АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Р. М. Бергман (Москва)

Рассматривается задача о концентрации напряжений около криволинейных отверстий без угловых точек и задача об осциллирующей нагрузке, приложенной к границе полуплоскости. Цель заключается в исследовании таких свойств их решений, которые вытекают из малости параметра l. Система сведена к одному уравнению, и к его решению применен асимптотический метод в варианте М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1]. Для задачи о концентрации показано, что, если известно решение по обычной теории, то легко может быть построено в первом приближении решение по моментной теории, и что моментная теория дает лишь незначительное уточнение. В задаче о полуплоскости показано, что поправка к соответствующей классической задаче будет существенна лишь в случае быстрой осцилляции граничных условий, т. е. тогда, когда изучаемое напряженное состояние имеет краевой характер. Другой вариант асимптотического анализа неклассических задач теории упругости дан для волокнистых сред в работе [2].

1. Соотношения плоской деформации в моментной теории упругости, приведенные в [3], в декартовой системе координат таковы:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\mu_x}{\partial x}+\frac{\partial\mu_y}{\partial y}+\tau_{xy}-\tau_{yx}=0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_x=\frac{1+\nu}{E}\,[\sigma_x-\nu(\sigma_x+\sigma_y)],\qquad \varepsilon_y=\frac{1+\nu}{E}\,[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1+\nu}{2E}\,(\tau_{xy}+\tau_{yx}),\qquad \chi_x=\frac{1}{4Gl^2}\,\mu_x,\qquad \chi_y=\frac{1}{4Gl^2}\,\mu_y$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\chi_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right),\qquad \chi_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Здесь σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} и μ_x, μ_y — компоненты тензоров силовых и моментных напряжений; ε_x, ε_y, ε_{xy} и χ_x, χ_y — компоненты тензоров деформации и изгиба — кручения; u, v — составляющие вектора перемещения; E — модуль Юнга, G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; l — характерная длина материала, которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с минимальным радиусом кривизны отверстия.

Воспользовавшись (1.1), получим два уравнения в перемещениях

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\right]u+\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^4}{\partial y^3\,\partial x}\right)\right]v=0 \tag{1.2}$$

$$\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial y}+\frac{\partial^4}{\partial y^3\,\partial x}\right)\right]u+\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\,\partial x^2}\right)\right]v=0$$

Введем потенциальную функцию F при помощи формул

$$u=\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\,\partial x^2}\right)\right]F$$

$$v=-\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial y}+\frac{\partial^4}{\partial y^3\partial x}\right)\right]F$$

Тогда второе уравнение (1.2) выполнится тождественно, а первое даст разрешающее уравнение для функции F

$$\nabla^2\nabla^2F-l^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2F=0 \tag{1.3}$$

Обратившись опять к (1.1), выразим все напряжения через F

$$\sigma_x = 2G\left[\frac{2-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - l^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\nabla^2\right)\nabla^2\right]F$$

$$\sigma_y = -2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + l^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\nabla^2\right)\nabla^2\right]F$$

$$\tau_{xy} = 2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} - l^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^2\right)\nabla^2\right]F$$

$$\tau_{yx} = 2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} - l^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^2\right)\nabla^2\right]F$$

$$\mu_x = -\frac{4(1-\nu)Gl^2}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\nabla^2F, \qquad \mu_y = -\frac{4(1-\nu)Gl^2}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2F \tag{1.4}$$

Таким образом, система уравнений (1.1) сведена к одному ценой введения потенциальной функции F. Такой прием может привести к потере некоторых решений, как, например, это показано в [4]. Это обстоятельство и в рассматриваемой задаче вызывает некоторые трудности. Но так как их удается избежать, а решение задач моментной теории упругости единственно [5], то это не повлияет на окончательный результат. Представление напряжений через функцию F по формулам (1.4) назовем A. Оно несимметрично относительно x, y, а поэтому не единственно. Заменив в двух последних выражениях (1.4) знак минус на плюс и поменяв в каждом из соотношений (1.4) x на y, получим другое представление напряжений через некоторую потенциальную функцию, которую обозначим через Φ. Назовем такое представление B. Функция Φ должна быть также решением уравнения (1.3), так как оно симметрично относительно x, y.

Перейдем к криволинейным координатам α, β, положив

$$x = x(\alpha, \beta), \qquad y = y(\alpha, \beta)$$

и считая, что x, y — достаточно гладкие функции α, β. Не нарушая общности, можно считать α, β изотермической сеткой, т. е. примем, что

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial x}{\partial \beta} \tag{1.5}$$

Запишем для A компоненты тензора напряжений в этих координатах, воспользовавшись общими формулами преобразвания контравариантных компонент тензора

$$\sigma_\alpha = 2G\left[a_1\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + \ldots + l^2\left(a_2\frac{\partial^5}{\partial\beta^5} + \ldots\right)\right]F$$

$$\sigma_\beta = 2G\left[b_1\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + \ldots + l^2\left(b_2\frac{\partial^5}{\partial\beta^5} + \ldots\right)\right]F$$

$$\tau_{\alpha\beta} = 2G\left[c_1\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + \ldots + l^2\left(c_2\frac{\partial^5}{\partial\beta^5} + \ldots\right)\right]F$$

$$\tau_{\beta\alpha} = 2G\left[c_1\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + \ldots + l^2\left(d_2\frac{\partial^5}{\partial\beta^5} + \ldots\right)\right]F$$

$$\mu_\alpha = -\frac{4(1-\nu)Gl^2}{1-2\nu}p_1\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} + \ldots \qquad \mu_\beta = -\frac{4(1-\nu)Gl^2}{1-2\nu}q_1\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} + \ldots \tag{1.6}$$

В (1.6) выписаны лишь старшие производные по β. Коэффициенты при них выражаются через частные производные от x и y по α и β. Введем обозначения

$$h = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad h_0 = h\,|_{\beta=0}$$

Учитывая (1.5), получаем

$$q_1 = \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{1}{h^6} \tag{1.7}$$

Переходя к α, β в представлении B, получим формулы, аналогичные (1.6). Если обозначить в них выражение, стоящее на месте q_1 из формул (1.6) через q_2, то получим

$$q_2 = -\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{1}{h^6} \tag{1.8}$$

Рассмотрим задачу о концентрации напряжений у отверстия, контур которого задан уравнением $\beta = 0$, считая, что невозмущенное отверстием напряженное состояние будет произвольным и ограниченным на бесконечности. Для решения задачи надо построить функцию, удовлетворяющую уравнению (1.3) и такую, чтобы были выполнены условия

$$\sigma_\beta = \tau_{\beta\alpha} = \mu_\beta = 0 \quad \text{при } \beta = 0 \tag{1.9}$$

а вдали от контура напряжения стремились к невозмущенным напряжениям. Поставленная задача вырождается в классическую, когда $l = 0$. Уравнение (1.3) переходит при этом в уравнение

$$\nabla^2\nabla^2 F_0 = 0 \tag{1.10}$$

и надо удовлетворить уже двум граничным условиям

$$\sigma_\beta^{(0)} = \tau_{\beta\alpha}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \beta = 0 \tag{1.11}$$

где $\sigma_\beta^{(0)}$ и $\tau_{\beta\alpha}^{(0)}$ — значения σ_β и $\tau_{\beta\alpha}$ при $l = 0$. Таким образом, одно условие выпадает при переходе к классической задаче. Запишем уравнение (1.3), разлагая коэффициенты при производных в ряд Тейлора по β в окрестности контура $\beta = 0$

$$\nabla^2\nabla^2 F - l^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 F = \frac{1}{h_0^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} - l^2\frac{1}{h_0^6}\frac{\partial^6 F}{\partial\beta^6} + \ldots = 0$$

Здесь выписаны лишь члены, необходимые для дальнейшего. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{h_0^4}\lambda^4 - l^2\frac{1}{h_0^6}\lambda^6 = 0$$

Корни этого уравнения, отличные от нуля, таковы

$$\lambda_{1,2} = \pm\left|\frac{h_0}{l}\right|$$

Последнее уравнение имеет один корень с отрицательной вещественной частью, т. е. столько, сколько граничных условий выпадает при переходе к классической задаче. Следовательно, имеет место вырождение уравнения (1.3) и условий (1.9) в уравнение (1.10) и условия (1.11), которое в [1] называется регулярным, а тогда при достаточной гладкости контура $\beta = 0$ можно пользоваться результатами работы [1]. Воспользуемся представлением A. Пусть F_1 определяет решение задачи о концентрации по классической теории, т. е. будет интегралом уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11). Возьмем в качестве приближенного решения F_2 уравнения (1.3) так называемую функцию типа погранслоя в окрестности контура $\beta = 0$, а именно

$$F_2 = k_1 \exp\left(-\left|\frac{h_0}{l}\right|\beta\right)$$

где $k_1 = k_1(\alpha)$. Из работы [1] следует, что

$$\nabla^2\nabla^2 F_2 - l^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 F_2 = lO(1) \tag{1.12}$$

Здесь предполагается, что $k_1(\alpha)$ — достаточно гладкая функция, подлежащая определению. В случаях, подобных (1.12), будем говорить, что рассматриваемое условие задачи (в данном случае уравнение (1.3)) выполняется с точностью до величины порядка l или, что погрешность в выполнении условия порядка l. Очевидно, что такая погрешность будет в выполнении уравнения (1.3), если в качестве его решения взять

$$F = F_1 + F_2$$

Найдем такую функцию k_1, чтобы F удовлетворяла граничному условию

$$\mu_\beta = -\frac{4(1-\nu)Gl^2}{1-2\nu}q_{10}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left[F_1 + k_1\exp\left(-\left|\frac{h_0}{l}\right|\beta\right)\right] + \ldots = 0 \quad \text{при } \beta = 0$$

Здесь q_{10} — значение q_1 при $\beta = 0$. Из (1.7) видно, что q_{10} обращается в нуль в тех точках контура, в которых касательная к контуру отверстия перпендикулярна оси x. Исключим эти точки пока из рассмотрения. Функция F_1 не зависит от l и в силу условия гладкости контура она будет достаточно гладкой; поэтому величина $\partial^4 F/\partial\beta^4\,|_{\beta=0}$ ограниченная; следовательно

$$k_1 = tl^4 \tag{1.13}$$

где $t = t(\alpha)$ — ограниченная величина.

Функция F_1 точно выполняет условия (1.11), а F удовлетворяет первым двум условиям (1.9) неточно. Оценим погрешность, получающуюся при этом. Ясно, что погрешность от F_1 — порядка l^2. Учитывая (1.13), непосредственно убеждаемся, что погрешность от F_2 — порядка l. Следовательно, F выполняет указанные условия с точностью до величины порядка l. Совершенно аналогично строится решение

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{1.14}$$

для представления B. Здесь Φ_1 — классическое решение задачи о концентрации, Φ_2 — функция типа погранслоя. Решение (1.14) удовлетворяет системе (1.1) с точностью до величины порядка l, кроме, быть может, точек, в которых касательная к контуру перпендикулярна оси y, что следует из (1.8).

Образуем столбец из левых частей (1.6) и обозначим его σ. Столбец из операторов, стоящих в правых частях (1.6) при l^0, обозначим L_0, а при l^2 — через L_2. Соответствующие столбцы для представления B назовем M_0 и M_2.

Разобьем контур $\beta = 0$ на m кусков так, что на каждом из них либо $q_1 \neq 0$, либо $q_2 \neq 0$. Пусть α на контуре изменяется от 0 до 2π, а α_i — точки деления, где $i = 0, 1, \ldots, m$. Очевидно, для каждого α_i можно найти такое ε_i, что на отрезке $[\alpha_i - \varepsilon_i, \alpha_i + \varepsilon_i]$ величины q_1 и q_2 не обращаются в нуль. Будем для определенности считать, что на тех отрезках $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, где i четно, $q_1 \neq 0$, а на остальных — $q_2 \neq 0$. Введем достаточно гладкие функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, симметричные одна по отношению к другой в плоскости xy относительно прямой $y = {}^1/_2$, причем на тех отрезках $[\alpha_i + \varepsilon_i, \alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$, где i четно, $\varphi_1 \equiv 1$, а на тех отрезках $[\alpha_i + \varepsilon_i, \alpha_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$, где i нечетно, $\varphi_1 \equiv 0$.

Из теоремы единственности в классической теории упругости следует

$$L_0 F_1 = M_0 \Phi_1 \tag{1.15}$$

Формулы (1.4) и аналогичные формулы для представления B, а также рассматриваемый тип невозмущенного отверстием напряженного состояния позволяют заключить, что величины $L_2 F_1$ м $M_2 \Phi_1$ стремятся к нулю при удалении от отверстия. Благодаря тому, что F_2 и Φ_2 — функции типа погранслоя, величины

$$L_0 F_2, \quad L_2 F_2, \quad M_0 \Phi_2, \quad M_2 \Phi_2$$

также убывают к нулю вдали от контура $\beta = 0$. Из сказанного следует, что решение поставленной задачи с точностью до величины порядка l следующее:

$$\sigma = L_0 F_1 + \varphi_1(\alpha)\ [l^2 L_2 F_1 + (L_0 + l^2 L_2) F_2] + \varphi_2(\alpha)\ [l^2 M_2 \Phi_1 + (M_0 + l^2 M_2) \Phi_2]$$

Действительно, по сравнению с решениями F и Φ порядок погрешности не изменился, а при удалении от отверстия напряженное состояние стремится к соответствующему невозмущенному отверстием напряженному состоянию. Задача решена. Заметим, что пришлось оперировать двумя представлениями потому, что каждое в отдельности не обладает достаточной общностью в точках, где q_{10} и q_{20} (значение q_2 при $\beta = 0$) обращаются в нули. Из формы найденного решения можно сделать вывод, что эффект от моментных напряжений в задаче о концентрации напряжений у произвольного криволинейного отверстия (с оговоренными выше ограничениями) имеет порядок l всюду, включая точки контура.

2. Рассмотрим верхнюю полуплоскость $y \geqslant 0$ под действием приложенной на границе $y = 0$ ортогональной к плоскости нагрузки, меняющейся по закону — $\sin nx$. Введем для удобства величину N по формуле $N = ln$. Будем пользоваться представлением A. Решение задачи по классической теории

$$F_0 = (e_1 + e_2 y) e^{-ny} \cos nx \tag{2.1}$$

Находя постоянные e_1 и e_2 из граничных условий, получаем

$$\sigma_x^{(0)}\big|_{y=0} = -\sin nx$$

Здесь $\sigma_x^{(0)}$ — значение σ_x из (1.4) при $l = 0$. Решение по моментной теории

$$F = [(f_1 + f_2 y)e^{-ny} + f_3 \exp(-n[1 + N^{-2}]^{1/2} y)] \cos nx \qquad (2.2)$$

Находя постоянные f_1, f_2, f_3 из граничных условий

$$\sigma_y = -\sin nx, \qquad \tau_{yx} = 0, \qquad \mu_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ получаем}$$

$$\sigma_x\big|_{y=0} = \left[-1 + \frac{4(1-\nu)([1+N^{-2}]^{1/2} - 1)}{2(1-\nu)([1+N^{-2}]^{1/2} - 1) + {}^1/_2 N^{-2}[1+N^{-2}]^{1/2}}\right] \sin nx$$

В работе [6] показано, что коэффициент Пуассона ν в моментной теории упругости изменяется от 0 до $^1/_2$. Обозначим

$$\sigma_x^{(0)}\big|_{y=0} = \sigma_{x0}^{(0)}, \qquad \sigma_x\big|_{y=0} = \sigma_{x0}, \qquad \delta = \left|\frac{\sigma_{x0}^{(0)} - \sigma_{x0}}{\sigma_{x0}^{(0)}}\right|$$

и вычислим δ при нескольких значениях N от $^1/_{10}$ до 10 для $\nu = 0$ и $\nu = {}^1/_2$.

Для $\nu = 0$

$N = {}^1/_{10}$	$^1/_8$	$^1/_6$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	4	6	8	10
$\delta = 0.07$	0.105	0.18	0.32	0.74	1.07	1.26	1.3	1.36	1.33	1.33

Для $\nu = {}^1/_2$

$N = {}^1/_{10}$	$^1/_8$	$^1/_6$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	4	6	8	10
$\delta = 0.035$	0.053	0.09	0.17	0.4	0.73	0,92	0.98	1.05	1	1

Из таблиц видно, что поправка к классической теории существенна в данной задаче, если длина волны синусоидальной нагрузки сравнима с характерной длиной материала l, т. е. если n велико. Из (2.1) и (2.2) видно, что в этом случае решение как по классической, так и по моментной теории быстро затухает при удалении от границы. Поправка в решенной здесь простейшей задаче оказалась существенной, что не является случайным. В работе [7] показано, что для эллиптических уравнений с быстро осциллирующими граничными условиями, заданными на достаточно гладкой границе решение быстро затухает при удалении от границы и может быть легко построено с любой степенью точности. Поэтому нетрудно проследить, что если граничные условия задачи об осцилляции в моментной теории упругости заданы на достаточно гладкой границе, то решение быстро затухает при удалении от нее с увеличением осцилляции, а поправка к классической теории возрастает при этом и может оказаться существенной.

Автор благодарен А. Л. Гольденвейзеру за руководство работой и Ю. Н. Работнову за внимание к работе.

Поступила 16 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейного дифференциального уравнения с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
2. Wilmanski K. Metody asymptotyczne w teorii tarczy z mikrostructura. «Rozpr. inz.,» 1967, т. 15, No. 2.
3. Миндлин Р. Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. пер. «Механика» 1964, № 4.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехтеориздат, 1953.
5. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости. Сб. пер. «Механика», 1964, № 4.
6. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости. Сб. пер. «Механика», 1965, № 3.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 4.