Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

РАСЧЕТ НЕТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В. Висарион, К. Стэнеску

(Бухарест)

Предлагается метод расчета нетонких оболочек постоянной толщины $2h$, основанный на некоторых свойствах полиномов Лежандра.

1. Для случая, когда срединная поверхность оболочки замкнута, доказывается, что трехмерная задача теории упругости о построении напряженно-деформированного состояния такой оболочки разделяется на две задачи. Пусть оболочка отнесена к криволинейным координатам θ^α, θ^3 (во всей работе считается, что греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские — значения 1, 2, 3).

Тогда первая из упомянутых задач будет заключаться в построении напряженно-деформированного состояния, в котором перемещения линейно меняются по θ^3. Она будет называться линейной по толщине задачей.

Вторая задача состоит в построении напряженно-деформированного состояния, характеризующегося тем, что в нем в любом нормальном к срединной поверхности элементе сечения равнодействующая и результирующий момент будут равны нулю. Это требование аналогично условиям, характеризующим так называемый погранслой. Поэтому вторую задачу будем называть задачей о псевдо-погранслое. Решение обеих задач в отдельности должно быть точным решением трехмерных уравнений теории упругости, а в сумме они должны давать решение исходной задачи.

В оболочке с незамкнутой срединной поверхностью останутся не выполненными условия на боковых поверхностях. Для устранения этих неувязок надо использовать еще и погранслои.

Ниже используются разложения в ряды ортогональных полиномов Лежандра напряжений, деформаций и перемещений вида

$$\sigma^{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{(n)}^{ij} P_n\left(\frac{\theta^3}{h}\right), \qquad \gamma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{ij}^{(n)} P_n\left(\frac{\theta^3}{h}\right), \qquad u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^{(n)} P_n\left(\frac{\theta^3}{h}\right) \quad (1.1)$$

Здесь $P_n\ (\theta^3/h)$ — полином Лежандра порядка n.

2. Назовем линейной по толщине задачу теории упругости такую, решение которой обладает следующими свойствами:

(а) удовлетворяет соотношениям деформации — перемещения, а также закону Гука пространственной теории упругости;

(б) отвечает граничным напряжениям на поверхностях S_+ и S_- и массовым силам, истинные распределения которых могут быть заменены любыми другими распределениями при условии, что соответствующие равнодействующая и результирующий момент на любом нормальном элементе оболочки остаются неизменными (эти распределения граничных напряжений и массовых сил называем эквивалентными вспомогательными распределениями);

(в) содержит достаточно произволов для удовлетворения условий на краевой нормальной поверхности $\theta^1 = ct$, для следующих составляющих в разложениях Лежандра напряжений или перемещений

$$\sigma_{(0)}{}^{11},\ \sigma_1{}^{11},\ \sigma_{(0)}{}^{12},\ \sigma_{(1)}{}^{12},\ \sigma_{(0)}{}^{13},\ u_1{}^{(0)},\ u_1{}^{(1)},\ u_2{}^{(0)},\ u_2{}^{(1)},\ u_3{}^{(0)}$$

Пользуясь обозначениями работы [1], рассмотрим составляющие вектора упругого перемещения в виде

$$u_\alpha = u_\alpha{}^{(0)} + xu_\alpha{}^{(1)}, \qquad u_3 = u_3{}^{(0)} \tag{2.1}$$

где $u_\alpha^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$, $u_3^{(0)}$ — функции от θ^α, а

$$x = \theta^3 / h \tag{2.2}$$

Исходя из представлений (2.1), можно записать компоненты деформации в виде конечных разложений Лежандра

$$\gamma_{ij} = \sum_{n=0}^{N} \gamma_{ij}^{(n)} P_n(x) \tag{2.3}$$

Коэффициенты этих разложений имеют вид

$$2\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = u_\alpha{}^{(0)}|_\beta + u_\beta{}^{(0)}|_\alpha - 2b_{\alpha\beta}u_3{}^{(0)} - {}^1/_3 h(b_\beta{}^\lambda u_\lambda{}^{(1)}|_\alpha + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda{}^{(1)}|_\beta) \tag{2.4}$$

$$2\gamma_{\alpha\beta}^{(1)} = u_\alpha{}^{(1)}|_\beta + u_\beta{}^{(1)}|_\alpha - h(b_\beta{}^\lambda u_\lambda{}^{(0)}|_\alpha + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda{}^{(0)}|_\beta) + h(b_\beta{}^\lambda b_{\lambda\alpha} + b_\alpha{}^\lambda b_{\lambda\beta})u_3{}^{(0)}$$

$$2\gamma_{\alpha\beta}^{(2)} = -{}^2/_3 h(b_\beta{}^\lambda u_\lambda{}^{(1)}|_\alpha + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda{}^{(1)}|_\beta)$$

$$2\gamma_{\alpha\beta}^{(n)} = 0 \quad (n > 2), \qquad 2\gamma_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{\partial u_3{}^{(0)}}{\partial\theta^\alpha} + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda{}^{(0)} + \frac{1}{h}u_\alpha{}^{(1)}$$

$$2\gamma_{\alpha 3}^{(n)} = 0 \quad (n > 0), \qquad 2\gamma_{33}^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Принимается обычное правило суммирования по повторяющимся индексам; вертикальные черточки соответствуют ковариантному дифференцированию в метрике срединной поверхности.

Пользуясь тем, что $\gamma_{33} = 0$ в силу (2.4), запишем физические соотношения теории упругости так:

$$\sigma^{\omega\varphi} = E^{\omega\varphi\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}, \qquad \sigma^{\varphi 3} = E^{\varphi 3\alpha 3}\gamma_{\alpha 3} \tag{2.5}$$

Здесь

$$E^{\omega\varphi\alpha\beta} = \mu(\delta_\lambda{}^\varphi - xhb_\lambda{}^\varphi)\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}\frac{1}{g^2}\left(G^{\omega\alpha}G^{\lambda\beta} + G^{\omega\beta}G^{\lambda\alpha} + \frac{2\eta}{1-2\eta}G^{\omega\lambda}G^{\alpha\beta}\right)$$

$$E^{\varphi 3\alpha 3} = 2\mu\left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}\frac{1}{g^2}G^{\varphi\alpha}G^{33}$$

В последних равенствах через G^{ij} обозначены алгебраические дополнения для g_{ij} в определителе $g = |g_{ij}|$. Они будут полиномами от x.

Введем обозначения

$$\frac{2}{2m+1}E_{(n),(m)}^{\omega\varphi\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)E^{\omega\varphi\alpha\beta}dx$$

$$\frac{2}{2m+1}E_{(n),(m)}^{\omega 3\alpha 3} = \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)E^{\omega 3\alpha 3}dx \tag{2.6}$$

где $E_{(n),(m)}^{\omega\varphi\alpha\beta}$, $E_{(n),(m)}^{\omega 3\alpha 3}$ коэффициенты разложений Лежандра функций $P_n(x)E^{\omega\varphi\alpha\beta}$, $P_n(x)E^{\omega 3\alpha 3}$, соответственно, и заметим, что интегралы (2.6) вычисляются непосредственно, причем в них входят только рациональные функции от x, в знаменателе которых содержится выражение

$$(g/a)^{3/2} = (1 - hx\varepsilon_\lambda{}^\lambda + h^2x^2K)^3$$

Следовательно

$$P_n(x)E^{\omega\varphi\alpha\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{(n),(m)}^{\omega\varphi\alpha\beta} P_m(x), \qquad P_n(x)E^{\omega 3\alpha 3} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{(n),(m)}^{\omega 3\alpha 3} P_m(x) \tag{2.7}$$

При помощи этих формул можно определить коэффициенты разложений Лежандра для напряжений

$$\sigma^{\omega\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{(n)}^{\omega\varphi} P_n(x), \qquad \sigma^{\varphi 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{(n)}^{\varphi 3} P_n(x) \tag{2.8}$$

так как согласно (2.6), (2.7)

$$\sigma_{(n)}^{\omega\varphi} = \sum_{q=0}^{2} E_{(q),(n)}^{\omega\varphi\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{(q)}, \qquad \sigma_{(n)}^{\varphi 3} = E_{(0),(n)}^{\varphi 3\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}^{(0)} \tag{2.9}$$

Уравнения равновесия трехмерной теории упругости записываются так

$$\sigma^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha{}^\beta \sigma^{\alpha 3} + \frac{\partial \sigma^{3\beta}}{\partial \theta^3} + F^\beta = 0, \quad \sigma^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \theta^3} + F^3 = 0 \tag{2.10}$$

Из условий ортогональности полиномов Лежандра следует, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} xP_n(x)\,dx = 0 \qquad (n \geqslant 2)$$

Поэтому в разложениях (2.8) члены с индексом n, большим единицы, соответствуют некоторым самоуравновешенным по толщине распределениям напряжений. Эти члены в решении линейной задачи можно отбросить.

Тогда из (2.8) и (2.10) получим

$$2\left(\sigma_{(0)}^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha{}^\beta \sigma_{(0)}^{\alpha 3}\right) + \left(\frac{\sigma^{3\beta}(1) - \sigma^{3\beta}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} P_0 F^\beta dx\right) = 0$$

$$2\left(\sigma_{(0)}^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta}\sigma_{(0)}^{\alpha\beta}\right) + \left(\frac{\sigma^{33}(1) - \sigma^{33}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} P_0 F^3 dx\right) = 0$$

$$\frac{2}{3}\left(\sigma_{(1)}^{\alpha\beta}|_\alpha - \frac{3}{h}\sigma_{(0)}^{\beta 3}\right) + \left(\frac{\sigma^{3\beta}(1) + \sigma^{3\beta}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} P_1(x) F^\beta dx\right) = 0 \tag{2.11}$$

Опираясь на свойства решения линейной по толщине задачи, замечаем, что составляющие R^β, R^3 и C^β равнодействующей силы и результирующего момента имеют вид

$$R^\beta = h\left(\frac{\sigma^{3\beta}(1) - \sigma^{3\beta}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} F^\beta dx\right)$$

$$R^3 = h\left(\frac{\sigma^{33}(1) - \sigma^{33}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} F^3 dx\right)$$

$$C^\beta = h^2\left(\frac{\sigma^{3\beta}(1) + \sigma^{3\beta}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} xF^\beta dx\right)$$

Из этих соотношений вытекает, что первые коэффициенты разложений Лежандра для массовых сил выражаются такими формулами:

$$F_{(0)}^\beta = \frac{1}{2h}[R^\beta - (\sigma^{3\beta}(1) - \sigma^{3\beta}(-1))], \qquad F_{(0)}{}^3 = \frac{1}{2h}[R^3 - (\sigma^{33}(1) - \sigma^{33}(-1))]$$

$$F_{(1)}^\beta = \frac{3}{2h^2}[C^\beta - h(\sigma^{3\beta}(1) + \sigma^{3\beta}(-1))] \tag{2.12}$$

в которых граничные значения $\sigma^{3\beta}$, σ^{33} считаются известными.

При помощи этих равенств систему уравнений (2.11) можно записать в виде

$$\sigma_{(0)}^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha{}^\beta\sigma_{(0)}^{\alpha 3} + \frac{1}{2h}R^\beta = 0 \tag{2.13}$$

$$\sigma_{(0)}^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta}\sigma_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2h}R^3 = 0, \qquad \sigma_{(1)}^{\alpha\beta}|_\alpha - \frac{3}{h}\sigma_{(0)}^{\beta 3} + \frac{3}{2h^2}C^\beta = 0$$

Эти равенства представляют собой систему уравнений равновесия линейной по толщине задачи. Соответствующие физические уравнения получаются из (2.9)

$$\sigma_{(0)}^{\alpha\beta} = \sum_{q=0}^{2} E_{(q),(0)}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^{(q)}, \qquad \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} = \sum_{q=0}^{2} E_{(q),(1)}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^{(q)}, \qquad \sigma_{(0)}^{\alpha 3} = E_{(0),(0)}^{\alpha 3\lambda 3}\gamma_{\lambda 3}^{(0)}$$

Здесь деформации определяются геометрическими соотношениями (2.4) линейной по толщине задачи. Выразив в уравнениях равновесия (2.13) напряжение через перемещения, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными $u_\alpha^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$, $u_3^{(0)}$.

Через неизвестные этой системы пространственные составляющие u_α, u_3 перемещений определятся из (2.1).

Из геометрических и физических уравнений трехмерной теории упругости определяются напряжения σ^{ij}, из уравнений равновесия получим окончательные выражения для массовых сил

$$F_{(l)}^\beta = -\sigma^{\alpha\beta}|_\alpha + b_\alpha{}^\beta\sigma^{\alpha 3} - \frac{\partial\sigma^{3\beta}}{\partial\theta^3}, \qquad F_{(l)}^3 = -\sigma^{\alpha 3}|_\alpha - b_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial\theta^3}$$

которые согласно (2.12) удовлетворяют интегральным условиям линейной по толщине задачи. Полученная система уравнений линейной по толщине задачи позволяет удовлетворить пяти краевым условиям, отвечающим свойству (в) линейной по толщине задачи.

Так как перемещения известны, получим и граничные напряжения, соответствующие линейной по толщине задаче $\sigma^{3i}_{(l)}(\theta^\lambda, \pm 1)$, которые, очевидно, вообще говоря, не совпадут с истинными. Решение задачи о псевдопогранслое позволит также исправить и эти граничные данные.

Можно показать, что если не учитывать напряженно-деформированных состояний с показателем изменяемости большим $^1/_2$ и отбросить члены, сохраняемые для выполнения пятого краевого условия, то с погрешностью h/R по сравнению с единицей получится вариант классической теории.

3. Задачи псевдо-погранслоя должны удовлетворить следующим условиям:

(а) напряжения, соответствующие поправкам должны, удовлетворить на S_+ и S_- условиям

$$\sigma^{3i}(\theta^\lambda, \pm 1) - \sigma^{3i}_{(l)}(\theta^\lambda, \pm 1) = \sigma^{3i}_{(\lambda)}(\theta^\lambda, \pm 1)$$

(б) внутренние напряжения, соответствующие любому элементу сечения, нормальному к срединной поверхности, должны иметь нулевую равнодействующую и результирующий момент, отсюда следует, что $\sigma_{(0)}{}^{\alpha i}$ и $\sigma_{(1)}{}^{\alpha\beta}$ равны нулю;

(в) равным образом в разложениях Лежандра для перемещений должны выполняться требования $u_i{}^{(0)} = 0$, $u_\alpha{}^{(1)} = 0$;

(г) массовые силы, соответствующие поправочной задаче псевдо-погранслоя, представляют собой разность между истинными массовыми силами и массовыми силами $F_{(l)}{}^i$, получающимися из решения задачи линейной по толщине.

Задача псевдо-погранслоя недоопределена, так как не требуется выполнять условия на краевой нормальной поверхности.

Из свойств линейной по толщине задачи и задачи погранслоя вытекает, что равнодействующая и результирующий момент как поверхностных, так и массовых сил должны равняться нулю.

Построение решения задачи псевдо-погранслоя разбиваем на два этапа.

Первый этап состоит в определении частного решения пространственных уравнений теории упругости, удовлетворяющего условиям (а), (б), (в) п. 3.

Второй этап заключается также в решении недоопределенной задачи. Для нее на S_+ и S_- ставятся однородные граничные условия, чтобы не нарушить условие (г), выполненное на первом этапе. Массовые силы (статически эквивалентные нулю) должны равняться разности между действительными массовыми силами и массовыми силами, получающимися при решении линейной по толщине задачи и на первом этапе решения задачи псевдо-погранслоя.

Пользуясь тем, что в задаче псевдо-погранслоя не обязательно удовлетворение условий на краевой нормальной поверхности, примем, что срединная поверхность отнесена к линиям кривизны.

Тогда принятая координатная система будет триортогональной.

3.1. *Первый этап решения задачи псевдо-погранслоя.* Рассмотрим граничные условия на S_+ и S_-, сформулировав их так:

$$\tau_{13}(\pm h) = \frac{H_1^-(\pm h)\, H_2^-(\pm h)\, t_1{}^\pm(\theta^1, \theta^2)}{H} \qquad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\tau_{33}(\pm h) = \frac{H_1^-(\pm h)\, H_2^-(\pm h)\, s^\pm(\theta^1, \theta^2)}{H}$$

Здесь $\tau_{13}(\pm h)$, $\tau_{23}(\pm h)$, $\tau_{33}(\pm h)$ — известные функции, представляющие собой поправочные граничные напряжения.

Введем обозначения

$$H_1(\theta^3) = A_1\left(1 + \frac{\theta^3}{R_1}\right), \qquad H_1^-(\theta^3) = A_1\left(1 - \frac{\theta^3}{R_1}\right) \qquad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$H = A_1 A_2 (1 - h^2/R^2{}_1)^{1/2} (1 - h^2/R^2{}_2)^{1/2}$$

Для дальнейшего заметим, что любые граничные условия можно представить как суперпозицию граничных условий соответствующих

$$t_1^{\pm}(\theta^1, \theta^2) = t_1(\theta^1, \theta^2), \; s^{\pm}(\theta^1, \theta^2) = \pm s(\theta^1, \theta^2) \tag{3.1}$$

$$t_1^{\pm}(\theta^1, \theta^2) = \pm t_1(\theta^1, \theta^2), \; s^{\pm}(\theta^1, \theta^2) = s(\theta^1, \theta^2) \tag{3.2}$$

Ранее сформулированное требование, чтобы напряжения были статически эквивалентными нулю на любом нормальном к срединной поверхности сечения, будет обеспечиваться, если наложить условия

$$T_1 = 0, \quad S_{12} = 0, \quad N_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad H_{12} = 0 \qquad (1 \leftrightarrow 2)$$

Здесь слева стоят усилия и моменты. Выразив их через внутренние напряжения трехмерной среды, занятой оболочкой, будем иметь

$$\int_{-h}^{+h} H_2 \tau_{11} d\theta^3 = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \theta^3 H_2 \tau_{11} d\theta^3 = 0, \quad \int_{-h}^{+h} H_2 \tau_{12} d\theta^3 = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} \theta^3 H_2 \tau_{12} d\theta^3 = 0, \quad \int_{-h}^{+h} H_2 \tau_{13} d\theta^3 = 0 \qquad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.3}$$

Замечаем, что эти условия удовлетворяются, если для перемещений принять разложения вида

$$v_1 = H_1^2 H_2^2 v_1^*, \qquad v_1^* = \sum_{n=6}^{\infty} V_1^{(n)}(\theta^1, \theta^2) P_n(x) \qquad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.4}$$

$$v_3 = H_1^2 H_2^2 v_3^*, \qquad v_3^* = \sum_{n=6}^{\infty} V_3^{(n)}(\theta^1, \theta^2) P_n(x)$$

Здесь $V_1^{(n)}(\theta^1, \theta^2)$, $V_2^{(n)}(\theta^1, \theta^2)$, $V_3^{(n)}(\theta^1, \theta^2)$ — произвольные функции.

Примем для τ_{13}, τ_{23}, τ_{33} следующие выражения, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\tau_{13} = \frac{H_1^- H_2^- P_K(x)\, t_1(\theta^1, \theta^2)}{H} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi(\theta^1, \theta^2, x)}{\partial \theta^1} + \frac{H_1}{h} \frac{\partial \Psi_1(\theta^1, \theta^2, x)}{\partial x} \qquad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.5}$$

$$\tau_{33} = \frac{H_1^- H_2^- P_Q(x)\, s(\theta^1, \theta^2)}{H} + S(\theta^1, \theta^2, x) \tag{3.6}$$

причем функции

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \quad S$$

должны быть равными нулю на S_+ $(x = 1)$ и S_- $(x = -1)$

Степень K — четная и Q — нечетная для условий вида (3.1), и, наоборот, для условий вида (3.2).

Из геометрических и физических соотношений следует:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial \theta^1}+\frac{H_1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_1}{H_1}\right)=\frac{2(1+\nu)}{E}\left[\frac{H_1^-H_2^-P_K(x)\,t_1(\theta^1,\theta^2)}{H}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^1}+\frac{H_1}{h}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right]\qquad (1\leftrightarrow 2)\qquad (3.7)$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial v_3}{\partial x}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2v_1}{\partial \theta^1}+\frac{\partial H_1v_2}{\partial \theta^2}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{hH_1H_2}\frac{\partial H_1H_2}{\partial x}v_3=$$

$$=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left[\frac{H_1^-H_2^-P_Q(x)\,s(\theta^1,\theta^2)}{H}+S\right]\qquad (3.8)$$

Соотношение (3.7) выполняется, если

$$v_1=\frac{2(1+\nu)}{E}H_1\left(\frac{ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\int_0^x\frac{H_1^-H_2^-P_k(x)}{H_1}dx+\Psi_1(\theta^1,\theta^2,x)\right)\qquad (1\leftrightarrow 2)\qquad (3.9)$$

$$v_3=\frac{2(1+\nu)}{E}\Phi(\theta^1,\theta^2,x)$$

а условие

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^1}\right|_{x=\pm 1}=0\qquad (1\leftrightarrow 2)$$

будет удовлетворено, если

$$v_3^*=\Lambda_1(\theta^1,\ \theta^2)(P_9(x)-P_7(x))+\Lambda_2(\theta^1,\ \theta^2)\ (P_8(x)-P_6(x))$$

Таким образом, получим

$$\Phi=\frac{Ev_3}{2(1+\nu)}=\qquad (3.10)$$

$$=\frac{E}{2(1+\nu)}H_1^2H_2^2\left[\Lambda_1(\theta^1,\theta^2)(P_9(x)-P_7(x))+\Lambda_2(\theta^1,\theta^2)(P_8(x)-P_6(x))\right]$$

При помощи разложений (3.4) и формул (3.9) получим

$$\Psi_1=-\frac{ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\int_0^x\frac{H_1^-H_2^-P_k(x)}{H_1}dx+$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}H_1H_2^2\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n(x)\qquad (1\leftrightarrow 2)\qquad (3.11)$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворить упомянутым выше условиям

$$\left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right|_{x=\pm 1}=0\qquad (1\leftrightarrow 2)\qquad (3.12)$$

а τ_{13}, τ_{23}, заданные в виде (3.5), должны удовлетворять последним условиям (3.3).

Выполнив соответствующую подстановку, учитывая (3.10) и приняв $k\geqslant 4$ в (3.11), получим

$$\int_{-1}^{+1}H_1H_2\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}dx=0\qquad (1\leftrightarrow 2)\qquad (3.13)$$

Согласно (3.11) из (3.13) будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} H_1H_2\left[-\frac{ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\frac{H_1^-H_2^-}{H_1}P_K(x)+\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial(H_1H_2^2)}{\partial x}\times\right. \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

$$\left.\times\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n(x)+\frac{E}{2(1+\nu)}H_1H_2^2\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n'(x)\right]dx=0$$

или

$$\int_{-1}^{+1} H_1^2H_2^3\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n'(x)\,dx=0 \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

Интегрируя по частям, получим эквивалентные условия

$$H_1^2H_2^3\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n(x)\Big|_{x=-1}^{x=1}=0 \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

Они будут удовлетворены, если принять

$$\sum_{n=6}^{\infty}V_1^{(n)}(\theta^1,\theta^2)P_n(x)=$$

$$=C_{v_1}(\theta^1,\theta^2)(P_9(x)-P_7(x))+D_{v_1}(\theta^1,\theta^2)(P_8(x)-P_6(x)) \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

Поэтому, пользуясь (3.11), получим для функций Ψ_1, Ψ_2 формулы:

$$\Psi_1=-\frac{ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\int_0^x\frac{H_1^-H_2^-P_K(x)}{H_1}dx+ \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}H_1H_2^2\left[C_{v_1}(\theta^1,\theta^2)(P_9(x)-P_7(x))+D_{v_1}(\theta^1,\theta^2)(P_8(x)-P_6(x))\right]$$

Условия (3.12) позволяют определить функции

$$C_{v_1}(\theta^1,\theta^2),\ D_{v_1}(\theta^1,\theta^2),\ C_{v_2}(\theta^1,\theta^2),\ D_{v_2}(\theta^1,\theta^2)$$

Применяя формулы

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x),\quad P_n(\pm1)=(\pm1)^n$$

получим систему

$$17C_{v_1}(\theta^1,\theta^2)+15D_{v_1}(\theta^1,\theta^2)=\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\left(\frac{H_1^-H_2^-}{H_1^2H_2^2}\right)_{x=1} \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

$$17C_{v_1}(\theta^1,\theta^2)-15D_{v_1}(\theta^1,\theta^2)=\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{(-1)^K ht_1(\theta^1,\theta^2)}{H}\left(\frac{H_1^-H_2^-}{H_1^2H_2^2}\right)_{x=-1}$$

Таким образом, функции Ψ_1, Ψ_2 определены.

Формула (3.8) позволяет найти функции $S(\theta^1,\theta^2,x)$ и из условий

$$S(\theta^1,\theta^2,\pm1)=0$$

получается система, определяющая функции $\Lambda_1(\theta^1, \theta^2)$ и $\Lambda_2(\theta^1, \theta^2)$

$$17\Lambda_1(\theta^1, \theta^2) + 15\Lambda_2(\theta^1, \theta^2) = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{s(\theta^1, \theta^2)}{H} \left(\frac{H_1^- H_2^-}{H_1^2 H_2^2}\right)_{x=1}$$

$$(Q \geqslant 0)$$

$$17\Lambda_1(\theta^1, \theta^2) - 15\Lambda_2(\theta^1, \theta^2) = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{(-1)^Q s(\theta^1, \theta^2)}{H} \left(\frac{H_1^- H_2^-}{H_1^2 H_2^2}\right)_{x=-1}$$

Таким образом, определены разложения v_1^*, v_2^*, v_3^* и получены перемещения v_1, v_2, v_3. Построены также и напряжения τ_{13}, τ_{23}, τ_{33}, которые будут удовлетворять условиям типа (3.1) или (3.2) в зависимости от выбора K и Q в формулах (3.5), (3.6).

Из геометрических и физических соотношений дифференцированием находятся и остальные напряжения τ_{11}, τ_{22}, τ_{33}, а из уравнений равновесия находим массовые силы.

Таким образом, эффективно построено частное решение, отвечающее первому этапу задачи псевдо-погранслоя.

3.2. *Второй этап решения задачи псевдо-погранслоя.*

Соответствующее этому этапу решение будет построено для частного случая плоской пластинки. Для перемещений предполагаемых непрерывными при $|x| < 1$ принимаются разложения в ряд типа

$$v = v_{1,0}{}^{\circ} P_0{}^{\circ} + v_{1,1}{}^{\circ} P_1{}^{\circ} + v_{1,1}{}^{1} P_1{}^{1} + v_{1,2}{}^{1} P_2{}^{1} + \sum_{n=2}^{\infty} v_{1,n}{}^{2} P_n{}^{2} \tag{3.14}$$

$$P_K{}^{\circ} = P_K, \qquad P_K{}^{1} = \frac{P_{K+1}{}^{\circ} - P_{K-1}{}^{\circ}}{2K+1}, \qquad P_K{}^{2} = \frac{P_{K+1}{}^{1} - P_{K-1}{}^{1}}{2K+1} \tag{3.15}$$

Замечая, что

$$\frac{dP_K{}^2}{dx} = P_K{}^1, \qquad \frac{dP_K{}^1}{dx} = P_K{}^{\circ} = P_K, \qquad P_K{}^2(\pm 1) = P_K{}^1(\pm 1) = 0$$

и подставляя (3.15) в (3.14), получим

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} v_{1,n} P_n(x) \tag{3.16}$$

Из эквивалентности разложений вида (3.14), (3.16), учитывая функциональные свойства полиномов Лежандра, получим, что ряд (3.14) и ряд (3.16) в каждой внутренней точке интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеют одно и то же значение. При $x = \pm 1$ коэффициенты $v_{1,0}{}^{\circ}, v_{1,1}{}^{\circ}, v_{1,1}{}^{1}, v_{1,2}{}^{1}$ можно определить так, чтобы ряд (3.14) принял значения $v_1(\pm 1)$, а его производная — значение $(\partial v_1/\partial x)_{x=\pm 1}$.

Налагая условия в) и г), а также требуя, чтобы напряжения на S_+ и S_- были равны нулю, получим

$$v_{1,0}{}^{\circ} = v_{1,1}{}^{\circ} = v_{1,1}{}^{1} = v_{1,2}{}^{1} = v_{1,2}{}^{2} = v_{1,3}{}^{2} = 0$$

$$v_{2,0}{}^{\circ} = v_{2,1}{}^{\circ} = v_{2,1}{}^{1} = v_{2,2}{}^{1} = v_{2,2}{}^{2} = v_{2,3}{}^{2} = 0$$

$$v_{3,0}{}^{\circ} = v_{3,1}{}^{\circ} = v_{3,1}{}^{1} = v_{3,2}{}^{1} = v_{3,2}{}^{2} = 0$$

Поэтому

$$v_1 = \sum_{n=4}^{\infty} v_{1,n}^2 P_n^2 \quad (1 \leftrightarrow 2) \qquad v_3 = \sum_{n=3}^{\infty} v_{3,n}^2 P_n^2 \tag{3.17}$$

Произвольные функции $v_{1,n}^2$, $v_{2,n}^2$, $v_{3,n}^2$ определяются из уравнений равновесия в перемещениях (3.18)

$$\left(\Delta v_1 + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \theta^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta^1} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{2(1+\nu)}{E}F_1 = 0$$

$$(1 \leftrightarrow 2)$$

$$\left(\Delta v_3 + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta^1} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{2(1+\nu)}{E}F_3 = 0$$

где Δ — двухмерный оператор Лапласа, а F_1, F_2, F_3 — составляющие поправочной массовой силы, которые во втором этапе известны. Так как во втором этапе равнодействующая и результирующий момент поправочных массовых сил равны нулю, будем иметь

$$F_1(\theta^1, \theta^2, x) = \sum_{n=2}^{\infty} F_1^{(n)}(\theta^1, \theta^2) P_n(x) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$
$$F_3(\theta^1, \theta^2, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{(n)}(\theta^1, \theta^2) P_n(x) \tag{3.19}$$

Внося разложения (3.17) и (3.19) в уравнения (3.18), получим

$$\Delta v_{1,n}^2 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \theta^1}\left(\frac{\partial v_{1,n}^2}{\partial \theta^1} + \frac{\partial v_{2,n}^2}{\partial \theta^2}\right) = \tag{3.20}$$

$$= (4n^2-1)\left[\frac{1}{(1-2\nu)(2n+1)h}\frac{\partial v_{3,n-1}^2}{\partial \theta^1} - \frac{2(1+\nu)}{E}F_1^{(n-2)} + L_1^{(n-2)}\right] \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\Delta v_{3,n-1}^2 = (2n-3)(2n-1)\left[-\frac{2(1+\nu)}{E}F_3^{(n-2)} + L_3^{(n-2)}\right] \quad (n \geqslant 4)$$

Уравнения (3.20) составляют систему с неизвестными

$$v_{1,n}^2(\theta^1, \theta^2), v_{2,n}^2(\theta^1, \theta^2), v_{3,n-1}^2(\theta^1, \theta^2)$$

Функции $L_i^{(n-2)}(\theta^1, \theta^2)$ $(i = 1, 2, 3)$ известны, так как они зависят от величин, определенных в предыдущих этапах, в частности

$$L_i^{(2)}(\theta^1, \theta^2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Следует отметить, что представляет интерес только частное решение системы (3.20), а построение этого решения не представляет особых трудностей, так как первые два уравнения соответствуют плоской задаче, а $v_{3,n-1}^2$ определяется из уравнения типа Пуассона.

Поступила 9 III 1968

Академия наук Румынской Социалистической Республики
Институт механики твердого тела

ЛИТЕРАТУРА

1. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 266, No. 1325.