

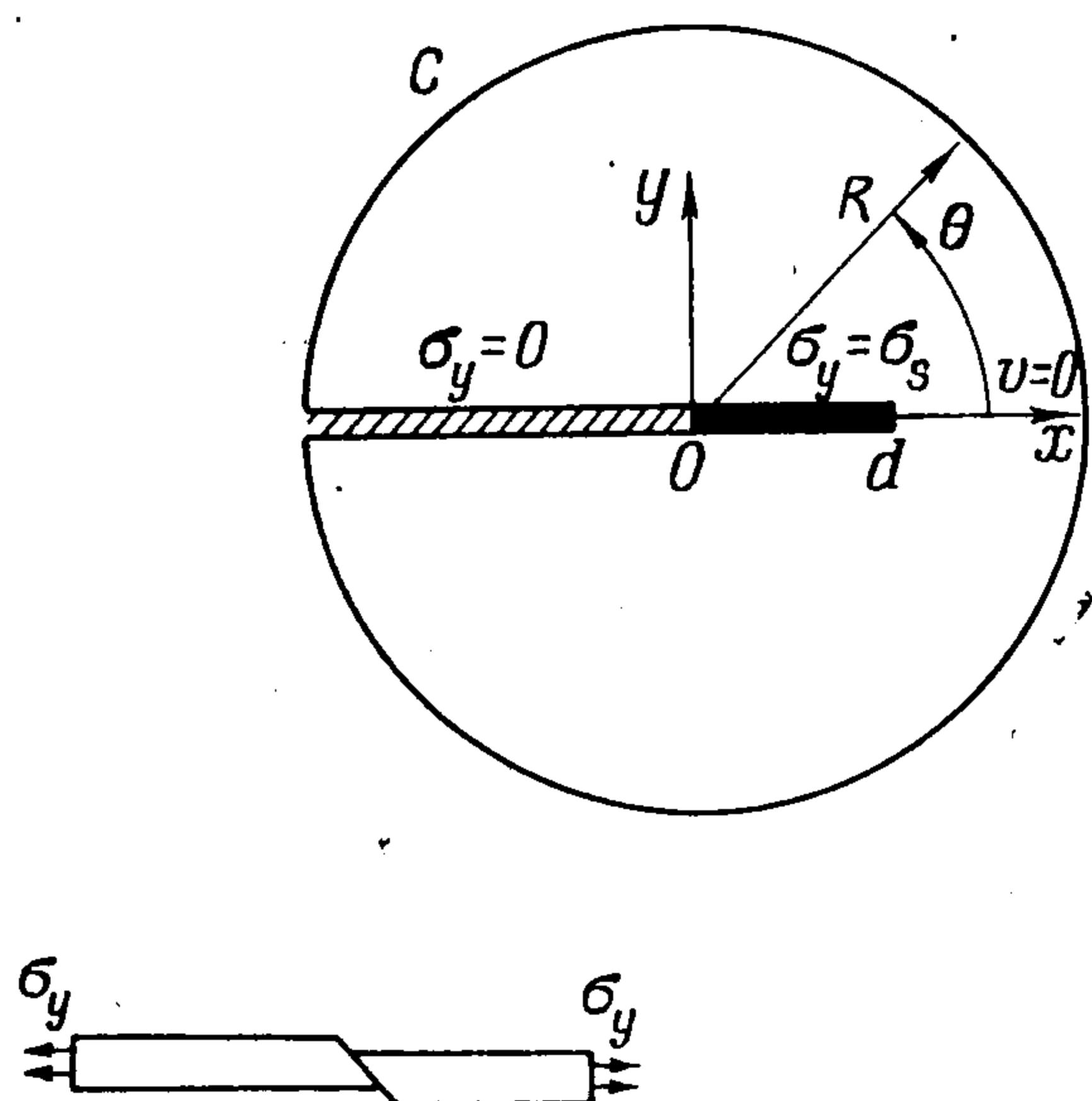
О КВАЗИХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

Г. П. Черепанов
(Москва)

Согласно концепции квазихрупкого разрушения, выдвинутой Ирвином [1] и Орованом [2], теория хрупкого разрушения Гриффитса распространяется на пластические материалы. При этом вместо истинной поверхностной энергии, фигурирующей в теории Гриффитса, берется эффективная плотность поверхностной энергии, которая равна необратимой работе пластических деформаций в тонком слое вблизи поверхности трещины, плюс истинная поверхностная энергия, отнесенная к единице площади [1-5].

В предлагаемой работе показано, что величина отношения истинной поверхностной энергии к необратимой работе пластических деформаций имеет порядок σ_s / E , где σ_s — предел текучести на растяжение, E — модуль Юнга. Рассмотрение основано на решении упруго-пластической задачи для пластины с трещиной и общем подходе к распространению трещин в произвольной сплошной среде [3]. В работе рассмотрен также упруго-пластический аналог задачи Гриффитса. Оказалось, что в отличие от хрупких материалов трещина в упруго-пластическом теле с увеличением напряжения всегда вначале растет устойчиво и лишь по достижении нагрузкой некоторого предельного значения попадает в область неустойчивости. Эти качественные особенности развития трещин в упруго-пластических материалах хорошо известны, например, для металлов [4-5]. Решение указанной задачи позволяет оценить границы применимости концепции квазихрупкого разрушения.

§ 1. Упруго-пластическая задача для пластины со щелью. Рассмотрим тонкую пластину с произвольной трещиной нормального разрыва, подвер-



фиг. 1

гающуюся воздействию растягивающих усилий. Материал пластины будем считать идеальным упруго-пластическим и удовлетворяющим условию пластичности Треска — Сен-Венана. Введем систему прямоугольных декартовых координат xu в плоскости пластины с центром O в конце трещины; ось x направим вдоль трещины (фиг. 1). Рассмотрим окрестность конца трещины, малую сравнительно с характерным линейным размером пластины, но большую по сравнению с характерным размером пластической области. Будем считать выполненными условия локальной симметрии.

На плоскости xu трещина представится полубесконечным разрезом вдоль отрицательной полуоси x , свободным от внешних нагрузок (фиг. 1). Напомним, что максимальное касательное напряжение в каждой точке упруго-пластического тела, согласно условию Треска — Сен-Венана, не может превышать предела текучести на сдвиг τ_s ($2\tau_s = \sigma_s$).

Покажем, что решение поставленной упруго-пластической задачи в постановке Дагдейла выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\sigma_s \left(1 - \frac{1}{\pi} \arg \frac{i\sqrt{d} - \sqrt{z-d}}{i\sqrt{d} + \sqrt{z-d}} \right) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= \frac{2i\sigma_s y \sqrt{d}}{\pi z \sqrt{z-d}} \quad (z = x + iy) \\ 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma_s \left(1 - \frac{1}{\pi} \arg \frac{i\sqrt{d} - \sqrt{z-d}}{i\sqrt{d} + \sqrt{z-d}} \right) + \\ &+ \frac{2\sigma_s}{\pi i (1+\nu)} \ln \left| \frac{i\sqrt{d} - \sqrt{z-d}}{i\sqrt{d} + \sqrt{z-d}} \right| + \frac{i\sigma_s \sqrt{d} y}{\pi z \sqrt{z-d}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжения, u, v — составляющие вектора смещения по осям x и y , μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\arg f$ — аргумент комплексного числа f ($-\pi \leq \arg f \leq \pi$). Функция $\sqrt{z-d}$ аналитична вне полубесконечного разреза $x < d$ вдоль действительной оси и положительна на продолжении разреза при $x > d$.

Пластическая область представляет собой отрезок длины d на продолжении трещины вдоль оси x (фиг. 1). Толщина зоны равна нулю. Физически в тонких пластинках она может реализоваться в виде плоскости скольжения, направленной под углом 45° к плоскости пластины. В толстых пластинах на продолжении трещины останутся характерные углубления [5] в виде бороздок (фиг. 1). Напряжения в пластической области будут равными

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) соответствуют выбору потенциалов Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в виде [6]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \sigma_s \left(1 - \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i\sqrt{d} - \sqrt{z-d}}{i\sqrt{d} + \sqrt{z-d}} \right), \quad \Psi(z) = -z\Phi'(z) \quad (1.3)$$

Уравнения теории упругости и граничные условия, как нетрудно заметить, удовлетворены для внешности разреза $y = 0, x < d$.

В рассмотренной задаче параметром нагружения является коэффициент интенсивности напряжений N , задающий распределение напряжений и смещений в бесконечно удаленной точке (т. е. на расстояниях, больших сравнительно с d , но малых по сравнению с характерным линейным размером тела).

Следует заметить, что вообще для плосконапряженного состояния пластин из идеально упруго-пластического материала характерна тенденция формирования пластических областей в узкие полосы скольжения. Так, например, согласно точному решению упруго-пластической задачи о двухосном растяжении пластины с круговым отверстием [7] уже при отклонении напряженного состояния на бесконечности от всестороннего на 0.1 ($\Delta\sigma / \sigma \approx 0.1$) пластическая зона из круговой превращается в продолговатую область с отношением ширины к длине приблизительно 1 : 4.

Согласно решению Н. И. Мусхелишвили, распределение упругих напряжений и смещений вблизи конца трещины дается следующими выражениями:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{2N}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_x - i\tau_{xy} = \frac{N}{4\sqrt{r}} (e^{-1/2i\theta} + 2e^{1/2i\theta} + e^{5/2i\theta}) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1+\nu)N}{4E\sqrt{r}} \left(2 \frac{3-\nu}{1+\nu} e^{-1/2i\theta} - 3e^{1/2i\theta} + e^{5/2i\theta} \right)$$

$$\Phi(z) = \frac{N}{2\sqrt{z}}, \quad \Psi(z) = -z\Phi'(z)$$

Здесь $r\theta$ — полярные координаты с центром в конце трещины ($\theta = 0$ соответствует продолжению трещины). Выражения (1.4) получаются также из формул (1.1), (1.3) при $z \rightarrow \infty$, причем коэффициент интенсивности напряжений N оказывается равным

$$N = \frac{2}{\pi} \sigma_s \sqrt{d} \quad (1.5)$$

Следовательно, размер пластической области d находится по формуле (1.5) из решения чисто упругой задачи; он определяется вполне коэффициентом интенсивности напряжений.

Смещение v берегов разреза $y = 0$; $x < d$ по формулам (1.1) найдем

$$\begin{aligned} v &= \pm \frac{2\sigma_s}{\pi E} \int_x^d \ln \left| \frac{\sqrt{d} - \sqrt{d-x}}{\sqrt{d} + \sqrt{d-x}} \right| dx = \\ &= \pm \frac{2\sigma_s}{\pi E} \left[2\sqrt{d(d-x)} + x \ln \left| \frac{\sqrt{d} - \sqrt{d-x}}{\sqrt{d} + \sqrt{d-x}} \right| \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

При этом смещение в конце трещины v_0 равно

$$v_0 = \pm \frac{4\sigma_s}{\pi E} d = \pm \frac{\pi N^2}{\sigma_s E} \quad (1.7)$$

Приведенные выше рассуждения совершенно аналогично могут быть использованы в общем случае произвольного числа трещин, расположенных вдоль одной прямой в бесконечной пластине, если к берегам трещин приложены лишь нормальные нагрузки. Поэтому и в этом случае пластические области в решении соответствующей упруго-пластической задачи (при условии пластичности Треска — Сен-Венана) могут представлять собой отрезки на продолжении трещин.

Решение в этом классе упруго-пластических задач получается методом Н. И. Мусхелишвили [6]; линейные размеры зон определяются из условий разрешимости краевой задачи. Разумеется, в рассматриваемом случае они не обязаны быть малыми сравнительно с характерным линейным размером пластины. При этом нужно следить за тем, чтобы в упругой области выполнялось еще условие $|\sigma_1 - \sigma_2| > \sigma_s$. При некоторых значениях параметров нагружения оно начинает нарушаться; тогда возникают вторичные пластические области, скольжение в которых происходит по плоскостям, нормальным к плоскости пластины.

Впервые аналогичное решение упруго-пластической задачи для трещины конечной длины в пластинке получил Дагдейл [8]. Затем та же задача гораздо более полно была исследована в работе М. Я. Леонова с сотрудниками [9].

§ 2. Уравнение энергии. Используем упруго-пластическое решение (1.1) для анализа развития трещины нормального разрыва в пластине из упруго-пластического материала. При этом будем применять общий подход, предложенный в работе [3] и основанный на законе сохранения энергии среды вблизи малой окрестности конца трещины. Относительно локальных процессов разрушения и деформирования вблизи конца трещины, определяющих рост трещины в целом, предполагается лишь, что они сопровождаются поглощением некоторой энергии при образовании новой поверхности трещины.

Общее условие предельного равновесия на контуре трещины, выведенное в работе [3] для произвольной сплошной среды (формула (1.15) работы

[3]), в рассматриваемом частном случае запишется в виде

$$\lim \left[\oint_C (\mathcal{E} \cos \theta - A_*) ds \right] = 2\gamma_* \quad (2.1)$$

$$\mathcal{E} = \int \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + 2\tau_{xy} d\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} E^{-1} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1 + \nu)\tau_{xy}^2]$$

$$A_* = (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial x}$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ — компоненты деформации, R — радиус окружности C (фиг. 1). Величина эффективной поверхностной энергии γ_* , приходящейся на единицу образовавшейся поверхности трещины, равна работе пластических деформаций на площадке скольжения γ_p плюс истинная поверхностная энергия γ [1-5].

Совершенно аналогично [3] вычислим интегралы в условии (2.1); распределение смещений и напряжений при больших R дается формулами (1.4). Окончательно получаем

$$N^2 = \pi^{-1} E \gamma_* \quad (2.2)$$

Это — формула Ирвина для плосконапряженного состояния, полученная им другим способом [10].

Теперь, используя формулы (2.2), (1.2) и (1.7) вычисляем γ_p

$$\gamma_p = \int_0^{v_0} \sigma_y dv + \sigma_s v_0 O\left(\frac{\sigma_s}{E}\right) = \gamma_* + \dot{\gamma}_* O\left(\frac{\sigma_s}{E}\right) \quad (2.3)$$

Отсюда получаем искомую зависимость γ_* от γ

$$\gamma = \gamma_* O(\sigma_s/E) \quad (2.4)$$

Заметим, что величина

$$\int_0^{v_0} \sigma_y dv$$

физически представляет собой главный вектор внешних сил, приложенных к пластическому слою $(0, d)$ и направленных вдоль оси x . Это оправдывает силовое рассмотрение γ_* как некоторого эффективного поверхностного натяжения материала, приложенного в конце трещины.

Таким образом, размер пластической области перед трещиной и эффективная поверхностная энергия вполне определяются постоянными материала E, σ_s, γ и ν . Для большинства металлов и, в частности, конструкционных сталей величина E/σ_s имеет порядок 10^3 ; отсюда формула (2.4) дает соотношение $\gamma_* \approx 10^3 \gamma$, которое по порядку величины хорошо подтверждается экспериментами [11-14].

В процессах возникновения внутризеренных микротрещин в сталях величина σ_s будет уже соответствовать теоретической прочности, имеющей порядок $0.1 E$.

При этом основная формула (2.4) дает величину эффективной поверхностной энергии, характеризующую начальный этап зарождения трещины, приблизительно равную 10γ , т. е. для сталей около $2 \cdot 10^4 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2}$. Полученные цифры хорошо согласуются с дислокационной теорией Коттрелла и экспериментальными данными [14].

Весьма большие значения γ_* для пластичных сталей, достигающие порядка $10^8 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2}$ [12], на основании предыдущих замечаний объясняются тем, что величина γ_* ответственна также за необратимые потери энергии в основной массе материала например, во вторичных пластических зонах).

Вычислим в качестве примера значения v_0 и d для малоуглеродистой стали, используя данные [11] $\gamma_* = 2 \cdot 10^6 \text{ дн} \cdot \text{см}^{-1}$, $\sigma_s \approx 4 \cdot 10^9 \text{ дн} \cdot \text{см}^{-2}$, $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ дн} \cdot \text{см}^{-2}$.

По формулам (1.5), (1.7), (2.2) получаем

$$v_0 = \gamma_* / \sigma_s = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}, \quad d = (\pi E \gamma_*) / (4 \sigma_s^2) = 0.2 \text{ см} \quad (2.7)$$

Формула (2.4) позволяет с единой точки зрения трактовать концепцию квази-хрупкого разрушения и адсорбционный эффект. Следует отметить, что, по-видимому, впервые мысль о связи γ_* с γ была высказана Джилманом [15]; однако полученная им на основе грубых оценок зависимость не оправдывается экспериментом.

Формула (2.4) при соответствующих предположениях может быть получена также из анализа размерностей.

Замечание. Выражение (2.3) записано с точностью до малых первого порядка; в то же время соотношение (2.1) справедливо также для конечных деформаций упругой среды, если через \mathcal{E} обозначить энергию деформации. В последнем нетрудно убедиться, если проверить выкладки § 1 работы [8] и использовать локальный закон сохранения энергии при конечных деформациях среды [16].

Так как производные по координатам от смещений в сингулярном решении (1.4) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, то формула Ирвина (2.2) справедлива также для конечных деформаций идеально упруго-пластического тела в малой окрестности контура трещины.

§ 3. Упруго-пластический аналог задачи Гриффитса. Рассмотрим пластину из идеально упруго-пластического материала; пластина имеет прямолинейную сквозную трещину длиной $2l$, находящуюся в однородном поле растягивающего напряжения $\sigma_y = \sigma$. Берега трещины считаем свободными от нагрузок. Начало декартовых координат xu возьмем в середине трещины, ось x направим вдоль трещины.

Пластические области вблизи концов трещины будут представлять собой отрезки длины d вдоль линии трещины на ее продолжении.

Решение граничной задачи плоской теории упругости

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad |x| < l \\ \sigma_y = \sigma_s \quad \text{при } y = 0 \quad l < |x| < l + d \\ v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad |x| > l + d, \quad \sigma_y \rightarrow \sigma \quad \text{при } |x + iy| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

получается методом Колосова-Мусхелишвили [8,9]. Это решение можно записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (z = x + iy) \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \sigma - 4iy\Phi'(z) \\ 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{1}{2} \sigma - 2iy\overline{\Phi'(z)} \quad (3.2) \\ \Phi(z) = -\frac{\sigma}{4} - \frac{\sigma_s}{2\pi i} \ln \frac{l-z}{l+z} - \\ - \frac{\sigma_s}{2\pi i} \ln \frac{\sqrt{d(2l+d)} \sqrt{(l+d)^2 - z^2} + lz + (l+d)^2}{\sqrt{d(2l+d)} \sqrt{(l+d)^2 - z^2} - lz + (l+d)^2} \\ \frac{d}{l} = \sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} - 1 \end{aligned}$$

Корень $\sqrt{(l+d)^2 - z^2}$ считается положительным на верхнем берегу разреза $(-l-d, l+d)$ вдоль оси x , а $\ln F = \ln |F| + i \arg F$ ($-\pi < \arg F < \pi$)

Используя (3.2), вычислим смещения u и v при $y = 0$, $l < |x| < l + d$:

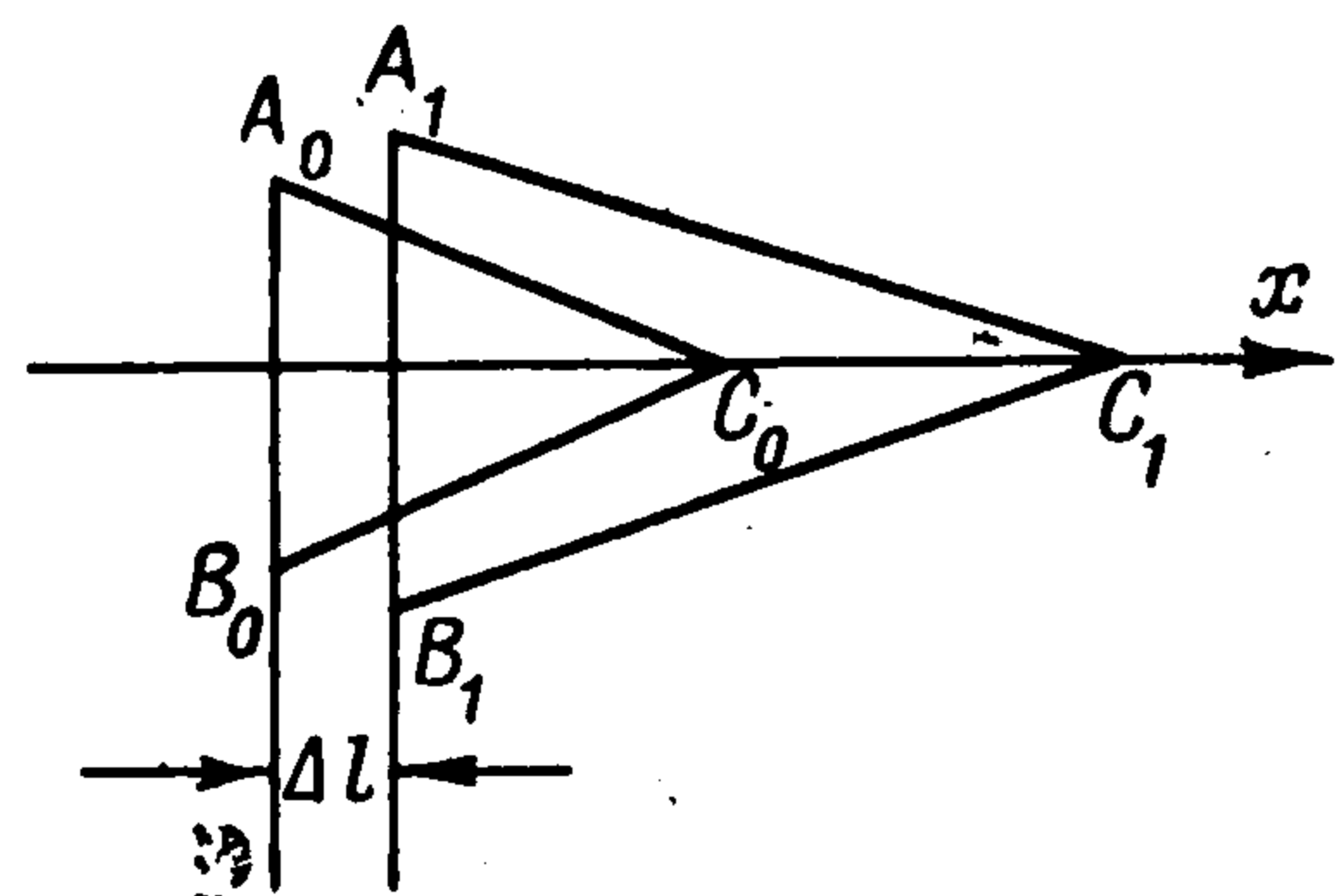
$$u = u(x, l, \beta) = \frac{2\sigma_s}{\pi E} \left[\frac{\pi}{2} (1 - \nu) - \beta \right] x - \frac{\sigma_s l}{E} (1 - \nu) \quad \left(\beta = \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right)$$

$$v = v(x, l, \beta) = \pm \frac{2\sigma_s l}{\pi E} \left[-\ln(t^2 - 1) + 2 \ln(\sin \beta + \sqrt{1 - t^2 \cos^2 \beta}) - \right.$$

$$\left. - 2 \ln \cos \beta + t \ln \frac{(t-1)(\sin \beta \sqrt{1 - t^2 \cos^2 \beta} + t \cos^2 \beta + 1)}{(t+1)(\sin \beta \sqrt{1 - t^2 \cos^2 \beta} - t \cos^2 \beta + 1)} \right] \left(t = \frac{x}{l} \right) \quad (3.3)$$

при $|x| < l$, $u = -\sigma x / E$

Решение (3.2) зависит от одного неопределенного параметра l ; для его нахождения привлечем закон сохранения энергии и физическое представление об энергии разрушения, вполне аналогичное представлению Гриффитса — Ирвина — Орована. Пусть в некоторый момент времени, соответствующий значениям параметров l и β , разрыв смещения v на отрезке $(l, l + d)$ изображается условным треугольником $A_0 C_0 B_0$ (фиг. 2); через некоторое время, соответствующее приращению параметров l и β на Δl и $\Delta \beta$, рассматриваемый отрезок займет сдвинутое в направлении роста трещины положение, которое условно изображается треугольником $A_1 C_1 B_1$. Точки C_0 и C_1 отвечают концу пластической линии; точки A_0, A_1 и B_0, B_1 — концу трещины на различных берегах пластической линии разрыва. Согласно (3.2), напряжения в пластической области равны



фиг. 2

$$\sigma_y = \sigma_s, \quad \sigma_x = \sigma_s - \sigma, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.4)$$

При продвижении конца трещины на Δl напряжение σ_y произведет работу на соответствующем смещении; эта работа, очевидно, равна диссипации энергии $\gamma_* \Delta l$. Энергию разрушения γ_* считаем постоянной характеристикой материала. Члены высшего порядка малости учитывать здесь не будем.

$$\gamma_* \Delta l = \int_{l+\Delta l}^{l+d} \sigma_y [v(x, l + \Delta l, \beta + \Delta \beta) - v(x, l, \beta)] dx + \Delta S \quad (3.5)$$

При малых Δl справедливы следующие оценки:

$$\int_l^{l+\Delta l} \sigma_y [v(x, l + \Delta l, \beta + \Delta \beta) - v(x, l, \beta)] dx \approx \left(\sigma_y \frac{\partial v}{\partial l} \right)_{x=l} (\Delta l)^2$$

$$\int_{l+l}^{l+d+\Delta d} \sigma_y [v(x, l + \Delta l, \beta + \Delta \beta) - v(x, l, \beta)] dx \approx \left(\sigma_y \frac{\partial v}{\partial l} \right)_{x=l+d} (\Delta l)^2$$

$$(\Delta S \approx O[(\Delta l)^2]) \quad (3.6)$$

Разложим функцию $v(x, l + \Delta l, \beta + \Delta \beta)$ в ряд Тэйлора по Δl в выражении (3.5) и устремим $\Delta l \rightarrow 0$, учитывая оценки (3.6).

Получаем следующее выражение:

$$\gamma_* = \sigma_s \int_l^{l+d} \left(\frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial l} \right) dx \quad (3.7)$$

В частности, при $d \ll l$ (когда $\beta \rightarrow 0$) $\partial u / \partial \beta$ и $\partial v / \partial \beta$ будут стремиться к нулю и будет справедливо условие стационарности $\partial v / \partial l = \partial v / \partial x$, выражение (3.7) превратится в (2.2). Используя формулы (3.2), вычисляем

$$\int x \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{2\sigma_s l^2}{\pi E} \left[\operatorname{tg} \beta \operatorname{arc} \cos (t \cos \beta) + \frac{1}{2} (t^2 - 1) \ln \frac{(t-1)(\sin \beta \sqrt{1-t^2 \cos^2 \beta} + t \cos^2 \beta + 1)}{(t+1)(\sin \beta \sqrt{1-t^2 \cos^2 \beta} - t \cos^2 \beta + 1)} \right] \left(t = \frac{x}{l} \right) \quad (3.8)$$

При помощи (3.3), (3.4) и (3.8) находим

$$\begin{aligned} \sigma_s \int_l^{l+d} \left(\frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dl} \right) dx &= \sigma_s \frac{d}{dl} \int_l^{l+d} v(x, l, \beta) dx + \sigma_s v(l, l, \beta) = \\ &= -\sigma_s \frac{d}{dl} \int_l^{l+d} x \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sigma_s l \frac{dv(l, l, \beta)}{dl} = \\ &= \frac{2\sigma_s^2 l}{\pi E} \left[2(\ln \cos \beta + \beta \operatorname{tg} \beta) + l(\beta \sec^2 \beta - \operatorname{tg} \beta) \frac{d\beta}{dl} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Использованный прием вычисления γ_* аналогичен приему Ирвина [10]. Покажем, как можно найти γ_* , применяя метод Гриффитса.

Рассмотрим упругую среду, занимающую фиксированную область $|z| \ll R$, где радиус R велик по сравнению с длиной трещины. Состояние этой системы определяется двумя параметрами: l и σ . Согласно закону сохранения энергии, мощность внешних сил, приложенных на внешнем контуре $|z| = R$, равна скорости изменения упругой энергии тела W плюс скорость диссипации энергии. В качестве параметра, заменяющего время, может служить l . Имеем

$$\frac{\delta A}{\delta l} = \frac{dW}{dl} + 4\gamma_* \quad (3.10)$$

Распределение смещений и напряжений при больших R , согласно (3.2), определяется следующим потенциалом Н. И. Мусхелишвили:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma_s l^2 \operatorname{tg} \beta}{2\pi z^2} + O(z^{-4}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Вычисляем по формулам (3.2), (3.3), (3.11), используя также теорему Клапейрона; получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta l} &= R \int_0^{2\pi} \left[(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{du}{dl} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{dv}{dl} \right] d\theta = \\ &= \frac{4\sigma_s^2 R^2}{\pi E} \beta \frac{d\beta}{dl} + \frac{\sigma_s^2 l}{\pi E} \left\{ 2(5 + \nu) \beta \operatorname{tg} \beta + l \frac{d\beta}{dl} [(5 + \nu) \beta \sec^2 \beta - (3 - \nu) \operatorname{tg} \beta] \right\} \\ W &= \frac{1}{2} R \int_0^{2\pi} [(\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) u + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) v] d\theta - \\ &- 2\sigma_s \int_l^{l+d} v(x, l, \beta) dx = \frac{\pi \sigma_s^2 R^2}{2E} + \frac{\sigma_s^2 l^2}{\pi E} [-8 \ln \cos \beta + (\nu - 3) \beta \operatorname{tg} \beta] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Считая l независимым параметром, из (3.10) и (3.12) легко получить

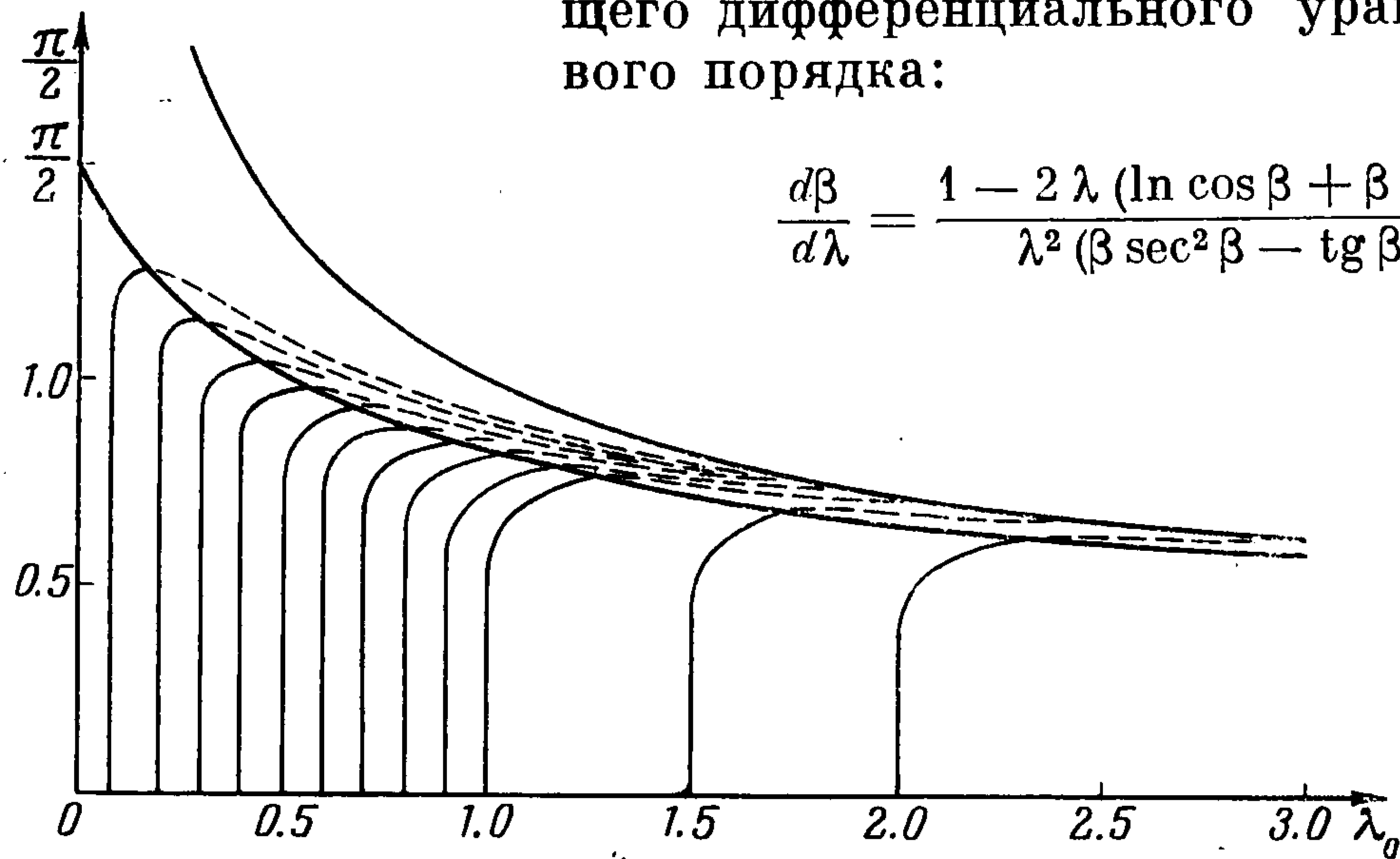
$$\gamma_* = \frac{2\sigma_s^2 l}{\pi E} \left[2(\ln \cos \beta + \beta \operatorname{tg} \beta) + l(\beta \sec^2 \beta - \operatorname{tg} \beta) \frac{d\beta}{dl} \right] \quad (3.13)$$

Вводя безразмерную длину λ

$$\lambda = \frac{2\sigma_s^2 l}{\pi E \gamma_*} \quad \left(\beta = \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \quad (3.14)$$

окончательно запишем искомую зависимость между β и λ в виде следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{1 - 2\lambda(\ln \cos \beta + \beta \operatorname{tg} \beta)}{\lambda^2(\beta \sec^2 \beta - \operatorname{tg} \beta)} \quad (3.15)$$



фиг. 3

На фиг. 3 изображено¹ поле интегральных кривых уравнения (3.15) в области $0 < \lambda < \infty$, $0 < \beta < \pi/2$. Сплошными тонкими линиями обозначены устойчивые участки кривых, тонкими штрихами — неустойчивые участки. Кривая, определяемая уравнением

$$1 = 2\lambda(\ln \cos \beta + \beta \operatorname{tg} \beta) \quad (3.16)$$

разделяет всю область изменения переменных на область устойчивого развития трещины из некоторой начальной ($d\beta/d\lambda > 0$) и область неустойчивости, в которой $d\beta/d\lambda < 0$.

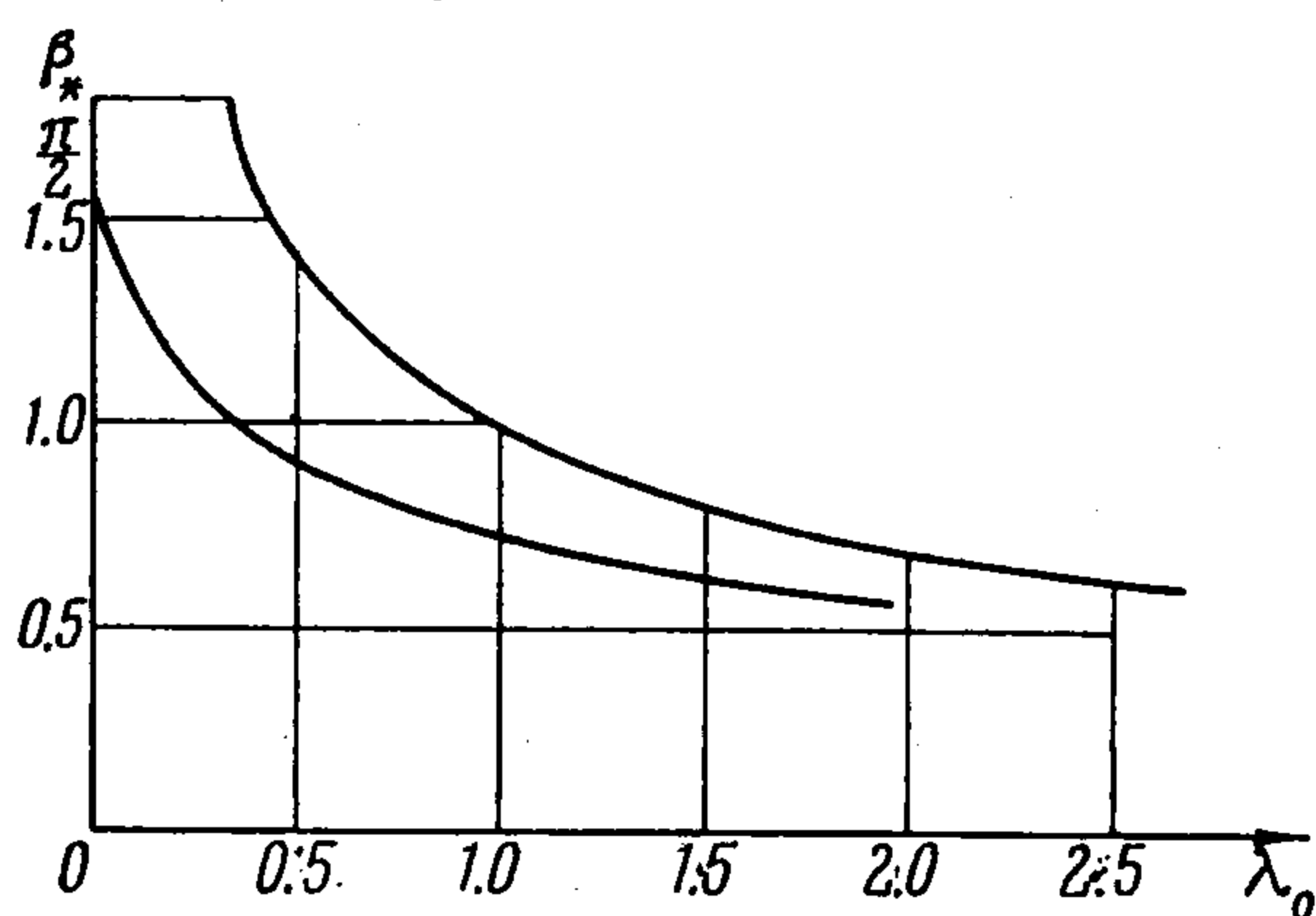
Таким образом, трещина вначале монотонно растет с увеличением нагрузки, достигая максимальной нагрузки в точке пересечения с кривой (3.16), после чего попадает в область неустойчивости. Легко показать, что в области неустойчивости все интегральные кривые при больших λ асимптотически стремятся к кривой Гриффитса — Ирвина — Орована

$$\lambda\beta^2 = 1 \quad \left(\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi l}} \right) \quad (3.17)$$

Кривые (3.16) и (3.17) изображены жирными линиями на фиг. 3. На фиг. 4 приведен график зависимости безразмерной предельной нагрузки β_* от безразмерной длины начальной трещины λ_0 , полученный при помощи фиг. 3. Для сравнения на этой фигуре приведена кривая (3.17).

Наличие участка устойчивого роста трещины в упруго-пластических материалах хорошо известно из опытов. В особенности следует указать на

¹ Расчеты на вычислительной машине «НАИРИ» выполнила Г. Д. Даянц.



фиг. 4

замечательные эксперименты Ирвина [1] и Мак-Клинтока [17], проведенные на алюминиевой фольге и хорошо подтверждающие изложенную теорию.

В заключение заметим, что полученные результаты можно считать справедливыми и для плоской деформации, если рассмотреть приближенную модель трещины в упруго-пластическом теле, аналогичную хрупкой модели Леонова — Панасюка [18].

Следует отметить, что изучение упруго-пластической задачи Гриффитса было предпринято также Гудьером и Филдом [19], однако авторы не ставили вопроса о связи длины трещины с нагрузкой.

Поступила 18 V 1967

Институт проблем
механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Irvin G. R. Fracture dynamics, In: Fracturing of Metals. Amer. Soc. Metals Cleveland, 1948.
2. Orowan E. O. Fundamentals of brittle behavior of metals. Simp. Fatigue and Fracture of Metals, N. Y., 1950, Wiley, 1952.
3. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. Fracture. Proc. Internat. confer. on the atomic mech. of fracture. N. Y., Wiley, 1959. (Рус. пер.: Атомный механизм разрушения. М., Metallurgizdat, 1963.)
5. Дроздовский Б. А., Фридман Я. Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. М., Metallurgizdat, 1960.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. «Наука», М., 1966.
7. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи 1963, ПММ, т. 27, вып. 3.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2
9. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
10. Irvin G. R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No 3.
11. Felbeck D. K., Orowan E. O. Experiments on brittle fracture of steel plates. Welding. J. Res. Suppl., 1955, vol. 34, No 11.
12. Irvin G. R. Fracture. In: Handbuch der Physik, Berlin, Springer 1958, Bd. 4.
13. Панасюк В. В., Ковчик С. Е. Визначення і інтенсивності енергії руйнування твердих тіл. Прикладна механіка, 1963, т. 9, вип. 2.
14. Хан Дж. Т., Авербах Б. Л., Оуэн В. С., Коэн М. Возникновение микро-трещин скола в поликристаллическом железе и стали. В кн.: «Атомный механизм разрушения». М., Metallurgizdat, 1963.
15. Gilman J. J. Cleavage, ductility and tenacity in crystals. In: Fracture, 1959, N. — Y., Wiley (Рус. пер.: Гилман Скол, пластичность и вязкость кристаллов. В кн.: «Атомный механизм разрушения»).
16. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
17. McClintock F. A. Ductile Fracture Instability in Shear. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, N 4.
18. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикл. механіка, 1959, т. 5, вип. 4.
19. Goodier J. N., Field F. A. Plastic Energy Dissipation in Crack Propagation In: Fracture of Solids, 1963, N. — Y. — London, Interscience publ., vol. 20.