как это сделано для краевого эффекта [3]. Необходимо лишь выяснить, в какой окрестности особой точки надо решение принимать в виде (3.6), а вне этой окрестности решениями второго процесса пренебрегать.

Из уравнений (3.5) видно, что поведение локальных решений с удалением от особой точки претерпевает ряд изменений: они из очень быстро изменяющихся, удовлетворяющих условию $\partial w^* / \partial x_i \gg \varepsilon^{-1} w^*$, превращаются в быстро изменяющиеся (подчиняются условию $\partial w^* / \partial x_i \sim \varepsilon^{-1} w^*$) и, наконец, переходят в медленно изменяющиеся при $r \rightarrow \infty$, причем параметр ε входит в степени $(k+1)s$, т. е. приближения второго процесса при $r \rightarrow \infty$ имеют больший порядок малости, чем k -е приближение первого процесса.

В этих рассуждениях понятие $r \rightarrow \infty$ надо понимать условно, и считать, что $r > r_0$. Величину радиуса r_0 можно задавать, исходя из требования, на этой границе особенности уже достаточно медленно изменяющейся функции.

Например, если $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$, то можно взять $r_0 = 100 \varepsilon$, тогда в окрестности этой границы $\{\partial P_i / \partial x_j \sim 10^2 P_i \gg P_i$, следовательно, внутри сферы радиуса r_0 особенности можно считать быстро изменяющимися, и поэтому верны уравнения второго процесса, а решение, представленное рядом (3.6), справедливо. На границе сферы выполняется соотношение $\varepsilon \partial P_i / \partial x_j \sim 10^{-2} P_i \ll P_i$, т. е. функции P_i — медленно изменяющиеся, и поэтому вне сферы сходится первый процесс, а решения второго процесса становятся не нужными.

Таким образом, радиус r_0 определяется величиной малого параметра $r_0 = \zeta \varepsilon$, причем при выборе коэффициента ζ должны выполняться неравенства

$$\zeta \gg 1, \quad (\zeta \varepsilon)^{-1} \gg 1$$

Можно подсчитать количество итераций первого и второго процесса внутри сферы радиуса r_0 , необходимых для того, чтобы решение (3.6) с наперед заданной асимптотической точностью аппроксимировало бы точное решение. То же самое можно сделать для итераций первого процесса вне указанной сферы. Здесь этим заниматься не будем.

4. Построение асимптотическим методом решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа (того же типа вырожденная система), когда в правой части стоят δ -функции или ее производные, принципиально не отличается от случая одного уравнения, рассмотренного выше.

Действительно, в данной работе при отыскании фундаментального решения одного уравнения первый и второй итерационные процессы были построены так, чтобы они по форме совпали с таковыми при решении краевых задач [1-3]. В работе [1] итерационные процессы построены для системы уравнений теории оболочек применительно к

краевым задачам. Из хода рассуждений, проделанных выше для одного уравнения, можно заключить, что процесс построения фундаментальных решений системы с помощью первого и второго процессов по форме совпадает с разработанным в [1], поэтому нет надобности повторять громоздких выкладок, они повторят сделанные.

Первый процесс строго повторяется [1], уравнения второго строятся так же, как и для одного уравнения: коэффициенты разлагаются в ряд Тейлора, решение представляется в виде ряда, аналогичного (3.6), подставляется затем вместе с сингулярной частью решения первого процесса в систему, и приравниванием величин одного порядка малости система превращается в рекуррентную систему систем уравнений для определения приближений второго процесса, причем на каждом этапе решается одна и та же система уравнений с постоянными коэффициентами. Здесь, конечно, трудностей больше, чем в случае одного уравнения, однако они чисто технические.

Отметим, что приближения второго процесса определяются независимо от граничных условий и для какого-либо уравнения или системы они могут быть определены один раз и использованы для решения различных задач. Необходимо только, чтобы особая точка лежала на расстоянии r_0 от границы.

Поступила 2 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5, стр. 77.
3. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 4, стр. 94.
4. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщение функции и действия над ними. Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
5. Й о н Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частным производным. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. V e r s L. Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. Commun. Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 4.
7. Ч е р н ы ш е в Г. Н. Асимптотический метод в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки). Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластинок, Баку, 1966. М., «Наука», 1966.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Н. В. В а л и ш в и л и (Москва)

При рассмотрении многих вопросов теории оболочек приходится решать нелинейные краевые задачи [1,2], что часто сопряжено со значительными трудностями. Ниже показывается, что в ряде случаев такие задачи успешно решаются численно.³

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями

$$dY_n(x)/dx = f_n(Y_n(x), q) \quad (1)$$

$$\Phi_p(Y_n(0)) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \Psi_s(Y_n(1)) = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (2)$$

где

$$Y_n(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad f_n = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\Phi_p(Y_n(0)) = (\varphi_1(Y_n(0)), \dots, \varphi_p(Y_n(0)))$$

$$\Psi_s(Y_n(1)) = (\psi_1(Y_n(1)), \dots, \psi_s(Y_n(1))), \quad p + s = n \quad (3)$$

Здесь q —параметр, в зависимости от числовых значений которого ищутся решения задачи.