

О ПОГРЕШНОСТИ В ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА СВОБОДНОМ ОТВЕРСТИИ МЕТОДАМИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. С. Малкина (Киев)

В работе изучается возможность применения методов плоской теории упругости для расчета концентрации напряжений на поверхности свободного отверстия в толстой плите. Используются асимптотические представления решений трехмерной задачи теории упругости для толстой плиты, полученные в [1]. Показано, что применение методов плоской теории упругости для отверстия, достаточно далеко отстоящего от наружного контура плиты, законно. Оценена погрешность, получающаяся при расчете концентрации напряжений этими методами.

§ 1. Рассмотрим однородную изотропную плиту толщиной $2h$, ограниченную боковой цилиндрической поверхностью Γ_1 . Пусть в плите есть отверстие, ограниченное цилиндрической поверхностью Γ_2 , отстоящей достаточно далеко в сравнении с толщиной плиты от наружной поверхности Γ_1 . Наибольший диаметр отверстия обозначим a . Поверхность Γ_1 нагружена системой усилий, статически эквивалентной нулю, симметричной относительно срединной плоскости плиты (изучается случай так называемого сжатия плиты; случай изгиба плиты был изучен в работе [2]). Поверхность отверстия Γ_2 свободна от нагрузок. Плоские торцы также не нагружены (фигура). Как известно, в этом случае на Γ_2 будет возникать концентрация напряжений.

Методы расчета концентрации напряжений в таких задачах с применением теории функций комплексного переменного и других приемов плоской теории упругости весьма хорошо развиты и описаны в большом количестве работ. Изложение многих результатов можно найти в монографии [3].

В работе [1] было показано, что на нагруженной боковой поверхности толстой плиты дополнительные члены в напряжениях будут величинами того же порядка, что и решение плоской задачи, т. е., что на нагруженной поверхности решение плоской теории упругости не дает хоть сколько-нибудь верной картины [4]. Посмотрим, как же обстоит дело, если поверхность отверстия свободна от напряжений.

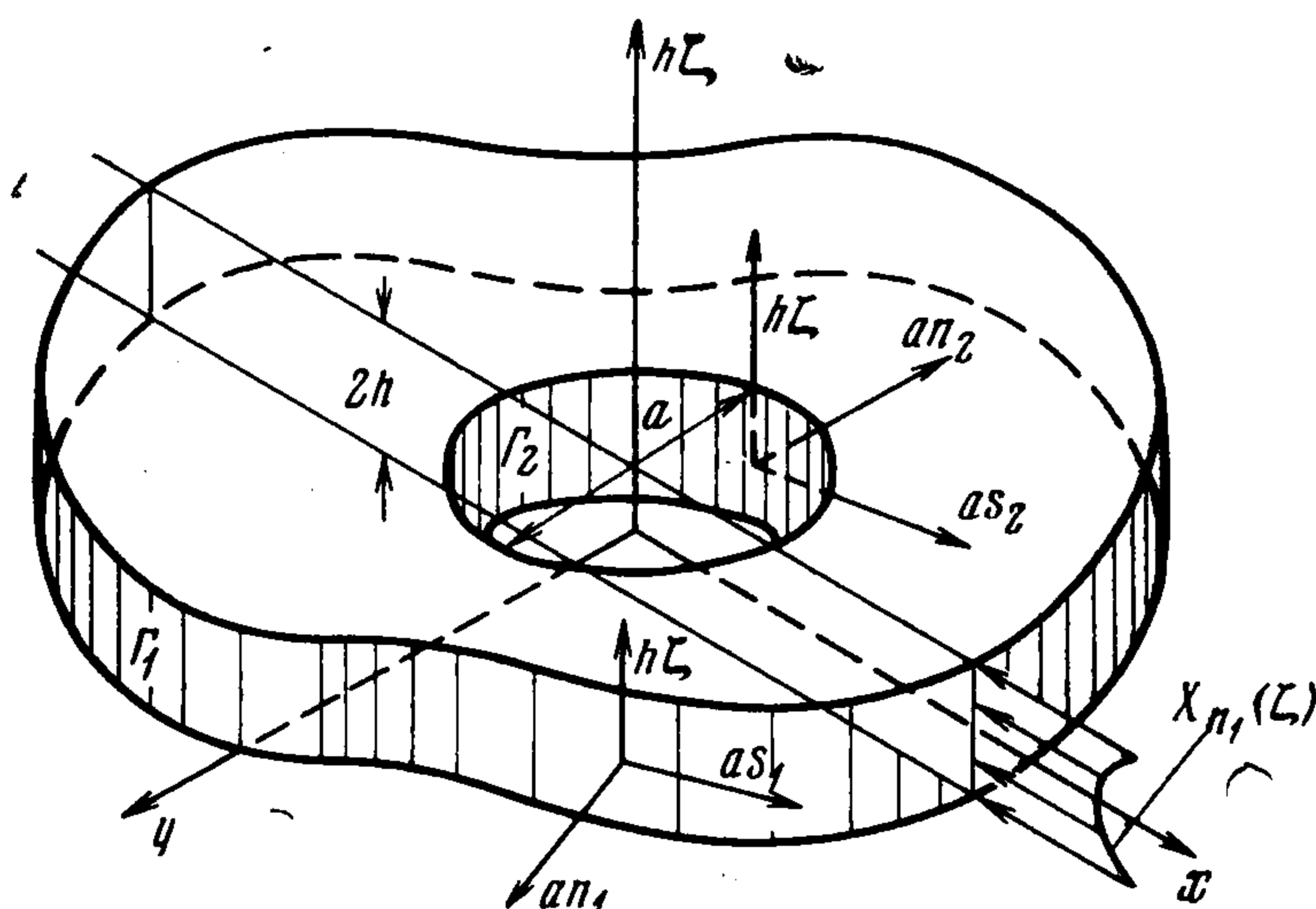
§ 2. Как и в [1], введем безразмерные местные координаты n_1, s_1, ζ , связанные с контуром Γ_1 и n_2, s_2, ζ — с Γ_2 . Радиусы кривизны наружного контура — $R_1(s_1)$, внутреннего — $R_2(s_2)$. Направляющие косинусы нормали для наружного контура — $l_1(s_1), m_1(s_1)$, для внутреннего — $l_2(s_2), m_2(s_2)$. На внешнем контуре задана система усилий $N_1(s_1, \zeta), T_1(s_1, \zeta), Z_1(s_1, \zeta)$ или $X_{n_1}(s_1, \zeta), Y_{n_1}(s_1, \zeta), Z_{n_1}(s_1, \zeta)$.

Согласно работе [1], напряженное состояние внутри сплошной плиты, ограниченной поверхностью Γ_1 , нагруженной такой системой усилий, описывается формулами

$$\sigma_{n_1}^{\circ} = -\frac{1}{2} \left\{ (m_1 + il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} [\Phi^{\circ} + z(\overline{\Phi_0})' + \overline{\Psi^{\circ}}] + (m_1 - il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\overline{\Phi^{\circ}} + \bar{z}(\Phi^{\circ})' + \Psi^{\circ}) \right\} -$$

$$- \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_1 + il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\overline{\Phi^{\circ}})'' + (m_1 - il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\Phi^{\circ})'' \right] -$$

$$- \frac{2\mu}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) [(\nu - 1) p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k_1}^{\circ}(s_1) \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) [(v-1) p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k,2}^\circ(s_1) + \right. \\
& + \left[-(v-1) \frac{n_1}{2\delta_k} p_k(\zeta) \left(\frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) + \delta_k \alpha_k(\zeta) \left(-\frac{a}{R_1} + \frac{11a^2}{8R_1^2} n_1 - \frac{n_1}{2} \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) \right] \times \\
& \times a_{k,1}^\circ(s_1) \left. \right\} \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \frac{2\mu}{a} 2v \frac{1}{H_1} \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) \times \right. \\
& \left. \times f_{p,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} + \dots \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{n_1 s_1}^\circ = & -\frac{1}{2} \left\{ (l_1 - im_1) \frac{\partial}{\partial S_1} [\Phi^\circ + z \overline{(\Phi^\circ)'} + \bar{\Psi}^\circ] + (l_1 + im_1) \frac{\partial}{\partial S_1} [\bar{\Phi}^\circ + \bar{z} (\Phi^\circ)' + \Psi^\circ] \right\} - \\
& - \lambda^2 a^2 \frac{v-1}{3v-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(l_1 - im_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\overline{\Phi^\circ})'' + (l_1 + im_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\Phi^\circ)'' \right] - \\
& - \frac{2\mu}{a} v \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) f_{p,1}^\circ(s_1) \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} + \\
& + \frac{2\mu}{a} \lambda \left\{ \frac{1}{H_1} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{k,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \right. \\
& + v \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) \left(\frac{a}{R_1} \frac{1}{H_1} f_{p,1}^\circ - \rho_p f_{p,2}^\circ \right) - \right. \\
& \left. \left. - \left(-\frac{a}{R_1} + \frac{11a^2}{8R_1^2} n_1 - \frac{n_1}{2} \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) f_{p,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} \right\} + \dots \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{n_1 z}^\circ = & \frac{2\mu}{a} v \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \gamma_k(\zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{k,1}^\circ(s_1) \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \\
& + \frac{2\mu}{a} v \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \left[\delta_k \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{k,2}^\circ(s_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{a}{2R_1} + \frac{5a^2}{8R_1^2} n_1 - \frac{n_1}{2} \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) a_{k,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{H_1} \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) f_{p,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} \right\} + \dots \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{s_1}^\circ = & 2 [(\Phi^\circ)' + \overline{(\Phi^\circ)'}] + \frac{1}{2} \left\{ (m_1 + il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} [\Phi^\circ + z \overline{(\Phi^\circ)'} + \bar{\Psi}^\circ] + \right. \\
& \left. + (m_1 - il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} [\bar{\Phi}^\circ + \bar{z} (\Phi^\circ)' + \Psi^\circ] \right\} + \\
& + \lambda^2 a^2 \frac{v-1}{3v-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_1 + il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\overline{\Phi^\circ})'' + (m_1 - il_1) \frac{\partial}{\partial S_1} (\Phi^\circ)'' \right] + \\
& + \frac{2\mu}{a} (v-1) \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{k,1}^\circ(s_1) \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \\
& + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) \left[(v-1) p_k(\zeta) a_{k,2}^\circ(s_1) + \frac{1}{H_1} \frac{a}{R_1} \delta_k a_{k,1}^\circ(s_1) \right] - \right. \\
& \left. - (v-1) n_1 \frac{p_k(\zeta)}{2\delta_k} \left(\frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) a_{k,1}^\circ(s_1) \right\} \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} - \quad (2.4) \\
& - \frac{2\mu}{a} 2v \frac{1}{H_1} \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) f_{p,1}^\circ(s_1) \right] \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{s_1 z}^{\circ} = & \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 \sin(\rho_p \zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) f_{p1}^{\circ}(s_1) \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} + \\ & + \frac{2\mu}{a} \nu \lambda \left\{ \frac{1}{H_1} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_1} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{..1}^{\circ}(s_1) \right] \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} + \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin(\rho_p \zeta) \left[\rho_p \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) f_{p2}^{\circ}(s_1) \right] + \left[\left(-\frac{a}{2R_1} + \frac{5a^2}{8R_1^2} n_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n_1}{2} \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) f_{p1}^{\circ}(s_1) \right] \exp \frac{\rho_p n_1}{\lambda} \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{\circ} = & \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\zeta) \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{..1}^{\circ}(s_1) + \right. \\ & + \lambda \left[\left(1 - \frac{a}{2R_1} n_1 + \frac{3a^2}{8R_1^2} n_1^2 + \dots \right) a_{..2}^{\circ}(s_1) \right] - \\ & \left. - \frac{n_1}{2\delta_k} \left(\frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{d^2}{ds_1^2} + \dots \right) a_{..1}^{\circ}(s_1) \right\} + \dots \exp \frac{\delta_k n_1}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь, как и в [1], через λ обозначен безразмерный параметр толщины плиты $\lambda = h/a$; i — мнимая единица, черточка над символом обозначает сопряженную комплексную величину. Все остальные обозначения объяснены в [1].

Функции комплексного переменного $\varphi^{\circ}(z)$ и $\psi^{\circ}(z)$, аналитические внутри Γ_1 , представимы рядами

$$\varphi^{\circ}(z) = \varphi_0^{\circ}(z) + \lambda \varphi_1^{\circ}(z) + \lambda^2 \varphi_2^{\circ}(z) + \dots \quad (2.7)$$

$$\psi^{\circ}(z) = \psi_0^{\circ}(z) + \lambda \psi_1^{\circ}(z) + \lambda^2 \psi_2^{\circ}(z) + \dots \quad (2.8)$$

причем $\varphi_0^{\circ}(z)$ и $\psi_0^{\circ}(z)$ — функции, граничные задания для которых определяются условиями Колосова — Мухелишвили для данной задачи [5]. Контурные значения для остальных функций $\varphi_i^{\circ}(z)$ и $\psi_i^{\circ}(z)$, а также функции $a_{ki}^{\circ}(s_1)$ и $f_{pi}^{\circ}(s_1)$ определяются граничными условиями на Γ_1 . Функции a_{ki}° находятся из некоторой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Из (2.1) — (2.6) видно, что при отходе от Γ_1 в глубь плиты ($n_1 \rightarrow -\infty$) напряженные состояния, описываемые функциями $a_k^{\circ}(s_1)$ и $f_p^{\circ}(s_1)$, экспоненциально затухают и в глубь плиты распространяется лишь бигармоническое напряженное состояние. Можно считать, что на достаточном расстоянии от наружного контура Γ_1 напряженное состояние плиты определяется формулами [6]

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\circ} = & \frac{1}{2} [2(\varphi^{\circ})' + 2\overline{(\varphi^{\circ})'} - \bar{z}(\varphi^{\circ})'' - z\overline{(\varphi^{\circ})}'' - (\psi^{\circ})' - \overline{(\psi^{\circ})'}] - \\ & - \lambda^2 a^2 \frac{\nu-1}{3\nu-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) [(\varphi^{\circ})''' + \overline{(\varphi^{\circ})}'''] \\ \sigma_y^{\circ} = & \frac{1}{2} [2(\varphi^{\circ})' + 2\overline{(\varphi^{\circ})'} + \bar{z}(\varphi^{\circ})'' + z\overline{(\varphi^{\circ})}'' + (\psi^{\circ})' + \overline{(\psi^{\circ})'}] + \\ & + \lambda^2 a^2 \frac{\nu-1}{3\nu-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) [(\varphi^{\circ})''' + \overline{(\varphi^{\circ})}'''] \\ \tau_{xy}^{\circ} = & -\frac{1}{2} i [\bar{z}(\varphi^{\circ})'' - z\overline{(\varphi^{\circ})}'' + (\psi^{\circ})' - \overline{(\psi^{\circ})'}] - \lambda^2 a^2 \frac{\nu-1}{3\nu-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) i [(\varphi^{\circ})''' - \overline{(\varphi^{\circ})}'''] \\ \tau_{xz}^{\circ} = & \tau_{yz}^{\circ} = \sigma_z^{\circ} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку пока рассматривается сплошная плита без отверстия, то на поверхности Γ_2 действуют напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{n_2}^{\circ} = & -\frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^{\circ} + z\overline{(\varphi^{\circ})'} + \overline{\psi^{\circ}}] + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [\overline{\varphi^{\circ}} + \bar{z}(\varphi^{\circ})' + \psi^{\circ}] \right\} - \\ & - \lambda^2 a^2 \frac{\nu-1}{3\nu-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi^{\circ})}'' + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi^{\circ})'' \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\tau_{n_2 s_2}^{\circ} = -\frac{1}{2} \left\{ (l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^{\circ} + z \overline{(\varphi^{\circ})'} + \bar{\psi}^{\circ}] + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} [\bar{\varphi}^{\circ} + \bar{z} (\varphi^{\circ})' + \psi^{\circ}] \right\} - \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi^{\circ})''} + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi^{\circ})'' \right] \quad (2.11)$$

$$\sigma_{s_2}^{\circ} = 2 [(\varphi^{\circ})' + \overline{(\varphi^{\circ})'}] + \frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^{\circ} + z \overline{(\varphi^{\circ})'} + \bar{\psi}^{\circ}] + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [\bar{\varphi}^{\circ} + \bar{z} (\varphi^{\circ})' + \psi^{\circ}] \right\} + \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi^{\circ})''} + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi^{\circ})'' \right] \quad (2.12)$$

$$\tau_{n_2 z}^{\circ} = \tau_{s_2 z}^{\circ} = \sigma_z^{\circ} = 0 \quad (2.13)$$

или напряжения

$$(2.14)$$

$$X_{n_2}^{\circ} + iY_{n_2}^{\circ} = -i \frac{d}{dS_2} [\varphi^{\circ} + z \overline{(\varphi^{\circ})'} + \bar{\psi}^{\circ}] - 2\lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) i \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi^{\circ})''}, \quad Z_{n_2}^{\circ} = 0$$

Но на самом деле в плите есть отверстие, ограниченное поверхностью Γ_2 , причем эта поверхность свободна от нагрузок. Следовательно, Γ_2 надо освободить от напряжений $\sigma_{n_2}^{\circ}$, $\tau_{n_2 s_2}^{\circ}$, возникших там за счет нагружения наружной поверхности Γ_1 . Для этого на бигармоническое напряженное состояние (2.9), действующее внутри плиты, нужно наложить новое напряженное состояние, соответствующее решению задачи теории упругости для бесконечной плиты с отверстием. Оно не должно изменять напряжений на поверхности Γ_1 , на Γ_2 должно принимать значения $-\sigma_{n_2}^{\circ}$, $-\tau_{n_2 s_2}^{\circ}$ и, разумеется, должно оставлять торцы свободными от напряжений. Назовем это напряженное состояние отраженным.

§ 3. Построим отраженное напряженное состояние на основе метода, изложенного в [1]. Поскольку при этом решается внешняя задача, потенциальное и вихревое напряженное состояния должны затухать при отходе от края в глубь плиты, т. е. при $n_2 \rightarrow \infty$. Нетрудно доказать, что решение внешней задачи можно получить из решения внутренней задачи, построенного в [1], заменой в нем δ_k на $-\delta_k$ и ρ_p на $-\rho_p$. Тогда отраженное напряженное состояние будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{n_2}^* = & -\frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\varphi^* + z \overline{(\varphi^*)'} + \bar{\psi}^*] + (m_2 - il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\bar{\varphi}^* + \bar{z} (\varphi^*)' + \psi^*] \right\} - \\ & - \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_2 + il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} \overline{(\varphi^*)''} + (m_2 - il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} (\varphi^*)'' \right] + \\ & + \frac{2\mu}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots \right) [(\nu - 1) p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k1}^*(s_2) \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \\ & + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots \right) [(\nu - 1) p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k2}^*(s_2) + \right. \\ & + \left. [(\nu - 1) \frac{n_2}{2\delta_k} p_k(\zeta) \left(\frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots \right) - \delta_k \alpha_k(\zeta) \left(-\frac{a}{R_2} + \frac{11a^2}{8R_2^2} n_2 - \frac{n_2}{2} \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots \right)] \right\} \times \\ & \times a_{l1}^*(s_2) \exp\left(-\frac{\delta_l n_2}{\lambda}\right) - \frac{2\mu}{a} 2\nu \frac{1}{H_2} \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots \right) f_{p1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) + \dots \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$\tau_{n_2 s_2}^* = -\frac{1}{2} \left\{ (l_2 - im_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\varphi^* + z \overline{(\varphi^*)'} + \bar{\psi}^*] + (l_2 + im_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\bar{\varphi}^* + \bar{z} (\varphi^*)' + \psi^*] \right\} - \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(l_2 - im_2) \frac{\partial}{\partial S_2} \overline{(\varphi^*)''} + (l_2 + im_2) \frac{\partial}{\partial S_2} (\varphi^*)'' \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\mu}{a} \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 \cos(\rho_p \zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) - \\
 & -\frac{2\mu}{a} \lambda \left\{ \frac{1}{H_2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \right. \\
 & + \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) \left(\frac{a}{R_2} \frac{1}{H_2} f_{p1}^* + \rho_p f_{p2}^*\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \left(-\frac{a}{R_2} + \frac{11a_2}{8R_2^2} n_2 - \frac{n_2}{2} \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) \right\} + \dots \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{n_2 z}^* = & -\frac{2\mu}{a} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \gamma_k(\zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \\
 & + \frac{2\mu}{a} \nu \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \left[-\delta_k \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k2}^*(s_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(-\frac{a}{2R_2} + \frac{5a^2}{8R_2^2} n_2 - \frac{n_2}{2} \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{H_2} \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) \right\} + \dots \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{s_2}^* = & 2[(\varphi^*)' + \overline{(\varphi^*)}'] + \frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\varphi^* + z \overline{(\varphi^*)}' + \overline{\varphi^*}] + \right. \\
 & + (m_2 - il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} [\overline{\varphi^*} + \bar{z} (\varphi^*)' + \psi^*] \left. \right\} + \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(m_2 + il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} \overline{(\varphi^*)}'' + \right. \\
 & \left. + (m_2 - il_2) \frac{\partial}{\partial S_2} (\varphi^*)'' \right] + \frac{2\mu}{a} (\nu - 1) \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) \times \\
 & \times \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) \left[(\nu - 1) p_k(\zeta) a_{k2}^*(s_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{H_2} \frac{a}{R_2} \delta_k a_{k1}^*(s_2) \right] + (\nu - 1) n_2 \frac{p_k(\zeta)}{2\delta_k} \left(\frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots \right) a_{k1}^*(s_2) \right\} \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + (3.4) \\
 & + \frac{2\mu}{a} 2\nu \frac{1}{H_2} \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos(\rho_p \zeta) \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{s_2 z}^* = & -\frac{2\mu}{a} \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 \sin(\rho_p \zeta) \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) + \\
 & + \frac{2\mu}{a} \nu \lambda \left\{ \frac{1}{H_2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) + \right. \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin(\rho_p \zeta) \left[-\rho_p \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) f_{p2}^*(s_2) + \right. \\
 & \left. \left. + \left(-\frac{a}{2R_2} + \frac{5a^2}{8R_2^2} n_2 - \frac{n_2}{2} \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots\right) f_{p1}^*(s_2) \right] \exp\left(-\frac{\rho_p n_2}{\lambda}\right) \right\} + \dots \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^* = & \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\zeta) \left\{ \left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k1}^*(s_2) + \lambda \left[\left(1 - \frac{a}{2R_2} n_2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3a^2}{8R_2^2} n_2^2 + \dots\right) a_{k2}^*(s_2) + \frac{n_2}{2\delta_k} \left(\frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{d^2}{ds_2^2} + \dots \right) a_{k1}^*(s_2) \right] + \dots \right\} \exp\left(-\frac{\delta_k n_2}{\lambda}\right) \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Здесь $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ — функции комплексного переменного, аналитические вне контура Γ_2 и не изменяющие напряжений на бесконечности. Они представимы рядами

$$\varphi^*(z) = \varphi_0^*(z) + \lambda\varphi_1^*(z) + \lambda^2\varphi_2^*(z) + \dots \quad (3.7)$$

$$\psi^*(z) = \psi_0^*(z) + \lambda_1\psi_1^*(z) + \lambda^2\psi_2^*(z) + \dots \quad (3.8)$$

§ 4. Контурные значения для функций $\varphi_i^*(z)$ и $\psi_i^*(z)$ и функции $a_{ki}^*(s_2)$ и $f_{pi}^*(s_2)$ определяются из граничных условий на Γ_2 , которые имеют вид

$$N_2(s_2, \zeta) = -\sigma_{n_2}^\circ, \quad T_2(s_2, \zeta) = -\tau_{n_2 s_2}^\circ, \quad Z_2(s_2, \zeta) = 0 \quad (4.1)$$

или

$$X_{n_2}(s_2, \zeta) + iY_{n_2}(s_2, \zeta) = -(X_{n_2}^\circ + iY_{n_2}^\circ) \quad (4.2)$$

Согласно работе [1], граничные условия для функций φ_0^* , ψ_0^* будут иметь вид

$$\frac{d}{dS_2} [\varphi_0^* + z \overline{(\varphi_0^*)'} + \overline{\varphi_0^*}] = i (\langle X_{n_2 0} \rangle + i \langle Y_{n_2 0} \rangle) \quad (4.3)$$

где угловыми скобками обозначены средние по высоте значения величин.

Учитывая граничное условие (4.2) и равенство (2.14), получим для φ_0^* и ψ_0^* граничное условие

$$\frac{d}{dS_2} [\varphi_0^* + z \overline{(\varphi_0^*)'} + \overline{\varphi_0^*}] = -\frac{d}{dS_2} [\varphi_0^\circ + z \overline{(\varphi_0^\circ)'} + \overline{\varphi_0^\circ}] \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что напряженное состояние, описываемое функциями φ_0^* и ψ_0^* , есть решение плоской теории упругости, которое снимает с поверхности отверстия Γ_2 напряжения, создаваемые функциями φ_0° и ψ_0° . Это [напряженное] состояние не изменяет, очевидно, напряжений на бесконечности, так как φ^* и ψ^* — функции, аналитические вне Γ_2 и дающие исчезающие на бесконечности напряжения. Назовем его плоским отраженным состоянием.

Для определения функций $a_{l,1}^*(s_2)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} & -4\nu \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{\infty} \frac{\delta_k^2 \delta_m^2 (\sin^2 \delta_m - \sin^2 \delta_k)}{(\delta_m^2 - \delta_k^2) (\delta_m - \delta_k)} [(\nu - 1) (\delta_k^2 + \delta_m^2) + 2(\nu + 1) \delta_k \delta_m] a_{l,1}^*(s_2) + \\ & + 2\nu^2 \delta_m^3 \left(\frac{2}{3} \sin^2 \delta_m - 1 \right) a_{m,1}^*(s_2) = -\frac{a}{2\mu} \delta_m N_{m0} + \frac{a}{2\mu} (\nu - 1) \frac{\sin^2 \delta_m}{\delta_m} \times \\ & \times \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi_0^* + z \overline{(\varphi_0^*)'} + \overline{\varphi_0^*}] + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [\overline{\varphi_0^*} + \bar{z} (\varphi_0^*)' + \psi_0^*] \right\} \\ & (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_{m0} &= \int_{-1}^1 N_{20}(s_2, \zeta) \alpha_m(\zeta) d\zeta = -(\nu - 1) \frac{\sin^2 \delta_m}{\delta_m^2} \times \\ & \times \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi_0^\circ + z \overline{(\varphi_0^\circ)'} + \overline{\varphi_0^\circ}] + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [\overline{\varphi_0^\circ} + \bar{z} (\varphi_0^\circ)' + \psi_0^\circ] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тогда на основании граничного условия (4.4) видно, что правые части системы (4.5) обращаются в нуль. Система (4.5) такова, что при этом все $a_{l,1}^*(s_2) \equiv 0$.

Для определения $f_{f_1}^*(s_2)$ получим уравнение

$$f_{t1}^*(s_2) = -\frac{a}{2\mu\nu\rho_t^2} T_{t0}(s_2) \quad \left(\begin{array}{l} t = 1, 2, \dots \\ \rho_t = t\pi \end{array} \right) \quad (4.7)$$

$$T_{t0} = \int_{-1}^1 T_{20}(s_2, \zeta) \cos(\rho_t \zeta) d\zeta = 0 \quad (4.8)$$

Отсюда сразу же следует, что все $f_{t_1}^*(s_2) \equiv 0$.

В следующем приближении для функций φ_1^* и ψ_1^* получим граничное условие

$$\frac{d}{dS_2} [\varphi_1^* + z \overline{(\varphi_1^*)'} + \overline{\psi_1^*}] = -\frac{d}{dS_2} [\varphi_1^\circ + z \overline{(\varphi_1^\circ)'} + \overline{\psi_1^\circ}] \quad (4.9)$$

Отметим, что, хотя это граничное условие имеет тот же вид, что и (4.4), функции φ_1^* и ψ_1^* не будут решением плоской теории упругости, так как граничные задания для функций ψ_1° и φ_1° не совпадают с условиями Колосова — Мусхелишвили, а зависят от функций $a_{k_1}^\circ$, $f_{p_1}^\circ$ на наружном контуре Γ_1 .

Для функций $a_{k_2}^*$, $f_{p_2}^*$ найдем

$$\begin{aligned} \{a_{m_2}^*\} = & -\frac{a}{2\mu} \left(\delta_m N_{m_1} + \frac{a}{2R_2} N_{m_0} + \frac{dT_{m_0}}{dS_2} - Z_{m_1} \right) - \\ & -\frac{a}{2\mu} (\nu - 1) \frac{\sin^2 \delta_m}{\delta_m^2} \left\{ -\delta_m \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_1^* + z \overline{(\varphi_1^*)'} + \overline{\psi_1^*}) + (m_2 - il_2) \times \right. \right. \\ & \times \frac{d}{dS_2} (\overline{\varphi_1^*} + \overline{z} (\varphi_1^*)' + \overline{\psi_1^*}) \left. \right] + \frac{a}{2R_2} \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^* + z \overline{(\varphi_0^*)'} + \overline{\psi_0^*}) + \right. \\ & \left. + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\overline{\varphi_0^*} + \overline{z} (\varphi_0^*)' + \overline{\psi_0^*}) \right] - \left[(l_2 - im_2) \frac{d^2}{dS_2^2} (\varphi_0^* + z \overline{(\varphi_0^*)'} + \overline{\psi_0^*}) + \right. \\ & \left. + (l_2 + im_2) \frac{d^2}{dS_2^2} (\overline{\varphi_0^*} + \overline{z} (\varphi_0^*)' + \overline{\psi_0^*}) \right] \left. \right\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$f_{t_2}^*(s_2) = -\frac{a}{2\mu\rho_t^3} \left(\frac{dN_{t_0}}{dS_2} + \rho_t T_{t_1} + \frac{a}{2R_2} T_{t_0} \right), \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Здесь значком { } обозначена матрица системы (4.5), постоянная во всех приближениях

$$T_{t_1} = \int_{-1}^1 (-\tau_{n_2 s_2}^\circ)_1 \cos(\rho_t \zeta) d\zeta = 0, \quad Z_{m_1} = \int_{-1}^1 (-\tau_{n_2 z}^\circ)_1 \beta_m(\zeta) d\zeta = 0$$

$$N_{t_0} = \int_{-1}^1 (-\sigma_{n_2}^\circ)_0 \cos(\rho_t \zeta) d\zeta = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} N_{m_1} = \int_{-1}^1 (-\sigma_{n_2}^\circ)_1 \alpha_m(\zeta) d\zeta = & -(\nu - 1) \frac{\sin^2 \delta_m}{\delta_m^2} \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_1^\circ + z \overline{(\varphi_1^\circ)'} + \overline{\psi_1^\circ}) + \right. \\ & \left. + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\overline{\varphi_1^\circ} + \overline{z} (\varphi_1^\circ)' + \overline{\psi_1^\circ}) \right] \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{m_0} = \int_{-1}^1 (-\tau_{n_2 s_2}^\circ)_0 \alpha_m(\zeta) d\zeta = & -(\nu - 1) \frac{\sin^2 \delta_m}{\delta_m^2} \left[(l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + z \overline{(\varphi_0^\circ)'} + \overline{\psi_0^\circ}) + \right. \\ & \left. + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} (\overline{\varphi_0^\circ} + \overline{z} (\varphi_0^\circ)' + \overline{\psi_0^\circ}) \right] \quad (4.14) \end{aligned}$$

Из равенств (4.11) и (4.12) сразу видно, что все $f_{t_2}^*(s_2) \equiv 0$.

Из рассмотрения (4.13) и (4.14) с учетом граничных условий (4.4) и (4.9) видно, что правые части системы (4.10) обращаются в нуль и тогда все $a_{k_2}^*(s_2) \equiv 0$.

Для функций φ_2^* , ψ_2^* , $a_{k_3}^*$, $f_{p_3}^*$ после аналогичных выкладок получим граничные условия

$$\frac{d}{dS_2} [\varphi_2^* + z \overline{(\varphi_2^*)'} + \overline{\psi_2^*}] = -\frac{d}{dS_2} [\varphi_2^\circ + z \overline{(\varphi_2^\circ)'} + \overline{\psi_2^\circ}] \quad (4.15)$$

$$\{a_{m3}\} = \frac{a}{2\mu} \delta_m \left(-\frac{1}{3} I_{m1} + I_{m4} \right) \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)}'' + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)'' \right] \quad (4.16)$$

$$\frac{2\mu}{a} \nu \rho t^3 f_{t3}^* (s_2) = a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \rho t I_{t10} \left[(l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)}'' + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)'' \right] \quad (4.17)$$

Здесь I_{m1} , I_{m4} , I_{t10} — некоторые постоянные величины, зависящие от номера m и t ; значения их приведены в [1]. Сейчас они несущественны.

Таким образом, $f_{t3}^* (s_2)$ и $a_{m3}^* (s_2)$ уже отличны от нуля. Последующие функции $f_{ti}^* (s_2)$ и $a_{mi}^* (s_2)$ при $i > 3$ также будут отличны от нуля.

§ 5. Выпишем теперь напряжения на контуре свободного отверстия Γ_2 . Они складываются из проникающего бигармонического и отраженного напряженных состояний

$$\begin{aligned} \sigma_{n_2} = \sigma_{n_2}^\circ + \sigma_{n_2}^* = & -\frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^\circ + \varphi^* + z \overline{(\varphi^\circ + \varphi^*)}' + \overline{(\psi^\circ + \psi^*)}] + \right. \\ & \left. + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [(\overline{\varphi^\circ + \varphi^*}) + \bar{z} (\varphi^\circ + \varphi^*)' + \psi^\circ + \psi^*] \right\} - \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \times \\ & \times \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)}'' + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)'' \right] + \\ & + \frac{2\mu}{a} \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(\nu - 1) p_k (\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k (\zeta)] a_{k3}^* (s_2) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{n_2 s_2} = \tau_{n_2 s_2}^\circ + \tau_{n_2 s_2}^* = & -\frac{1}{2} \left\{ (l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^\circ + \varphi^* + z \overline{(\varphi^\circ + \varphi^*)}' + \overline{(\psi^\circ + \psi^*)}] + \right. \\ & \left. + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} [(\overline{\varphi^\circ + \varphi^*}) + \bar{z} (\varphi^\circ + \varphi^*)' + \psi^\circ + \psi^*] \right\} - \\ & - \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[(l_2 - im_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)}'' + (l_2 + im_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)'' \right] - \\ & - \frac{2\mu}{a} \nu \lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 \cos(\rho_p \zeta) f_{p3}^* (s_2) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\tau_{n_2 z} = \tau_{n_2 z}^\circ + \tau_{n_2 z}^* = -\frac{2\mu}{a} \nu \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \gamma_k (\zeta) a_{k3}^* (s_2) + \dots = 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{s_2} = \sigma_{s_2}^\circ + \sigma_{s_2}^* = & 2 [(\varphi^\circ + \varphi^*)' + \overline{(\varphi^\circ + \varphi^*)}'] + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} [\varphi^\circ + \varphi^* + z \overline{(\varphi^\circ + \varphi^*)}' + \overline{(\psi^\circ + \psi^*)}] + \right. \\ & \left. + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} [(\overline{\varphi^\circ + \varphi^*}) + \bar{z} (\varphi^\circ + \varphi^*)' + \psi^\circ + \psi^*] \right\} + \lambda^2 a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \times \\ & \times \left[(m_2 + il_2) \frac{d}{dS_2} \overline{(\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)}'' + (m_2 - il_2) \frac{d}{dS_2} (\varphi_0^\circ + \varphi_0^*)'' \right] + \\ & + \frac{2\mu}{a} \lambda^2 (\nu - 1) \sum_{k=1}^{\infty} p_k (\zeta) a_{k3}^* (s_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\tau_{s_2 z} = \tau_{s_2 z}^\circ + \tau_{s_2 z}^* = -\frac{2\mu}{a} \nu \lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 \sin(\rho_p \zeta) f_{p3}^* (s_2) + \dots \quad (5.5)$$

$$\sigma_z = \sigma_z^\circ + \sigma_z^* = \frac{2\mu}{a} \nu \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} q_k (\zeta) a_{k3}^* (s_2) + \dots \quad (5.6)$$

Соотношение (5.4) показывает, что напряжение σ_{s_2} в точках на незагруженной поверхности отверстия Γ_2 имеет вид

$$\sigma_{s_2} = \sigma_{s_{20}} + \lambda \sigma_{s_{21}} + \lambda^2 \sigma_{s_{22}} + \dots \quad (5.7)$$

при этом член $\sigma_{s_{20}}$ дается решением соответствующей плоской задачи.

Член первого порядка малости по λ — $\sigma_{s_{21}}$ также определяется аналитическими функциями $\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ$ и φ_1^*, ψ_1^* , которые, однако, не совпадают с функциями Колосова—Мухелишвили, так как граничные условия для них зависят от функций $a_{k1}^\circ(s_1)$. Лишь начиная с членов второго порядка малости по λ в решение войдут функции $a_{k3}^*(s_2)$ и $f_{p3}^*(s_2)$, описывающие добавочное напряженное состояние на внутреннем контуре.

Напряжение τ_{s_2z} будет величиной второго порядка малости по λ по сравнению с основным напряжением, характеризующим коэффициент концентрации $\sigma_{s_{20}}$. Напряжение $\tau_{n_2s_2}$ в точном решении равно нулю на свободном контуре отверстия, в плоском решении в силу условия (4.4) оно также равно нулю. Напряжение σ_z равно нулю в плоской теории, на самом деле оно будет величиной порядка λ^2 по сравнению с единицей.

Таким образом, по каким бы характеристикам ни вычислялся коэффициент концентрации на свободном отверстии, достаточно удаленном от наружного контура, в случае сжатия плиты погрешность плоской теории будет по крайней мере величиной первого порядка малости по λ по сравнению с основным значением.

Этот вывод несколько отличается от результатов, полученных в случае изгиба плиты [2] — там погрешность прикладной теории имеет порядок λ по сравнению с единицей лишь в напряжении σ_{s_2} . При вычислении же напряжения τ_{s_2z} в случае изгиба плиты прикладная теория приносит искажение самого порядка рассматриваемой величины.

Поступила 18 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. Напряженное состояние толстой плиты, ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. С а в и н Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
6. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА ГРИНА УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Г. Н. Чернышев (Москва)

Излагается метод асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек (рассматриваются выпуклые оболочки) в случае, когда свободные члены в уравнениях состоят из δ -функции Дирака или ее производных. Эти решения, будучи решениями типа функции Грина, соответствуют действию на оболочку сосредоточенных сил или моментов.

Вначале проводится исследование для одного уравнения и затем показывается, как полученные результаты распространяются на систему.

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, содержащее малый параметр ε , являющийся в теории оболочек относительной толщиной

$$\varepsilon^s M(w) + L(w) = \delta \quad (1.1)$$

Здесь M, L — эллиптические дифференциальные операторы с переменными коэффициентами и старшими производными соответственно порядков $2m, 2l, m > l$. Без ущерба для дела можем положить $s = 2(m - l)$.