ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

А. И. Лурье

(Ленинград)

Эта статья представляет часть обзорного доклада по нелинейной теории упругости на Третьем всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в январе 1968 г. Статья начинается изложением (пп. 1—3) геометрии деформации, в котором избегнуты представления описывающих ее тензоров через их (ко- или контра-вариантные) компоненты. Такой способ описания явлений через непосредственно задающие их величины (векторы, тензоры) сохранен на протяжении всей статьи. Для задания напряженного состояния (п. 4) применяется несимметричный тензор Пиола, это позволяет относить уравнения статики и краевые условия к геометрии начального состояния среды. Удельная потенциальная энергия деформации (п. 5) представляется функцией инвариантов, выражаемых через главные относительные удлинения; далее она задается в простейшей форме, переходящей в классическую форму линейной теории упругости при отождествлении относительных удлинений с диагональными компонентами линейного тензора деформации. Джон ([1], 1960) назвал «гармоническим» материал, описываемый таким заданием удельной потенциальной энергии деформации, так как решение плоской задачи для него сводится к (нелинейной) краевой задачи теории гармонических функций. Ниже принимаем наименование «полулинейный» — это может быть оправдано тем, что для такого материала в большом классе задач дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях линейны, а нелинейность обнаруживается в краевых условиях.

Для простейших равновесных состояний, характеризуемых симметрией тензоров-градиентов (п. 6), решение задач для полулинейного материала элементарно. В п. 7 рассмотрена задача о вычислении «эффектов второго порядка», дан вывод уравнений «второго приближения», разобран пример кручения стержня (вычисление удлинения при закручивании). В п. 8 приведены дифференциальные уравнения задачи о бифуркации формы равновесия, а в п. 9 они упрощены в предположении, что исходная форма равновесия будет в указанном смысле «простейшей». Эти уравнения в другой записи были даны Сенсенигом ([2], 1964). В частном случае, когда исходная форма равновесия будет однородной деформацией (п. 10), приходим к системе уравнений, полученной из других (не целиком корректных) соображений Саусвеллом ([3], 1913); дается общее представление решения этой системы, применяемое в пп. 11, 12 к задаче о бифуркации равновесия сжатого стержня. В п. 13 рассмотрена бифуркация равновесия полой сферы при радиально-симметричной деформации.

Обозначения. Материальные координаты точек среды обозначаются q^s, их декартовой координаты в начальном состоянии среды (v—объем, ограниченный поверхностью o) a_s, в конечном (V объем, поверхность O) $x_s = a_s + u_s$; вектор-радиус $\mathbf{r} = \mathbf{i}_s a_s$ при преобразовании $v \to V$ становится равным $\mathbf{R} = \mathbf{i}_s x_s = \mathbf{r} + \mathbf{u}$.

В v-объеме вводится векторный базис $\mathbf{r}_s = \partial \mathbf{r}/\partial q^s$ и определяется матрица ковариантных компонент $\| g_{sk} \| = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k$ метрического тензора $\mathbf{g}$; $g = | g_{sk} |$ — ее определитель. Обратной матрицей $\| g^{sk} \|$ задаются контравариантные компоненты этого тензора, так что $g^{sk} g_{kt} = g_t^{s}$ — символы Кронекера. Взаимный векторный базис в v-объеме образуется тройкой векторов

$$\mathbf{r}^s = g^{sk}\mathbf{r}_k, \qquad \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}_k = g_k^{s}, \qquad \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}^k = g^{sk}$$

Такие же обозначения, но прописными буквами ($\mathbf{R}_s$, $\mathbf{R}^s$, $G_{sk} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k$, $G = | G_{sk} |$ и т. д.). применяются в V-объеме

Единичный (метрпческий) тензор $\mathrm{E} = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s$, в векторных базисах v и V объемов представляется в видах

$$\mathrm{E} = \mathrm{g} = g^{sk}\mathbf{r}_s\mathbf{r}_k = g_{sk}\mathbf{r}^s\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^s\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s\mathbf{r}^s$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{G} = G^{sk}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_k = G_{sk}\mathbf{R}^s\mathbf{R}^k = \mathbf{R}^s\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s\mathbf{R}^s$$

Действия в базисах V-объема отмечаются штрихом. Набла операторы в v-объеме и в V-объеме представляются соответственно символическими векторами

$$\nabla = \mathbf{r}^s \frac{\partial}{\partial q^s}, \qquad \nabla' = \mathbf{R}^s \frac{\partial}{\partial q^s}$$

Операция транспонирования тензора второго ранга указывается индексом T. Плотность среды в v и V объемах обозначается ρ_0, ρ, а элементарный объем соответственно $d\tau_0$, $d\tau$; по закону сохранения массы $\rho_0\, d\tau_0 = \rho d\tau$.

1. Градиенты, меры деформации. При преобразовании $v \to V$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_s dq^s = \mathbf{e}\,|\,d\mathbf{r}\,| = \mathbf{e}ds \to d\mathbf{R} = \mathbf{R}_s dq^s = \mathbf{e}'\,|\,d\mathbf{R}\,| = \mathbf{e}'dS$$

и учитывая, что $dq^s = \mathbf{r}^s \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{R}^s \cdot d\mathbf{R}$, имеем

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= \mathbf{R}_s \mathbf{r}^s \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^s \mathbf{R}_s = \nabla \mathbf{R}^T \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{R} \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_s \mathbf{R}^s \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^s \mathbf{r}_s = \nabla' \mathbf{r}^T \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot \nabla' \mathbf{r} \end{aligned} \tag{1.1}$$

причем в рассмотрение введены тензоры-градиенты и транспонированные градиенты

$$\nabla \mathbf{R} = \mathbf{r}^s \mathbf{R}_s, \qquad \nabla' \mathbf{r} = \mathbf{R}^s \mathbf{r}_s, \qquad \nabla \mathbf{R}^T = \mathbf{R}_s \mathbf{r}^s, \qquad \nabla' \mathbf{r}^T = \mathbf{r}_s \mathbf{R}^s \tag{1.2}$$

Это — взаимно-обратные тензоры

$$\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla' \mathbf{r} = \mathrm{E}, \qquad \nabla \mathbf{R}^T \cdot \nabla' \mathbf{r}^T = \mathrm{E} \tag{1.3}$$

Возвращаясь к (1.1), имеем

$$\mathbf{e}'dS = \mathbf{e} \cdot \nabla \mathbf{R} ds = \nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e} ds, \qquad \mathbf{e} ds = \mathbf{e}' \cdot \nabla' \mathbf{r} dS = \nabla' \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e}' dS \tag{1.4}$$

так что

$$dS^2 = \mathbf{e} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e} ds^2 = \mathbf{e} \cdot \mathrm{G}^\times \cdot \mathbf{e} ds^2, \qquad ds^2 = \mathbf{e}' \cdot \nabla' \mathbf{r} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e}' dS^2 = \mathbf{e}' \cdot \mathrm{g}^\times \cdot \mathbf{e}' dS^2 \tag{1.5}$$

Здесь в рассмотрение введены меры деформации

$$\mathrm{G}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = G_{sk} \mathbf{r}^s \mathbf{r}^k, \qquad \mathrm{g}^\times = \nabla' \mathbf{r} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T = g_{sk} \mathbf{R}^s \mathbf{R}^k \tag{1.6}$$

Они определены здесь их ковариантными компонентами в векторных базисах v- и V-объемов, равными ковариантным компонентам единичного тензора (метрических тензоров G, g) в базисах V- и v-объемов. Обратные тензоры определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^{\times -1} &= (\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T)^{-1} = \nabla' \mathbf{r}^T \cdot \nabla' \mathbf{r} = G^{sk} \mathbf{r}_s \mathbf{r}_k \\ \mathrm{g}^{\times -1} &= (\nabla' \mathbf{r} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T)^{-1} = \nabla \mathbf{R}^T \cdot \nabla \mathbf{R} = g^{sk} \mathbf{R}_s \mathbf{R}_k \end{aligned} \tag{1.7}$$

По (1.5), (1.4) имеем

$$dS = ds\,(\mathbf{e} \cdot \mathrm{G}^\times \cdot \mathbf{e})^{1/2}, \qquad ds = dS\,(\mathbf{e} \cdot \mathrm{g}^\times \cdot \mathbf{e})^{1/2} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{e}' = \frac{\mathbf{e} \cdot \nabla R}{(\mathbf{e} \cdot \mathrm{G}^\times \cdot \mathbf{e})^{1/2}} = \frac{\nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e}}{(\mathbf{e} \cdot \mathrm{G}^\times \cdot \mathbf{e})^{1/2}}, \qquad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}' \cdot \nabla' \mathbf{r}}{(\mathbf{e}' \cdot \mathrm{g}^\times \cdot \mathbf{e}')^{1/2}} = \frac{\nabla' \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e}'}{(\mathbf{e}' \cdot \mathrm{g}^\times \cdot \mathbf{e}')^{1/2}}$$

Определив тензор $\mathrm{G}^\times$ заданием его главных значений G_s и ортогональным триедром главных направлений $\mathbf{e}_s$, имеем

$$\mathrm{G}^\times = \sum_s G_s \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s, \qquad \mathrm{G}^{\times -1} = \sum_s \frac{\mathbf{e}_s \mathbf{e}_s}{G_s} \tag{1.9}$$

и по формулам (1.8) находим выражения главных относительных удлинений δ_k, а также единичных векторов $\mathbf{e}_k'$, в которые переходят $\mathbf{e}_k$ при преобразовании $v \to V$

$$\delta_k = \frac{dS_k - ds_k}{ds_k} = \sqrt{G_k} - 1, \qquad \mathbf{e}_k' = \frac{\mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{R}}{\sqrt{G_k}} = \frac{\nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e}_k}{\sqrt{G_k}} \tag{1.10}$$

и легко проверить, что триедр e_k' — ортогональный. Это — триедр главных направлений тензоров $g^{\times -1}$, $g^{\times}$. Действительно, по (1.7) — (1.10) имеем

$$\sum_s G_s e_s' e_s' = \nabla R^T \cdot e_s e_s \cdot \nabla R = \nabla R^T \cdot E \cdot \nabla R = \nabla R^T \cdot \nabla R = g^{\times -1}$$

Итак

$$g^{\times} = \sum_s \frac{e_s' e_s'}{G_s}, \qquad g^{\times -1} = \sum_s G_s e_s' e_s' \tag{1.11}$$

и этим показано, что главные значения пар тензоров $G^{\times}$, $g^{\times -1}$ и $G^{\times -1}$, g равны; впрочем, это следует из равенства собственных значений матриц AB и BA (см. (1.6), (1.7)).

Преобразование $v \to V$ сопряжено таким образом с поворотом триедра $e_s \to e_s'$; при обратном преобразовании $e_s' \to e_s$ и по (1.8), (1.11)

$$e_s = \sqrt{G_s} e_s' \cdot \nabla' r = \sqrt{G_s} \nabla' r^T \cdot e_s' \tag{1.12}$$

По (1.10) имеем также

$$\nabla R \cdot e_s' = \frac{1}{\sqrt{G_s}} \nabla R \cdot \nabla R^T \cdot e_s = \frac{1}{\sqrt{G_s}} G^{\times} \cdot e_s = \sqrt{G_s} e_s$$

так что формулы, обратные (1.10), могут быть записаны в виде

$$e_s = \frac{\nabla R \cdot e_s'}{\sqrt{G_s}} = \frac{e_s' \cdot \nabla R^T}{\sqrt{G_s}} \tag{1.13}$$

2. Тензоры поворота. В рассмотрение вводятся тензоры

$$A = \sum_s e_s e_s', \qquad A^T = \sum_s e_s' e_s \tag{2.1}$$

так что

$$A \cdot A^T = \sum_{s,k} e_s e_s' \cdot e_k' e_k = \sum_s e_s e_s = E, \qquad A^T = A^{-1} \tag{2.2}$$

Тензор, обратный транспонированному, представляет тензор поворота; он осуществляет поворот триедра e_s в e_s':

$$e_s' = e_s \cdot A = A^T \cdot e_s, \qquad e_s = e_s' \cdot A^T = A \cdot e_s' \tag{2.3}$$

Возвращаясь к (1.10) и вводя в рассмотрение тензоры

$$G^{\times 1/2} = \sum_s \sqrt{G_s} e_s e_s, \qquad G^{\times(-1/2)} = \sum_s \frac{e_s e_s}{\sqrt{G_s}} \tag{2.4}$$

можно представить тензоры поворота в виде

$$\begin{gathered} A = \sum_s e_s e_s' = \sum_s \frac{e_s e_s}{\sqrt{G_s}} \cdot \nabla R = G^{\times(-1/2)} \cdot \nabla R, \qquad A^T = \nabla R^T \cdot G^{\times(-1/2)} \\ A = (A^T)^{-1} = G^{\times 1/2} \cdot \nabla' r^T, \qquad A^T = A^{-1} = \nabla' r \cdot G^{\times 1/2} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Следствием этих формул будут представления градиентов в форме

$$\nabla R = G^{\times 1/2} \cdot A, \quad \nabla R^T = A^T \cdot G^{\times 1/2}; \qquad \nabla' r = A^T \cdot G^{\times(-1/2)}, \quad \nabla' r^T = G^{\times(-1/2)} \cdot A \tag{2.6}$$

Непосредственно проверяются также соотношения

$$A^T \cdot G^{\times} \cdot A = g^{\times -1}, \quad G^{\times} = A \cdot g^{\times -1} \cdot A^T; \qquad g^{\times} = A^T \cdot G^{\times -1} \cdot A, \quad G^{\times -1} = A \cdot g^{\times} \cdot A^T \tag{2.7}$$

3. Ориентированная площадка. При преобразовании $v \to V$

$$d\tau_0 = r_1 \cdot (r_2 \times r_3)\, dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3$$

$$d\tau = R_1 \cdot (R_2 \times R_3)\, dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{G}\, dq^1 dq^2 dq^3$$

Вместе с тем, рассматривая элементарный параллелепипед с ребрами δs_k, направленными по главным осям e_k тензора $G^\times$, по (1.10) имеем

$$d\tau_0 = \delta s_1 \delta s_2 \delta s_3 \to d\tau = \sqrt{G_1 G_2 G_3}\,\delta s_1 \delta s_2 \delta s_3 = \sqrt{G_1 G_2 G_3}\,d\tau_0$$

Итак,

$$d\tau / d\tau_0 = \sqrt{G/g} = \sqrt{G_1 G_2 G_3} \tag{3.1}$$

В элементарном тетраэдре $OA_1A_2A_3$ с ребрами $\overrightarrow{OA_k} = e_k \delta s_k$, направленными по тем же осям, ориентированный наружу тетраэдра вектор нормали $\mathbf{n}do$ площадки $A_1A_2A_3$ равен

$$2\mathbf{n}do = e_2 \times e_3 \delta s_2 \delta s_3 + e_3 \times e_1 \delta s_3 \delta s_1 + e_1 \times e_2 \delta s_1 \delta s_2 = d\tau_0 \sum_k \frac{e_k}{\delta s_k}$$

При преобразовании $v \to V$ этот вектор представится в виде (см. (3.1), (1.10))

$$2\mathbf{N}dO = d\tau \sum_k \frac{e_k'}{\delta S_k} = d\tau_0 \left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} \nabla \mathbf{R}^T \cdot \sum_k \frac{e_k}{G_k \delta s_k} = d\tau_0 \left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} \nabla \mathbf{R}^T \cdot G^{\times -1} \cdot \sum_k \frac{e_k}{\delta s_k}$$

Приходим к многократно используемому далее соотношению (см. (1.7), (1.3))

$$\mathbf{N}\,dO = \sqrt{G/g}\,\nabla \mathbf{R}^T \cdot G^{\times -1} \cdot \mathbf{n}do = \sqrt{G/g}\,\nabla' \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}do = \sqrt{G/g}\,\mathbf{n} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T do \tag{3.2}$$

Из него имеем также

$$\frac{dO}{do} = \left(\frac{G}{g}\,\mathbf{n} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T \cdot \nabla' \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\right)^{1/2} = \left(\frac{G}{g}\,\mathbf{n} \cdot G^{\times -1} \cdot \mathbf{n}\right)^{1/2} \tag{3.3}$$

4. Тензор напряжений. Заданный в V-объеме симметричный тензор $T = T^T$ второго ранга представляет тензор напряжений, если его произведение на вектор $\mathbf{N}dO$ ориентированной площадки определяет силу $\mathbf{F}dO$, действующую на эту площадку.

По этому определению, сославшись на (3.2), имеем

$$\mathbf{F}dO = \mathbf{N} \cdot T\,dO = \sqrt{G/g}\,\mathbf{n} \cdot \nabla' \mathbf{r}^T \cdot T do \tag{4.1}$$

и это соотношение указывает на целесообразность ввести в рассмотрение несимметричный тензор D — тензор напряжений Пиола (1831)

$$D = \sqrt{G/g}\,\nabla' \mathbf{r}^T \cdot T, \qquad D^T = \sqrt{G/g}\,T \cdot \nabla' \mathbf{r} \tag{4.2}$$

Итак,

$$\mathbf{F}dO = \mathbf{n} \cdot D do, \qquad \mathbf{F}\sqrt{G/g}\,(\mathbf{n} \cdot G^{\times -1} \cdot \mathbf{n})^{1/2} = \mathbf{n} \cdot D \tag{4.3}$$

Сославшись на (2.6), имеем

$$D \cdot A^T = \sqrt{G/g}\,G^{\times(-1/2)} \cdot A \cdot T \cdot A^T, \qquad A \cdot D^T = \sqrt{G/g}\,A \cdot T \cdot A^T \cdot G^{\times(-1/2)} \tag{4.4}$$

Известно, что (в изотропной среде) тензоры T и $g^\times$ соосны (e_s' — триедр их главных направлений); поэтому, «повернутый тензор напряжений» $A \cdot T \cdot A^T$ соосен с $G^\times$, а значит правые части равенств (4.4) равны; отсюда следует симметричность тензора $D \cdot A^T$

$$D \cdot A^T = A \cdot D^T = (D \cdot A^T)^T$$

Условие обращения в нуль главного вектора сил, действующих на произвольно выделяемый в V-объеме объем V_*, ограниченный поверхностью O_*, в который при преобразовании $v \to V$ обратился v_*-объем (с поверхностью o_*), записывается в виде

$$\iint_{O_*} \mathbf{F}dO + \iiint_{V_*} \rho \mathbf{K} d\tau = \iint_{o_*} \mathbf{n} \cdot D do + \iiint_{v_*} \rho_0 \mathbf{K} d\tau_0 = 0$$

Приходим к необходимому условию равновесия

$$\iiint_{v_*} (\nabla \cdot D + \rho_0 \mathbf{K})\,d\tau_0 = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot D + \rho_0 \mathbf{K} = 0 \tag{4.5}$$

причем $\mathbf{K}$ — вектор массовой силы. Условие обращения в нуль главного момента сил $\mathbf{F}dO$, $\rho \mathbf{K}$ сведется, конечно, к требованию симметричности тензора T.

5. Уравнение состояния. Сославшись на (2.5), (2.6), представим (4.4) в виде

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T=\sqrt{G/g}\nabla'\mathbf{r}^T\cdot\mathrm{T}\cdot\nabla'\mathbf{r}\cdot\mathrm{G}^{\times 1/2} \tag{5.1}$$

Вместе с тем известно, что вариация удельной потенциальной энергии деформации упругого тела представляется в форме следа, полупроизведения энергетического тензора напряжений $\mathrm{Q}=\nabla'\mathbf{r}^T\cdot\mathrm{T}\cdot\nabla'\mathbf{r}$ и тензора $\delta\mathrm{G}^\times$

$$\delta W={}^1/_2\sqrt{G/g}\nabla'\mathbf{r}^T\cdot\mathrm{T}\cdot\nabla'\mathbf{r}\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^\times \tag{5.2}$$

Поэтому ее выражение через тензор Пиола будет

$$\delta W={}^1/_2\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T\cdot\mathrm{G}^{\times(-1/2)}\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^\times=\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T\cdot\cdot{}^1/_2\mathrm{G}^{\times(-1/2)}\cdot\delta\mathrm{G}^\times$$

или

$$\delta W=\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2} \tag{5.3}$$

Далее эта энергия рассматривается как функция трех инвариантов деформированного состояния

$$s_k=\delta_1{}^k+\delta_2{}^k+\delta_3{}^k\qquad(k=1,\ 2,\ 3) \tag{5.4}$$

где δ_s — главные относительные удлинения (см. (1.10)). Получаем

$$s_1=I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})-3,\quad s_2=(\sqrt{G_1}-1)^2+(\sqrt{G_2}-1)^2+(\sqrt{G_3}-1)^2=I_1(\mathrm{G}^\times)-2I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})+3$$

$$s_3=(\sqrt{G_1}-1)^3+(\sqrt{G_2}-1)^3+(\sqrt{G_3}-1)^3=I_1(\mathrm{G}^{\times 3/2})-3I_1(\mathrm{G}^\times)+3I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})-3$$

где $I_1(\mathrm{Q})$ — первый инвариант тензора Q. Отсюда находим

$$\delta W=\frac{\partial W}{\partial s_1}\delta s_1+\frac{\partial W}{\partial s_2}\delta s_2+\frac{\partial W}{\partial s_3}\delta s_3=\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}-2\frac{\partial W}{\partial s_2}+3\frac{\partial W}{\partial s_3}\right)\delta I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})+$$
$$+\left(\frac{\partial W}{\partial s_2}-3\frac{\partial W}{\partial s_3}\right)\delta I_1(\mathrm{G}^\times)+\frac{\partial W}{\partial s_3}\delta I_1(\mathrm{G}^{\times 3/2}) \tag{5.5}$$

Теперь, представим симметричный тензор $\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T$ квадратичной формой тензора $\mathrm{G}^{\times 1/2}$:

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{A}^T=a\mathrm{E}+b\mathrm{G}^{\times 1/2}+c\mathrm{G}^\times$$

Здесь скалярные множители представляют функции инвариантов s_k; имеем

$$\mathrm{E}\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2}=I_1(\delta\mathrm{G}^{\times 1/2})=\delta I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})$$
$$\mathrm{G}^{\times 1/2}\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2}=I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2}\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2})={}^1/_2\delta I_1(\mathrm{G}^\times)$$
$$\mathrm{G}^\times\cdot\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2}=I_1(\mathrm{G}^\times\cdot\delta\mathrm{G}^{\times 1/2})={}^1/_3\delta I_1(\mathrm{G}^{\times 3/2})$$

и по (5.3), (5.5), (2.6) приходим к уравнению состояния

$$\mathrm{D}=\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}-2\frac{\partial W}{\partial s_2}+3\frac{\partial W}{\partial s_3}\right)\mathrm{A}+2\left(\frac{\partial W}{\partial s_2}-3\frac{\partial W}{\partial s_3}\right)\nabla\mathbf{R}+3\frac{\partial W}{\partial s_3}\mathrm{G}^{\times 1/2}\cdot\nabla\mathbf{R} \tag{5.6}$$

задающему связь напряжений с величинами, определяемыми деформацией v-объема в V-объем. Джон предложил выражение удельной потенциальной энергии в форме

$$W={}^1/_2\,\lambda s_1{}^2+\mu s_2 \tag{5.7}$$

по внешнему виду совпадающей с ее заданием в линейной теории упругости, когда s_1, s_2 представляют первые инварианты линейного тензора деформации ε и его квадрата. Материал, подчиняющийся этому закону Джон [1] назвал «гармоническим». Здесь он назван «полулинейным». При таком задании

$$\mathrm{D}=(\lambda s_1-2\mu)\,\mathrm{A}+2\mu\nabla\mathrm{R} \tag{5.8}$$

и подстановка в (4.5) приводит к аналогу «уравнений равновесия в перемещениях»

$$(\lambda s_1-2\mu)\nabla\cdot\mathrm{A}+\lambda\mathrm{A}^T\cdot\nabla s_1+2\mu\nabla^2\mathbf{R}+\rho_0\mathbf{K}=0 \tag{5.9}$$

Краевое условие (4.3) при задании поверхностных сил F записывается в виде

$$\mathbf{F}\frac{dO}{do} = (\lambda s_1 - 2\mu)\,\mathbf{n}\cdot\mathrm{A} + 2\mu\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{R} \tag{5.10}$$

Его запись предполагает знание формы границы (вектора $\mathbf{n}$) тела в начальном состоянии, а уравнения равновесия (5.8) отнесены к векторному базису этого же состояния. В этом преимущество применения тензора Пиола. Для применения же уравнения состояния (5.6), или в частности (5.7), необходимо знать выражения главных значений и главных направлений тензора $\mathrm{G}^\times$ по заданию точечного преобразования $v \to V$.

Здесь следует вспомнить, что процесс решения задач нелинейной теории упругости сводится, как правило, к заданию точечного преобразования $v \to V$ и последующего разыскания распределения поверхностных сил, обеспечивающих поддержание этого деформированного состояния тела. Во всех без исключения доведенных до замкнутых решений случаях преобразование задается в простейшей форме, когда поворот главных осей или отсутствует ($\mathrm{A} = \mathrm{E}$) или сохраняет постоянное значение на протяжении тела (A — постоянный тензор). Примерами могут служить: осесимметричная деформация круглого цилиндра, радиально-симметричная деформация сферы, трехосное равномерное растяжение ($\mathrm{A} = \mathrm{E}$), аффинное преобразование и, в частности, деформация простого сдвига (A — постоянный тензор). Надо добавить, что замкнутые решения удается обычно получить лишь для несжимаемого материала Муни.

В перечисленных предположениях дифференциальные уравнения для «гармонического» материала оказываются линейными, а нелинейность задачи создается краевыми условиями.

6. Сохранение главных направлений. Оно будет иметь место, если тензоры-градиенты симметричны

$$\nabla\mathbf{R} = \nabla\mathbf{R}^T, \qquad \nabla'\mathbf{r} = \nabla'\mathbf{r}^T \tag{6.1}$$

Тогда по (1.6), (2.6), (2.1)

$$\nabla\mathbf{R} = \nabla\mathbf{R}^T = \mathrm{G}^{\times 1/2}, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{E}, \qquad \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_s' \tag{6.2}$$

Например, при осесимметричной деформации круглого цилиндра и радиально-симметрической деформации сферы векторы $\mathbf{e}_s$ ($\mathbf{e}_s'$) совпадают с базисными единичными векторами ортогональной (цилиндрической, сферической) системы координат. Теперь имеем

$$s_1 = I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2}) - 3 = I_1(\nabla\mathbf{R}) - 3 = \vartheta = \nabla\cdot\mathbf{u}$$

и уравнения (5.8), (5.9) представляются в виде

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{K} = 0, \qquad \lambda\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u} = \mathbf{F}\frac{dO}{do} \tag{6.3}$$

так как по (6.1) здесь $\nabla\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}^T$, $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{u}$. При таком условии эти уравнения представляют простейший частный вид уравнений теории упругости в перемещениях; нелинейна лишь правая часть краевого условия. При отсутствии массовых сил $\mathbf{u}$ — гармонический вектор. Примером может служить вектор

$$\mathbf{u} = C_1\mathbf{R} + \frac{C_2}{R^3}\mathbf{R} = C_1\mathbf{R} - C_2\nabla\frac{1}{R} = \left(C_1R + \frac{C_2}{R^2}\right)\mathbf{e}_R \tag{6.4}$$

определяющий радиально-симметричную деформацию, в которой поверхность любой сферы радиуса R становится сферой с радиусом

$$f(R) = (C_1 + 1)R + C_2/R^2 \tag{6.5}$$

Эта деформация осуществима при действии равномерно-распределенных давлений p_1, p_0 по внутренней ($R = R_1$) и наружной ($R = R_0$) поверхностям сфер

$$R = R_0 : \mathbf{F}\frac{dO}{do} = -p_0\mathbf{e}_R\frac{f^2(R_0)}{R_0^2}, \qquad R = R_1 : \mathbf{F}\frac{dO}{do} = p_1\mathbf{e}_R\frac{f^2(R_1)}{R_1^2}$$

Постоянные C_1, C_2 определяются по краевым условиям (6.3). Имеем

$$\nabla \mathbf{u} = C_1 \mathrm{E} + C_2 \left(\frac{\mathrm{E}}{R^3} - 3 \frac{\mathbf{RR}}{R^5} \right), \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 3 C_1 \tag{6.6}$$

и далее

$$-p_0 \frac{f^2(R_0)}{R_0^2} = (3\lambda + 2\mu) C_1 - \frac{4\mu}{R_0^3} C_2, \qquad p_1 \frac{f^2(R_1)}{R_1^2} = (3\lambda + 2\mu) C_1 - \frac{4\mu}{R_1^3} C_2$$

Например, при $p_1 = 0$, $p_0 = p$ (наружное давление)

$$p_0 = -\frac{(3\lambda + 2\mu)(1 - \varkappa) C_1}{[C_1 + 1 + \varkappa C_1 (3\lambda + 2\mu)/4\mu]^2} \qquad \left(\varkappa = \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^3 \right) \tag{6.7}$$

и C_1 находится как (больший, чем —1) корень этого квадратного уравнения.

7. Эффекты второго порядка. Мера деформации (1.6) представляется в виде

$$\mathrm{G}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = (\mathrm{E} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathrm{E} + \nabla \mathbf{u}^T) = \mathrm{E} + 2\varepsilon + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T$$

где ε — линейный тензор деформации, а тензоры $\nabla \mathbf{u}$, $\nabla \mathbf{u}^T$ представимы их разбиениями на симметричную (ε) и кососимметричную (Ω) части

$$\varepsilon = {}^1/_2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \qquad \nabla \mathbf{u} = \varepsilon - \Omega, \qquad \triangle \mathbf{u}^T = \varepsilon + \Omega$$

причем тензор Ω может быть выражен через линейный вектор поворота $\boldsymbol{\omega}$

$$\Omega = \mathrm{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{E}, \qquad \omega = {}^1/_2 \nabla \times \mathbf{u}$$

Поэтому

$$\mathrm{G}^\times = \mathrm{E} + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \Omega^2 + \varepsilon \cdot \Omega - \Omega \cdot \varepsilon$$

и далее, сохранив лишь слагаемое второй степени относительно производных вектора $\mathbf{u}$

$$\mathrm{G}^{\times 1/2} = \mathrm{E} + \varepsilon - {}^1/_2 (\Omega^2 - \varepsilon \cdot \Omega + \Omega \cdot \varepsilon)$$

$$\mathrm{G}^{\times(-1/2)} = \mathrm{E} - \varepsilon + \varepsilon^2 + {}^1/_2 (\Omega^2 - \mathrm{E} \cdot \varepsilon + \Omega \cdot \varepsilon)$$

Поэтому с той же точностью, сославшись на (2.5), имеем

$$s_1 = I(\mathrm{G}^{\times 1/2}) - 3 = I_1(\varepsilon) - {}^1/_2 (\Omega \cdot\cdot \Omega - \varepsilon \cdot\cdot \Omega + \Omega \cdot\cdot \varepsilon) = \vartheta + \omega \cdot \omega \tag{7.1}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{G}^{\times(-1/2)} \cdot \nabla \mathbf{R} = \mathrm{G}^{\times(-1/2)} \cdot (\mathrm{E} + \varepsilon - \Omega) = \mathrm{E} - \Omega + {}^1/_2 (\Omega^2 + \varepsilon \cdot \Omega + \Omega \cdot \varepsilon) \tag{7.2}$$

и по (5.8) приходим к представлению тензора Пиола

$$\mathrm{D} = \lambda \vartheta \mathrm{E} + 2\mu\varepsilon - (\lambda \vartheta \mathrm{E} + 2\mu\varepsilon) \cdot \Omega + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathrm{E} - \mu \boldsymbol{\omega\omega} + \mu (\varepsilon \cdot \Omega - \Omega \cdot \varepsilon)$$

или в другой записи

$$\mathrm{D} = \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) - \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathrm{T}^* (\mathbf{u}) \tag{7.3}$$

Здесь $\mathrm{T}^\circ(\mathbf{u})$ — тензор напряжений линейной теории упругости, вычисляемой по вектору $\mathbf{u}$ согласно закону Гука, $\mathrm{T}^*(\mathbf{u})$ — добавочный симметричный тензор

$$\mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) = \lambda \vartheta \mathrm{E} + 2\mu\varepsilon, \quad \mathrm{T}^* (\mathbf{u}) = (\lambda + \mu)\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathrm{E} - \mu \boldsymbol{\omega\omega} +$$
$$+ \mu (\varepsilon \cdot \Omega - \Omega \cdot \varepsilon) = \lambda \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathrm{E} - \mu \varepsilon^2 + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \tag{7.4}$$

Кососимметричная часть тензора D представлена тензором $-\mathrm{T}^\circ(\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega}$.

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности записываются теперь по (4.3), (4.5) в виде

$$\nabla \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times \nabla \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) - [\mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) \cdot \nabla] \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathrm{T}^* (\mathbf{u}) = 0 \tag{7.5}$$

$$\mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{n} \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{n} \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{u})] + \mathbf{n} \cdot \mathrm{T}^* (\mathbf{u}) \tag{7.6}$$

(предположено отсутствие объемных сил).

Полагая теперь $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, определим вектор $\mathbf{v}$, как решение линейной задачи

$$\nabla \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{v}) = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathrm{T}^\circ (\mathbf{v}) = \mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{F}^\circ \tag{7.7}$$

Здесь $\mathbf{F}^\circ$ — поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности o, ограничивающей v-объем. Задача имеет решение, так как внешние силы предполагаются статически эквивалентными нулю на последовательности равновесных состояний перехода из v- в V-объем

$$\iint\limits_O \mathbf{F}dO = \iint\limits_o \mathbf{F}^\circ do = 0, \qquad \iint\limits_O \mathbf{R}\times\mathbf{F}dO = \iint\limits_o \mathbf{r}\times\mathbf{F}^\circ do = 0 \tag{7.8}$$

Вектор $\mathbf{w}$, определяющий искомый «эффект второго порядка», дается, согласно (7.5), (7.6), решением задачи линейной теории

$$\nabla\cdot\mathrm{T}^\circ(\mathbf{w}) + \mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathrm{T}^\circ(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \tag{7.9}$$

с «объемными и поверхностными силами»

$$\mathbf{k} = -[\mathrm{T}^\circ(\mathbf{v})\cdot\nabla]\times\boldsymbol{\omega} + \nabla\cdot\mathrm{T}^*(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{f} = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{F}^\circ - \mathbf{n}\cdot\mathrm{T}^*(\mathbf{v}) \tag{7.10}$$

причем учтены уравнения (7.7).

Задача имеет решение, если их главный вектор и главный момент равны нулю

$$\iint\limits_o \mathbf{f}do + \iiint\limits_v \mathbf{k}d\tau_0 = 0, \quad \iint\limits_o \mathbf{r}\times\mathbf{f}do + \iiint\limits_v \mathbf{r}\times\mathbf{k}d\tau_0 = 0 \tag{7.11}$$

Выполнение первого условия легко проверить. Это следует из ранее уже использованных тождеств

$$\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{n}\cdot\mathrm{T}^\circ) = -\mathbf{n}\cdot(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega}), \qquad \nabla\cdot(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega}\times\nabla\cdot\mathrm{T}^\circ + (\mathrm{T}^\circ\cdot\nabla)\times\boldsymbol{\omega} \tag{7.12}$$

справедливых для симметричного тензора T°. Поэтому, сославшись на (7.7), (7.10), имеем

$$\iint\limits_o \mathbf{f}do = \iiint\limits_v [\nabla\cdot(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega}) - \nabla\cdot\mathrm{T}^*]\,d\tau_0 = \iiint\limits_v [(\mathrm{T}^\circ\cdot\nabla)\times\boldsymbol{\omega} - \nabla\cdot\mathrm{T}^*]\,d\tau_0 = -\iiint\limits_v \mathbf{k}d\tau_0$$

что и требуется. Иначе обстоит дело со вторым условием (7.11). Здесь надо сослаться на соотношение

$$\iint\limits_o \mathbf{r}\times\mathbf{n}\cdot\mathrm{Q}do = -\iint\limits_o \mathbf{n}\cdot(\mathrm{Q}\times\mathbf{r})\,do = -\iiint\limits_v \nabla\cdot(\mathrm{Q}\times\mathbf{r})\,d\tau_0 =$$

$$= \iiint\limits_v \mathbf{r}\times\nabla\cdot\mathrm{Q}d\tau_0 + \iiint\limits_v \mathbf{i}_s\times(\mathbf{i}_s\cdot\mathrm{Q})\,d\tau_0$$

причем последнее слагаемое отпадает, если Q — симметричный тензор. В применении к вектору $\mathbf{f}$ имеем

$$\mathrm{Q} = \mathrm{T}^\circ(\mathbf{v})\times\boldsymbol{\omega} - \mathrm{T}^*(\mathbf{v}) \tag{7.13}$$

и, сославшись на (7.10), (7.12), приходим к условию

$$\iint\limits_O \mathbf{r}\times\mathbf{f}d0 + \iiint\limits_v \mathbf{r}\times\mathbf{k}d\tau_0 = \iiint\limits_v \mathbf{i}_s\times[\mathbf{i}_s\cdot(\mathrm{T}\times\boldsymbol{\omega})]\,d\tau_0 = 0$$

Вектор под знаком интеграла можно представить в инвариантной форме

$$\mathbf{i}_s\times[\mathbf{i}_s\cdot(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega})] = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{T}^\circ - \boldsymbol{\omega}I_1(\mathrm{T}^\circ)$$

так что второе условие (7.11) приводят к требованию

$$\iiint\limits_{v_0} [\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{T}^\circ(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega}I_1(\mathrm{T}^\circ)]\,d\tau_0 = 0 \tag{7.14}$$

Заметим, что решением линейной краевой задачи (7.7) вектор $\boldsymbol{\omega}$ определяется с точностью до аддитивного постоянного вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, так что $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}_0$, причем, например, $\boldsymbol{\omega}'(0, 0, 0) = 0$. Можно подчинить вектор $\boldsymbol{\omega}_0$ условию

$$\boldsymbol{\omega}_0\cdot\iiint\limits_v [\mathrm{T}^\circ(\mathbf{v}) - \mathrm{E}I_1(\mathrm{T}^\circ(\mathbf{v}))]\,d\tau_0 = v\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = -\frac{1}{v}\iiint\limits_v [\boldsymbol{\omega}'\cdot\mathrm{T}^\circ - \boldsymbol{\omega}'I_1(\mathrm{T}^\circ)]\,d\tau_0$$

в котором $\mathbf{b}$ — вектор, вычисляемый по решению линейной задачи (7.7). Пришли к системе линейных уравнений для неизвестного вектора $\boldsymbol{\omega}_0$

$$\omega_{0r}(c_{rq}-c\delta_{rq})=b_q,\qquad c_{rq}=\frac{1}{v}\iiint\limits_v t_{rq}{}^\circ d\tau_0,\qquad c=c_{11}+c_{22}+c_{33}$$

коэффициенты левой части которой — средние значения компонент тензора $\mathrm{T}^\circ(\mathbf{v})$ выражаются через поверхностные силы — их определение не требует решения краевой задачи (7.7). Определитель этой системы должен быть отличен от нуля

$$\Delta=|\,c_{rq}-c\delta_{rq}\,|\neq 0 \tag{7.15}$$

а при несоблюдении этого условия (при $\Delta=0$) краевая задача (7.9) может и не иметь решений. Учет эффекта нелинейности не достигается внесением поправки $\mathbf{w}$ в решение линейной задачи.

Конечно, разыскание вектора $\mathbf{w}$ затруднено сложностью задания (7.10) объемных и поверхностных сил в краевой задаче (7.9). Применение теоремы взаимности позволяет определить через эти силы средние значения деформаций, определяемых по вектору $\mathbf{w}$; этим учетом эффекта нелинейности можно довольствоваться для вычисления интегральных эффектов — изменений длин, объема и т. д., когда необходимость учета влияния нелинейности на распределение напряжений отодвинута на второй план. Вычисление, диктуемое теоремой взаимности, несколько упрощается благодаря специальной структуре векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{f}$. Применение этой теоремы приводит к соотношению

$$\frac{\nu}{1-2\nu}\,\vartheta'\vartheta_m(\mathbf{w})+\varepsilon'\cdot\cdot\,\varepsilon_m(\mathbf{w})=\frac{1}{2\mu v}\left(\iiint\limits_v \mathbf{k}\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,d\tau_0+\iint\limits_O \mathbf{f}\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,do\right) \tag{7.16}$$

в котором ε' — некоторый постоянный симметричный тензор, $\varepsilon_m(\mathbf{w})$ — среднее по объему v значение тензора деформации $\varepsilon(\mathbf{w})$. Через ϑ', $\vartheta_m(\mathbf{w})$ обозначены первые инварианты тензоров ε', $\varepsilon(\mathbf{w})$, а через $\varepsilon'\cdot\cdot\,\varepsilon_m(\mathbf{w})$ — первый инвариант их произведения; $\mathbf{r}=\mathbf{i}_s a_s$.

Сославшись на (7.13), (7.12), (7.10), имеем

$$\iint\limits_O \mathbf{f}\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,do=-\iint\limits_O[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{n}\cdot\mathrm{T}^\circ)+\mathbf{n}\cdot\mathrm{T}^*(\mathbf{v})]\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,do=$$

$$=\iint\limits_O \mathbf{n}\cdot(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega}-\mathrm{T}^*)\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,do=\iint\limits_O \mathbf{n}\cdot\mathrm{Q}\cdot\mathrm{E}'\cdot\mathbf{r}\,do=\iiint\limits_v(\nabla\cdot\mathrm{Q})\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,d\tau_0+$$

$$+\iiint \mathrm{Q}\,d\tau_0\cdot\cdot\,\varepsilon'=-\iiint\limits_v \mathbf{k}\cdot\varepsilon'\cdot\mathbf{r}\,d\tau_0+\varepsilon'\cdot\cdot\iiint\limits_v \mathrm{Q}\,d\tau_0$$

и подстановка в (7.16) приводит к искомому соотношению

$$\frac{\nu}{1-2\nu}\,\vartheta'\vartheta_m(\boldsymbol{\omega})+\varepsilon'\cdot\cdot\left[\varepsilon_m-\frac{1}{2\mu v}\iiint\limits_v(\mathrm{T}^\circ\times\boldsymbol{\omega}-\mathrm{T}^*)\,d\tau_0\right]=0 \tag{7.17}$$

Полагая в нем последовательно $\varepsilon'=\mathrm{E}$, $\varepsilon'=\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$, $\varepsilon'=\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1$, придем к выражениям

$$\vartheta_m(\mathbf{w})=-\frac{1-2\nu}{2\mu v(1+\nu)}\iiint\limits_v I_1(\mathrm{T}^*(\mathbf{v}))\,d\tau_0 \tag{7.18}$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu}\,\vartheta_m(\mathbf{w})+[\varepsilon_{11}(\mathbf{w})]_m=\frac{1}{2\mu v}\iiint\limits_v[t_{12}{}^\circ(\mathbf{v})\,\omega_3-t_{13}{}^\circ(\mathbf{v})\,\omega_2-t_{11}{}^*(\mathbf{v})]\,d\tau_0 \tag{7.19}$$

$$2\,[\varepsilon_{12}(\mathbf{w})]_m=\frac{1}{2\mu v}\iiint\limits_v(t_{22}{}^\circ(\mathbf{v})-t_{11}{}^\circ(\mathbf{v}))\omega_3-t_{23}{}^\circ(\mathbf{v})\,\omega_2+t_{13}{}^\circ(\mathbf{v})\,\omega_1-2t_{12}{}^*(\mathbf{v})]\,d\tau_0 \tag{7.20}$$

Нетрудно проверить, заменив $t_{sk}{}^\circ,\omega_r$ их выражениями через производные вектора перемещения, что подынтегральное выражение в (7.20) симметрично по индексам 1,2.

Пример. Кручение стержня. В линейном приближении решение общеизвестно

$$v_1 = -\alpha a_2 a_3, \quad v_2 = \alpha\, a_3 a_1, \quad v_3 = \alpha\varphi\,(a_1, a_2)$$

причем φ — гармоническая функция, определяемая решением задачи Неймана

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = n_1 a_2 - n_2 a_1$$

Отличны от нуля напряжения

$$t_{31}{}^\circ = \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} - a_2\right), \qquad t_{23}{}^\circ = \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + a_1\right)$$

а выражения компонент линейного вектора поворота записываются в виде

$$2\omega_1 = \alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} - a_1\right), \qquad 2\omega_2 = -\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_2\right), \quad \omega_3 = \alpha a_3$$

Проверим выполнение критерия (7.14). Имеем

$$\iint\limits_S [\boldsymbol{\omega}\cdot \mathrm{T}^\circ(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} I_1(\mathrm{T}^\circ)]\, do = -\mu\alpha^2 \iint\limits_S \left(a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right) do =$$

$$= \mu\alpha^2\left[2\iint\limits_S \varphi do - \oint\limits_\Gamma \varphi\,(a_1 n_1 + a_2 n_2)\, ds\right] = \oint\limits_\Gamma \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds = 0$$

так как φ однозначна в S. Здесь использовано применяемое в задаче о центре жесткости выражение интеграла от гармонической в области функции $\psi\,(a_1, a_2)$ через ее контурное значение и депланацию

$$2\iint \Psi\,(a_1, a_2)\, do - \oint\limits_\Gamma \Psi\,(n_1 a_1 + n_2 a_2)\, ds = \oint\limits_\Gamma \Psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds$$

По (7.4) и (7.18) имеем

$$I_1(\mathrm{T}^*) = (3\lambda + 2\mu)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2), \qquad t_{33}{}^* = \lambda\omega_3^2$$

$$\vartheta_m(\mathbf{w}) = -\frac{1-2\nu}{2\mu v\,(1+\nu)}(3\lambda + 2\mu)\int\limits_0^l da_3 \iint\limits_S (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\, do$$

и при подстановке в выражение (7.19) для $[\varepsilon_{33}(\mathbf{w})]_m$ величина ω_3 сокращается. Получаем

$$(\varepsilon_{33})_m = \frac{1}{2S}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}\iint\limits_S (\omega_1^2 + \omega_2^2)\, do + \frac{1}{\mu}\iint\limits_S (t_{31}{}^\circ\omega_2 - t_{23}{}^\circ\omega_1)\, do\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4S\,(1-2\nu)}\left[(3\nu - 1)\iint\limits_S (\nabla\varphi)^2 do + (1-\nu)\iint\limits_S (a_1^2 + a_2^2)\, do + \right.$$

$$\left. + 2\nu\iint\limits_S \left(a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} - a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right) do\right]$$

Входящие сюда интегралы выражаются через жесткость стержня на кручение C и полярный момент инерции I_p площади

$$\iint\limits_S (\nabla\varphi)^2 do = \iint\limits_S \left(a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} - a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right) do = I_p - C; \quad I_p = \iint\limits_S (a_1^2 + a_2^2)\, do$$

Изменение длины стержня оказывается равным

$$\Delta l = \frac{l\alpha^2}{4S\,(1-2\nu)}\,[4\,(I_p - C)\,\nu + C\,(1-\nu)]$$

и, поскольку $I_p \geqslant C$ (равенство для круглого стержня), оно для материала, задаваемого удельной потенциальной энергией (5.7), положительно — стержень удлиняется при кручении.

8. Наложение малой деформации на конечную. Рассматриваются три состояния среды: натуральное (v), напряженное (V°) и напряженное (V), создаваемое сообщением точки среды в V° состоянии поля перемещений, задаваемого вектором $\eta \mathbf{w}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^\circ + \eta \mathbf{w} \tag{8.1}$$

Для величин в V-состоянии сохраняются ранее принятые обозначения ($\mathbf{R}$, D, A, и т. д.), их значения в V^0 различаются нуликом сверху справа. Разности («возмущения»), вычисляемые с удержанием первой степени параметра малости η представляются в форме произведения этого параметра на величину, обозначаемую сверху точкой

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^\circ + \eta \dot{\mathbf{R}}, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{D}^\circ + \eta \dot{\mathrm{D}}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{A}^\circ + \eta \dot{\mathrm{A}} \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{w}$, а величины с точкой, представляют дифференциальные операции над вектором $\mathbf{w}$. Их можно определить, как производные по η при $\eta = 0$ от величин в V-состоянии

$$\dot{\mathrm{D}} = \left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}, \qquad \dot{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \text{ и т. д.}$$

В соответствии с определением (1.6)

$$\dot{\mathrm{G}}^\times = \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{R}^{\circ T} + \nabla \mathbf{R}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w}^T$$

Предполагаются известными главные значения G_s° тензоров $\mathrm{G}^{\times\circ}$ и $\mathrm{g}^{\times(-1)0}$ и их лавные направления e_s°, $\mathrm{e}_s'^\circ$ (см. (1.9)). Для построения тензора

$$\dot{\mathrm{A}} = \dot{\mathrm{e}}_s \mathrm{e}_s'^\circ + \mathrm{e}_s^\circ \dot{\mathrm{e}}_s' \tag{8.2}$$

надо составить выражения векторов $\dot{\mathrm{e}}_s$, $\dot{\mathrm{e}}_s'$; попутно найдутся также величины $\dot{G}_s$. Эти векторы ортогональны e_s°, $\mathrm{e}_s^{\circ\prime}$, так как

$$\mathrm{e}_s \cdot \mathrm{e}_s = 1, \qquad \mathrm{e}_s' \cdot \mathrm{e}_s' = 1; \qquad \dot{\mathrm{e}}_s \cdot \mathrm{e}_s^\circ = 0 \qquad \dot{\mathrm{e}}_s' \cdot \mathrm{e}_s'^\circ = 0 \tag{8.3}$$

По определению главных значений и главных направлений тензора

$$\mathrm{G}^\times \cdot \mathrm{e}_s - G_s \mathrm{e}_s = 0, \quad \mathrm{G}^{\times\circ} \cdot \dot{\mathrm{e}}_s - G_s^\circ \dot{\mathrm{e}}_s = \dot{G}_s \mathrm{e}_s^\circ - \dot{\mathrm{G}}^\times \cdot \mathrm{e}_s^\circ \quad (s = 1, 2, 3) \tag{8.4}$$

причем в V^0-объеме также имеем

$$\mathrm{G}^{\times\circ} \cdot \mathrm{e}_s^\circ - G_s^\circ \mathrm{e}_s^\circ = 0$$

Поэтому, умножив скалярно (8,4) на e_k°, получим

$$(G_k^\circ - G_s^\circ)\, \mathrm{e}_k^\circ \cdot \dot{\mathrm{e}}_s = \dot{G}_s \delta_{sk} - \mathrm{e}_k^\circ \cdot \dot{\mathrm{G}}^\times \cdot \mathrm{e}_s^\circ$$

так что

$$\dot{G}_s = \mathrm{e}_s^\circ \cdot \dot{\mathrm{G}}^\times \cdot \mathrm{e}_s^\circ, \qquad \mathrm{e}_k^\circ \cdot \dot{\mathrm{e}}_s = \frac{\mathrm{e}_k^\circ \cdot \dot{\mathrm{G}}^\times \cdot \mathrm{e}_s^\circ}{G_s^\circ - G_k^\circ} \qquad (s,\ k = 1, 2, 3;\ s \neq k) \tag{8.5}$$

Последним равенством вместе с (8.4) определены проекции $\dot{\mathrm{e}}_s$ на оси ортогонального триедра e_k°; поэтому, сославшись на (8.1)

$$\dot{\mathrm{e}}_s = \sum_k{}' \frac{\mathrm{e}_k^\circ \cdot \dot{\mathrm{G}}^\times \cdot \mathrm{e}_s^\circ}{G_s^\circ - G_k^\circ}\, \mathrm{e}_k^\circ = \sum_k{}' \frac{1}{G_s^\circ - G_k^\circ} \left[\mathrm{e}_k^\circ \cdot (\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{R}^{\circ T} + \nabla \mathbf{R}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w}^T) \cdot \mathrm{e}_s^\circ \mathrm{e}_k^\circ\right] \tag{8.6}$$

Аналогично получим

$$\dot{\mathrm{e}}_k' = \sum_s{}' \frac{1}{G_k^\circ - G_s^\circ} \left[\mathrm{e}_s'^\circ \cdot (\nabla \mathbf{w}^T \cdot \nabla \mathbf{R}^\circ + \nabla \mathbf{R}^{\circ T} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathrm{e}_k'^\circ \mathrm{e}_s'^\circ\right]$$

и по (8.2) выражение тензора $\dot{\mathrm{A}}$ записывается в виде (отбрасываем знак суммирования)

$$\dot{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{e}_k^\circ \mathrm{e}_s'^\circ}{G_s^\circ - G_k^\circ} \left[\mathrm{e}_k^\circ \cdot (\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{R}^{\circ T} + \nabla \mathbf{R}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w}^T) \cdot \mathrm{e}_s^\circ - \right.$$
$$\left. - \mathrm{e}_s^{\circ\prime} \cdot (\nabla \mathbf{R}^{\circ T} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \nabla \mathbf{R}^\circ) \cdot \mathrm{e}_k'^\circ\right]$$

Теперь, сославшись на (2.6), (2.1), (1.10), (1.13) и сделав замены вида

$$\mathbf{e}_k'^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}^T\cdot\mathbf{e}_s^\circ=\mathbf{e}_s^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ$$

после преобразований придем к выражению

$$\dot{\mathrm{A}}=\frac{\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_s^{\circ\prime}}{\sqrt{G_s^\circ}+\sqrt{G_k^\circ}}\,(\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_s^{\circ\prime}-\mathbf{e}_s^\circ\mathbf{e}_k^{\circ\prime}) \tag{8.7}$$

Далее имеем по (8.5) и (8.1)

$$\dot{s}_1=\dot{I}_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})=\left[\frac{\partial}{\partial\eta}I_1(\mathrm{G}^{\times 1/2})\right]_{\eta=0}=\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\sum_k\sqrt{G_k}\Big)_{\eta=0}=\frac{1}{2}\sum_k\frac{\dot{G}_k}{\sqrt{G_k^\circ}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_k\frac{1}{\sqrt{G_k^\circ}}\mathbf{e}_k^\circ\cdot\dot{\mathrm{G}}^\times\cdot\mathbf{e}_k^\circ=\frac{1}{2}\sum_k[\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ+\mathbf{e}_k'^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}^T\cdot\mathbf{e}_k^\circ]$$

так что

$$\dot{s}_1=\sum_k\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ \tag{8.8}$$

и теперь по (5.9)

$$\dot{\mathrm{D}}=\frac{\lambda s_1^\circ-2\mu}{\sqrt{G_s^\circ}+\sqrt{G_k^\circ}}\,\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_s'^\circ\,(\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_s'^\circ-\mathbf{e}_s^\circ\mathbf{e}_k'^\circ)+\lambda\mathrm{A}^\circ\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ+2\mu\nabla\mathbf{w} \tag{8.9}$$

Уравнения равновесия в объеме (при отсутствии массовых сил) и на поверхности записываются в виде

$$\nabla\cdot\dot{\mathrm{D}}=0\ \text{в}\ v;\qquad(\mathbf{F}\,dO)^\cdot=\mathbf{n}\cdot\dot{\mathrm{D}}do\quad\text{на}\ o \tag{8.10}$$

В частном случае, когда поверхностная сила $\mathbf{F}$ представляет давление неизменной величины p, остающееся нормальным к поверхности O, имеем по (3.2), (1.2)

$$\mathbf{F}=-p\mathbf{N},\qquad(\mathbf{N}dO)^\cdot=(\sqrt{G/g}\,\mathbf{R}^s)^\cdot\,n_s do$$

и из соотношений

$$(\sqrt{G/g})^\cdot=\sqrt{G^\circ/g}\sum_k\frac{\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ}{\sqrt{G_k^\circ}},\qquad\dot{\mathbf{R}}^s=-\mathbf{R}^{\circ s}\cdot\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}^{\circ t}$$

получаем

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathrm{D}}=-p\sqrt{\frac{G^\circ}{g}}\left[\sum_k\frac{\mathbf{e}_k^\circ\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k'^\circ}{\sqrt{G_k^\circ}}\mathbf{R}^{\circ s}-\mathbf{R}^{\circ s}\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial q^t}\mathbf{R}^{\circ t}\right]n_s \tag{8.11}$$

9. Сохранение главных направлений. В этом случае (п. 6) уравнения (8.9) — (8.11) значительно упрощаются. Тензор $\nabla\,\mathbf{w}$ представляется его разбиением на симметричную и кососимметричную части

$$\nabla\mathbf{w}=\varepsilon-\Omega=\varepsilon-\mathrm{E}\times\boldsymbol{\omega} \tag{9.1}$$

где ε — линейный тензор деформации, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор поворота, вычисляемые по вектору перемещения $\mathbf{w}$. Учитывая также (6.1), (6.2), получаем уравнения, приводимые в иной форме Сенсенигом [2]

$$\dot{\mathrm{D}}=2\frac{\lambda s_1^\circ-2\mu}{\sqrt{G_s^\circ}+\sqrt{G_k^\circ}}\,\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{e}_k^\circ\times\mathbf{e}_s^\circ)\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_s^\circ+\lambda\mathrm{E}\nabla\cdot\mathbf{w}+2\mu(\varepsilon-\mathrm{E}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{9.2}$$

Но нетрудно проверить

$$-\mathrm{E}\times\boldsymbol{\omega}=-\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_k^\circ\times\mathbf{e}_r^\circ\omega_r=\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_s^\circ\in_{ksr}\omega_r=\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_s^\circ(\mathbf{e}_k^\circ\times\mathbf{e}_s^\circ)\cdot\boldsymbol{\omega}$$

где $\in_{ksr}=(\mathbf{e}_k^\circ\times\mathbf{e}_s^\circ)\cdot\mathbf{e}_r^\circ$ — символ Леви — Чивита. Это позволяет записать (9.2) в виде

$$\dot{\mathrm{D}}=\mathrm{T}(\mathbf{w})-2\left(\frac{\lambda s_1^\circ-2\mu}{\sqrt{G_s^\circ}+\sqrt{G_k^\circ}}+\mu\right)\mathrm{E}\times\boldsymbol{\omega} \tag{9.3}$$

причем $T(\mathbf{w})$ — вычисляемый по вектору $\mathbf{w}$ линейный тензор напряжений

$$T(\mathbf{w}) = E\lambda\nabla\cdot\mathbf{w} + 2\mu\varepsilon \tag{9.4}$$

В V°-объеме тензор D° по (6.1), (6.2) и (5.8) представляется в виде

$$D^\circ = (\lambda s_1{}^\circ - 2\mu)E + 2\mu\sum_s \sqrt{G_s{}^\circ}\,\mathbf{e}_s{}^\circ\mathbf{e}_s{}^\circ = \lambda s_1{}^\circ E + 2\mu\sum_s \delta_s{}^\circ\mathbf{e}_s{}^\circ\mathbf{e}_s{}^\circ \quad (\sqrt{G_s{}^\circ} = 1 + \delta_s{}^\circ) \tag{9.5}$$

где $\delta_s{}^\circ$ — главные удлинения (см. (1.10)). Это позволяет преобразовать входящие (9.2) выражения к виду

$$2\left(\frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_1{}^\circ} + \sqrt{G_2{}^\circ}} + \mu\right) = 2\frac{\lambda s_1{}^\circ + \mu(\delta_1{}^\circ + \delta_2{}^\circ)}{2 + \delta_1{}^\circ + \delta_2{}^\circ} = \frac{\partial_1{}^\circ + \partial_2{}^\circ}{2 + \delta_1{}^\circ + \delta_2{}^\circ} \quad \text{и т. д.}$$

причем ∂_s° — компонент тензора D°. Теперь, определив диагональный в осях $\mathbf{e}_s{}^\circ$ тензор C

$$C = \sum_s C_s\mathbf{e}_s{}^\circ\mathbf{e}_s{}^\circ, \quad C_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial_2{}^\circ + \partial_3{}^\circ}{2 + \delta_2{}^\circ + \delta_3{}^\circ}, \quad C_2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial_3{}^\circ + \partial_1{}^\circ}{2 + \delta_3{}^\circ + \delta_1{}^\circ}$$

$$C_3 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial_1{}^\circ + \partial_2{}^\circ}{2 + \delta_1{}^\circ + \delta_2{}^\circ} \tag{9.6}$$

можно переписать выражение $\dot{D}$ в инвариантном виде

$$\dot{D} = T(\mathbf{w}) - 2\mu E\times(C\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{9.7}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\mu}\nabla\cdot T(\mathbf{w}) = \frac{1}{1-2\nu}\nabla\vartheta + \nabla^2\mathbf{w} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla\vartheta - 2\nabla\times\boldsymbol{\omega} \quad (\vartheta = \nabla\cdot\mathbf{w})$$

можно представить уравнение равновесия (8.10) в виде

$$\nabla\vartheta - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}2\nabla\times(C + E)\cdot\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad \nabla\vartheta - 2\nabla\times B\cdot\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{9.8}$$

где введен тензор

$$B = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}(C + E) \tag{9.9}$$

Таковы уравнения равновесия в перемещениях для «полулинейного» материала, когда начальные напряжения в нем подчинены условиям сохранения главных направлений (п. 6).

10. Случай однородной деформации. При однородной деформации

$$x_s = a_s(1 + \delta_s{}^\circ), \qquad \mathbf{e}_s{}^\circ = \mathbf{i}_s \tag{10.1}$$

причем $\delta_s{}^\circ$, значит и тензоры B, C постоянны. В этом случае (9.8) приводится к виду «уравнений нейтрального равновесия» Саусвелла [3]. В последних величины $\partial_s{}^\circ$ отождествляются с главными напряжениями $\sigma_s{}^\circ$ в V°-объеме; это неверно, правильные соотношения должны записываться в виде

$$\sigma_s{}^\circ = \partial_s{}^\circ\frac{1 + \delta_s{}^\circ}{(1 + \delta_1{}^\circ)(1 + \delta_2{}^\circ)(1 + \delta_3{}^\circ)} \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{10.2}$$

Но, так как допускается, что тензор напряжений T° связан с относительными удлинениями $\delta_s{}^\circ$ соотношением (9.5), уравнения Саусвелла верны, если постоянные C_s в них выражать через $\delta_s{}^\circ$.

Можно представить общее решение уравнений (9.8) при однородной деформации через вектор G в виде

$$\mathbf{w} = (D_1{}^2 + D_2{}^2)\nabla\nabla\cdot\mathbf{G} - (B\cdot\nabla)\nabla\cdot\nabla^2\mathbf{G} - \nabla\times[\nabla\times(B\cdot\nabla^2\mathbf{G})] \tag{10.3}$$

Здесь $D_1{}^2$, $D_2{}^2$ — дифференциальные операторы

$$D_1{}^2 = B_1\partial_1{}^2 + B_2\partial_2{}^2 + B_3\partial_3{}^2 = (B\cdot\nabla)\cdot\nabla \qquad \left(\partial_s = \frac{\partial}{\partial a_s}\right)$$

$$D_2{}^2 = B_1B_2B_3\left(\frac{\partial_1{}^2}{B_1} + \frac{\partial_2{}^2}{B_2} + \frac{\partial_3{}^2}{B_3}\right) = B(B^{-1}\cdot\nabla)\cdot\nabla \qquad (B = B_1B_2B_3) \tag{10.4}$$

и вектор G определяется дифференциальным уравнением

$$\nabla^4 D_2^2 \mathbf{G} = 0 \tag{10.5}$$

В частности, при всестороннем равномерном сжатии $\delta_s^\circ = \delta^\circ$ имеем $\mathbf{B} = B_0\mathbf{E}$; введя в рассмотрение новый вектор $\mathbf{G}^* = -B_0 \nabla^2 \mathbf{G}$, получаем

$$\mathbf{w} = -B_0 \nabla\nabla\cdot\mathbf{G}^* + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{G}^*) = (1 - B_0)\nabla\nabla\cdot\mathbf{G}^* - \nabla^2\mathbf{G}^* \tag{10.6}$$

причем $\mathbf{G}^*$ — бигармонический вектор. Здесь по (9.5), (9.9)

$$1 - B_0 = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[1 - (1+\nu)\frac{\delta_0}{2(1+\delta_0)}\right] \tag{10.7}$$

При $\delta_0 = 0$ возвращаемся к известному решению Буссинека — Галеркина.

Решение (10.3) может быть упрощено, если представить вектор G суммой векторов $\mathbf{G}'$ и $\mathbf{G}''$, выражаемых через скаляр и соленоидальный вектор

$$\mathbf{G}' = \mathbf{B}^{-1}\cdot\nabla\varphi, \qquad \nabla^2\mathbf{G}'' = \mathbf{H}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{G}'' = 0. \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0$$

Тогда

$$\nabla\cdot\mathbf{G}' = \frac{D_\cdot^2\varphi}{B_1B_2B_3} = \Phi, \qquad \nabla\cdot\nabla^2\mathbf{G}' = \nabla^2\Phi, \qquad \nabla\times[\nabla\times(\mathbf{B}\cdot\nabla^2\mathbf{G}')] = 0$$

причем по (10.5) скаляр Φ — бигармонический. Соответствующее ему решение представляется в виде

$$\mathbf{w}' = (D_1^2 + D_2^2)\nabla\Phi - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\nabla^2\Phi \tag{10.8}$$

Второе решение определяется по вектору H

$$\mathbf{w}'' = -\nabla\times[\nabla\times(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})] = \nabla^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} - \nabla\nabla\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{10.9}$$

причем вектор H определяется уравнениями H

$$\nabla^2 D_2^2 \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \tag{10.10}$$

11. Сжатый стержень. Вертикальный стержень расположен между двумя твердыми, гладкими плитами; его боковая поверхность не нагружена. Одноосное напряженное состояние создается вертикальным смещением вниз верхней плиты ($a_3 = L$) на величину $L\delta_3^\circ$, тогда как нижняя плита ($a_3 = 0$) неподвижна. В этом состоянии $\partial_1^\circ = \partial_2^\circ = 0$ и по (9.5), (9.6)

$$\delta_3^\circ = \frac{\partial_3^\circ}{E}, \qquad \delta_1^\circ = \delta_2^\circ = -\nu\delta_3^\circ, \qquad C_1 = C_2 = C = \frac{(1+\nu)\delta_3^\circ}{2 + (1-\nu)\delta_3^\circ}, \qquad C_3 = 0$$

так что

$$B_3 = \alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \qquad B_1 = B_2 = \alpha\sigma$$

$$\sigma = \frac{2(1+\delta_3^\circ)}{2 + (1-\nu)\delta_3^\circ}, \qquad \delta_3^\circ = -\frac{2(1-\sigma)}{2 - (1-\nu)\sigma} \tag{11.1}$$

Здесь введен параметр σ; так как $-1 < \delta_3^\circ < 0$, то $0 < \sigma < 1$.

На остающейся ненагруженной боковой поверхности три краевых условия представляются в виде

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^\cdot = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}(\mathbf{w}) + 2\mu C(\omega_1 n_2 - \omega_2 n_1)\,\mathbf{i}_3 = 0 \tag{11.2}$$

На торцах стержня

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_3\cdot\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_3\cdot\mathbf{T}(\mathbf{w}) - 2\mu C(\omega_1\mathbf{i}_2 - \omega_3\mathbf{i}_1) \tag{11.3}$$

и при разыскании формы равновесия, отличной от состояния однородной деформации, но осуществляемой описанным выше способом, следует принять горизонтальные проекции этой силы и вертикальное смещение на торцах равными нулю

$$\mathbf{i}_3\cdot\dot{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i}_1 = 0, \qquad \mathbf{i}_3\cdot\dot{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i}_2 = 0, \qquad \mathbf{w} = 0$$

Это приводит к условиям (u, v, w — проекции вектора w)

$$\partial_3 u = 0, \quad \partial_3 v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } a_3 = 0,\ a_3 = L \tag{11.4}$$

автоматически выполняемым, если принять, что u, v пропорциональны косинусу, w — синусу аргумента $(n\pi/L)\,a_3$.

В решениях (10.8) — (10.10) примем

$$\Phi = \varphi(a_1, a_2)\cos\frac{n\pi}{L}a_3$$

$$H_1 = \partial_2\Psi, \quad H_2 = -\partial_1\psi, \quad H_3 = 0; \quad \nabla^2\Psi = \frac{n^2\pi^2}{L^2\sigma}\Psi(a_1, a_2)\cos\frac{n\pi}{L}a_3$$

причем выполнено условие соленоидальности вектора $\mathbf{H}$, а функции $\varphi_n(a_1, a_2)$ и $\psi_n(a_1, a_2)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^2\varphi(a_1, a_2) = 0, \qquad \left(\nabla_1^2 - \sigma\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\psi_n(a_1, a_2) = 0$$
$$(\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2) \tag{11.5}$$

Выражения перемещений (10.8), (10.9) записываются в виде

$$\begin{aligned} u &= \left\{\left[\alpha\sigma\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(1-\sigma+\alpha\sigma^2)\right]\partial_1\varphi_n + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\partial_2\psi_n\right\}\cos\frac{n\pi}{L}a_3 \\ v &= \left\{\alpha\sigma\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(1-\sigma+\alpha\sigma^2)\right]\partial_2\varphi_n - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\partial_1\psi_n\Big\}\cos\frac{n\pi}{L}a_3 \\ w &= \left[(1-\sigma-\alpha\sigma)\nabla_1^2 + \alpha\sigma^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right]\frac{n\pi}{L}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{L}a_3 \end{aligned} \tag{11.6}$$

и вычисляемое по ним объемное расширение ϑ представляется равенством

$$\vartheta = \alpha\sigma\frac{n^2\pi^2}{L^2}(1-\sigma)\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\varphi_n\cos\frac{n\pi}{L}a_3$$

Краевые условия (11.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & n_1\frac{\nu}{1-2\nu}\sigma(1-\sigma)\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\varphi_n + \frac{\partial}{\partial n}\left[\alpha\sigma\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(1-\sigma)(1-\alpha\sigma)\right]\partial_1\varphi_n + \frac{n^2\pi^2}{2L^2}\left(\frac{\partial}{\partial n}\partial_2\psi + \frac{\partial}{\partial s}\partial_1\psi\right) = 0 \\ & n_2\frac{\nu}{1-2\nu}\sigma(1-\sigma)\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\varphi_n + \frac{\partial}{\partial n}\left[\alpha\sigma\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(1-\sigma)(1-\alpha\sigma)\right]\partial_2\varphi_n + \frac{n^2\pi^2}{2L^2}\left(\frac{\partial}{\partial s}\partial_2\psi - \frac{\partial}{\partial n}\partial_1\psi\right) = 0 \end{aligned} \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[(\sigma - 2\alpha\sigma - \sigma^2)\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) + 2(1-\sigma)(1-\alpha\sigma)\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right]\varphi_n - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(2-\sigma)\frac{\partial\psi_n}{\partial s} = 0$$

Бифуркационными будут значения параметра σ в интервале (0.1), для которых однородная краевая задача (11.5), (11.7), имеет нетривиальные решения. Для таких σ наряду с исходной формой равновесия ($\mathbf{w} = 0$) существуют близкие к ней формы.

12. Стержень круглого поперечного сечения [2]. Решения уравнений (11.5) разыскиваются в виде

$$\varphi_n(a_1, a_2) = R(x)\cos m\theta, \quad \psi_n(a_1, a_2) = S(x\sqrt{\sigma})\sin m\theta \quad (x = n\pi r/L)$$

причем $R(x)$, $S(x\sqrt{\sigma})$ выражаются через бесселевы функции, а переменная θ исключается из краевых условий (11.7).

В частности, для осесимметричной деформации $m = 0$ (описывающей при $n = 1$ явление «бочкообразования») полого цилиндра

$$R = C_1I_0(x) + C_2xI_1(x) + D_1K_0(x) + D_2xK_1(x)$$
$$S = C_3I_0(x\sqrt{\sigma}) + D_3K_0(x\sqrt{\sigma})$$

причем функции φ_n, ψ_n отделяются в краевых условиях.

При $m = 1$ (изгибная форма) для сплошного цилиндра будет

$$R = C_1 I_1(x) + C_2 x I_0(x), \qquad S = C_3 I_1(x\sqrt{\sigma})$$

Краевые условия записываются в виде $x = x_0 = n\pi r_0/L$

$$\frac{\nu}{2(1-\nu)}\sigma(1-\sigma)L_1(R) + \frac{d}{dx}[\alpha\sigma L_1 - (1-\sigma)(1-\alpha\sigma)]R'(x) + \frac{1}{x}\left(S' - \frac{S}{x}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\alpha\sigma L_1 - (1-\sigma)(1-\alpha\sigma)]\frac{1}{x}R(x) + \frac{1}{2}\left(S' - \frac{S}{x}\right)' = 0$$

$$\frac{d}{dx}[(\sigma - 2\alpha\sigma - \sigma^2)L_1 + 2(1-\sigma)(1-\alpha\sigma)]R - (2-\sigma)\frac{S}{x} = 0$$

$$\left[L_1(f) = f'' + \frac{1}{x}f' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)f\right]$$

Бифуркационные значения параметра $\sigma = \sigma(x_0, \nu)$ определяются корнями определителя однородной системы линейных уравнений для постоянных C_1, C_2, C_3. Результаты численных расчетов представлены в [2] графиками $-\delta_3{}^\circ$ для $0 < x < 4$ и для $\nu = 0.2, 0.3, 0.4, 0.45$.

13. Бифуркация равновесия сферы, сжатой равномерно распределенным наружным давлением [2]. Центрально симметричное состояние равновесия рассмотрено в п. 6; близкие к нему осесимметричные формы равновесия получаются положением перемещения $\eta\mathbf{w}(R, \vartheta)$, не зависящего от координаты λ (долготы)

$$\mathbf{w}(R, \vartheta) = w_R(R, \vartheta)\mathbf{e}_R + w_\vartheta(R, \vartheta)\mathbf{e}_\vartheta$$

Отличен от нуля только компонент ω_λ линейного вектора поворота

$$2\omega_\lambda = (\nabla\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial w_\vartheta}{\partial R} - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial w_R}{\partial\vartheta} - w_\vartheta\right)$$

По (9.3) имеем

$$\dot{\mathrm{D}} = \mathrm{T}(\mathbf{w}) + 2\psi(R)\,\omega_\lambda(\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta\mathbf{e}_R)$$

Здесь

$$\psi(R) = \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_R{}^\circ} + \sqrt{G_\vartheta{}^\circ}} + \mu = \frac{\lambda\nabla\cdot\mathbf{u} - 2\mu}{\dfrac{f(R)}{R} + f'(R)} + \mu$$

и по (6.4) — (6.6)

$$\psi(R) = (3\lambda + 2\mu)C_1\left(1 - \frac{R_1{}^3}{4R^3}\right)\left(2(C_1+1) - \frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}C_1\frac{R^3}{R_1{}^3}\right)^{-1}$$

причем C_1 определяется через давление p_0 на наружной поверхности сферы по (6.7).

Уравнения равновесия (8.10) в объеме здесь записываются в виде

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{w}}{\partial R} - \frac{2g(R)}{R\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\omega_\lambda\sin\vartheta = 0 \tag{13.1}$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{w}}{R\partial\vartheta} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}[g(R)R\omega_\lambda] = 0; \quad [g(R) = \psi(R) + \mu]$$

Краевые условия на наружной $R = R_0$ и внутренней $R = R_1$ поверхностях сферы по (8.11) будут

$$R = R_0: \left[\lambda + p_0\frac{f(R)}{R}\right]\nabla\cdot\mathbf{w} + \left[2\mu - p_0\frac{f(R)}{R}\right]\frac{\partial w_R}{\partial R} = 0$$

$$2g(R)\omega_\lambda + \left(2\mu - p_0\frac{f(R)}{R}\right)\left(\frac{\partial w_R}{\partial\vartheta} - w_\vartheta\right) = 0 \tag{13.2}$$

$$R = R_1: \lambda\nabla\cdot\mathbf{w} + 2\mu\frac{\partial w_R}{\partial R} = 0, \quad g(R)\omega_\lambda + \mu\left(\frac{\partial w_R}{\partial\vartheta} - w_\vartheta\right) = 0 \tag{13.3}$$

Условие существования нетривиальных решений этой однородной краевой задачи определяют бифуркационные значения давления p_0.

Решение, конечное в полюсах сферы, разыскивается в виде

$$w_R = a_n(R)\, P_n(\cos\vartheta), \qquad w_\vartheta = b_n(R)\, \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}\sin\vartheta$$

и используя известные свойства полиномов Лежандра, получаем

$$\nabla\cdot\mathbf{w} = \left[a_n' + 2\frac{a_n}{R} + n(n+1)\frac{b_n}{R}\right] P_n(\cos\vartheta) = \varphi_n(R)\, P_n(\cos\vartheta)$$

$$2\omega_\lambda = \left(b_n' + \frac{a_n + b_n}{R}\right)\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}\sin\vartheta = \chi_n(R)\,\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}\sin\vartheta \qquad (13.4)$$

Переменные R, ϑ разделяются в уравнениях равновесия (13.1), приводящихся к системе линейных дифференциальных уравнений

$$(\lambda + 2\mu)\, R^2\varphi_n' - Rg(R)\, n(n+1)\,\chi_n(R) = 0$$

$$(\lambda + \mu)\quad \varphi_n(R) - [Rg(R)\,\chi_n(R)]' = 0$$

общее решение которой записывается в виде

$$\varphi_n(R) = (n+1)\, A_n R^n - \frac{nB_n}{R^{n+1}}, \qquad \chi_n(R) = \frac{\lambda + 2\mu}{g(R)}\left(A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}}\right) \qquad (13.5)$$

Заменив здесь φ_n, χ_n их выражениями по (13.4), после еще одного интегрирования найдем

$$a_n(R) = -nC_n^* R^{n-1} + (n+1)\frac{D_n^*}{R^{n+2}}, \qquad b_n(R) = C_n^* R^{n-1} + \frac{D_n^*}{R^{n+2}} \qquad (13.6)$$

причем

$$C_n^* = C_n + \frac{1}{2n+1}\int_{R_1}^{R} [(n+1)\chi_n - \varphi_n]\,\frac{dR}{R^{n-1}}$$

$$D_n^* = D_n + \frac{1}{2n+1}\int_{R_1}^{R} (\varphi_n + n\chi_n)\, R^{n+2}\,dR \qquad (13.7)$$

Переменные R и ϑ отделяются также в линейных краевых условиях (13.2), (13.3); подставив в них найденные значения a_n, b_n, получим линейную однородную систему четырех уравнений для постоянных A_n, B_n, C_n, D_n. Бифуркационные значения p_0 определяются условием обращения в нуль ее определителя.

Аналогично рассматривается задача о бифуркации осесимметричной формы равновесия полого кругового цилиндра, сжатого равномерно распределенным наружным давлением [2].

Поступила 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. J o h n F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic Type. Commun. pure and appl. Math., 1960, vol. 13, No. 2, p. 239—296.
2. S e n s e n i g C. B. Instability of thick elastic solids. Commun. pure and appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4, p. 451—491.
3. S o u t h w e l l R. V. On the general theory of elastic stability. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1913, vol. 213, p. 187—244. Изложение этой работы дано в книге Бицено К. Б. и Граммель Р. Техническая динамика, т. I. М., Гостехиздат, 1950.