Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

МАЛЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО СВЯЗАННОГО ТВЕРДОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. Б. Иванов

(Ленинград)

Рассмотрено вращательное движение цилиндра конечной высоты, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, под действием упругого момента из состояния покоя с малым углом отклонения от положения равновесия. Решение задачи построено в форме интеграла Лапласа — Меллина. Исследован спектр колебаний системы и получено спектральное разложение решения, что позволило описать характер движения цилиндра при различных значениях параметров.

Ранее задача решалась при допущении о гармоническом затухании колебаний, которое оправдывается в некотором интервале времени при достаточно малом отношении момента сил вязкого трения к максимальному упругому моменту [1,2]. Общее исследование характеристического уравнения колебаний цилиндра не проводилось, а задача в целом (с учетом начальных условий) не ставилась. Предлагаемая статья восполняет этот пробел.

Установлено, что при любых положительных значениях параметров твердый цилиндр переходит через положение равновесия. В зависимости от значений параметров при этом осуществляются два варианта: 1) цилиндр переходит через положение равновесия бесчисленное множество раз, 2) цилиндр переходит через положение равновесия нечетное число раз и при достаточно больших значениях времени неограниченно приближается к положению равновесия со стороны, противоположной первоначальному угловому отклонению.

Исследование аналогичных задач для сферы или бесконечного цилиндра, заполненных вязкой жидкостью, значительно проще, так как в отличие от задачи для цилиндра конечной высоты движение жидкости в этих случаях зависит только от одной пространственной координаты [3]. Качественные результаты исследования не отличаются от полученных для конечного цилиндра. По-видимому, малые крутильные колебания произвольного упруго-связанного твердого тела вращения, содержащего вязкую жидкость или погруженного в нее, моделируются в существенных чертах простейшими конкретными задачами, в которых жидкость движется как семейство квазитвердых поверхностей.

§ 1. Постановка задачи. Интегральное представление и дифференциальные свойства решения. Твердая прямая круговая цилиндрическая поверхность радиуса R_*, высоты $2H_*$ и момента инерции K_*, заполненная однородной несжимаемой жидкостью вязкости η_* и плотности μ_*, осесимметрично подвешена на упругой нити крутильной жесткости $M_* = K_* k_{0*}^2$ (k_{0*} — частота свободных незатухающих гармонических колебаний цилиндра без жидкости). В начальный момент времени $t_* = 0$ система находится в покое, причем твердый цилиндр закручен на малый угол A_0 по отношению к положению равновесия. Параметры A_0, R_*, H_*, K_*, M_*, η_*, μ_* положительны. Основная изучаемая величина — угловая скорость твердого цилиндра $\omega_{0*}(t_*)$ при $t_* > 0$.

Переходим к безразмерным величинам

$$t = k_{0*}t_*, \quad H = \frac{H_*}{R_*}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_{0*}}{k_{0*}}, \quad \eta = \frac{2\pi R_*^3}{K_* k_{0*}}\eta_*, \quad \mu = \frac{2\pi R_*^5}{K_*}\mu_*, \quad \nu = \frac{\eta}{\mu}$$

На меридиональной полуплоскости введем безразмерные прямоугольные координаты r, y таким образом, чтобы ее часть, находящаяся внутри рассматриваемой твердой цилиндрической поверхности, определялась неравенствами $0 < r < 1$, $-H < y < H$. Угловую скорость вращения жидкости вокруг оси $r = 0$ в отношении к k_{0*} обозначим $\omega\,(t,\ r,\ y)$.

В качестве решения задачи будем искать функцию $\omega\,(t,\ r,\ y)$, заданную в $D\,(t \geqslant 0,\ 0 < r \leqslant 1,\ |y| \leqslant H)$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $\omega\,(t,\ r,\ y)$ непрерывна в области D и обращается в нуль при $t = 0$, $0 < r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H$;

2) при $t > 0$ в D существуют непрерывные производные ω_t, ω_r, ω_y; внутри D также существуют и непрерывны ω_{rr}, ω_{yy} и выполняется уравнение

$$\frac{1}{\nu}\omega_t = \omega_{rr} + \frac{3}{r}\omega_r + \omega_{yy} \tag{1.1}$$

3) в каждой области $(\varepsilon < t < t_0,\ 0 < r < 1,\ |y| < H)$, где ε и t_0 произвольные положительные числа, справедливы оценки

$$|\omega| < C, \qquad |\omega_r| < C_1 r^{-1}, \qquad |\omega_y| < C_1 r^{-1},$$
$$|\omega_t| < C_1 r^{-3}\,|\omega_{yy}| < C_2 r^{-3}\,(H - |y|)^{-1/2}$$

причем C может зависеть только от t_0, а C_1 и C_2 — лишь от ε и t_0;

4) функция $\omega\,(t,\ 1,\ y) = \omega\,(t,\ r,\ -H) = \omega\,(t,\ r,\ H) \equiv \omega_0\,(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega_0}{dt} + A_0 + \int_0^t \omega_0(\tau)\,d\tau + \eta\Big(\int_{-H}^{H} \omega_r\,|_{r=1}\,dy - \tag{1.2}$$
$$- \int_0^1 r^3\omega_y\,|_{y=-H}\,dr + \int_0^1 r^3\omega_y\,|_{y=H}\,dr\Big) = 0$$

Понятие решения определено таким образом, что единственность доказывается рассмотрением интеграла энергии. Такое определение более естественно с физической точки зрения, чем основанное на анализе процедуры построения решения с помощью преобразования Лапласа. Последняя приводит к следующему результату:

$$\omega\,(t,\ r,\ y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{-A_0\Psi\,(r,\ y,\ z)\,e^{zt}\,dz}{\varphi\,(z)} \tag{1.3}$$

$$\gamma > \max \operatorname{Re} k, \quad \varphi\,(k) = 0$$

$$\Psi\,(r,\ y,\ z) = \frac{1}{r}\left[\frac{I_1\,(br)}{I_1\,(b)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\alpha_n J_0\,(\alpha_n)}\,\frac{b^2\operatorname{ch}(b_n y)}{b_n^2\operatorname{ch}(b_n H)}\,J_1\,(\alpha_n r)\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{J_0\,(\alpha_n)}\,\frac{b^2}{b_n^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}(b_n y)}{\operatorname{ch}(b_n H)}\right]\frac{J_1\,(\alpha_n r)}{\alpha_n r}$$

$$\varphi(z) = z^2 + 1 + 2H\eta z\left[-1 + b\frac{I_1'(b)}{I_1(b)} + 2b^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2 b_n^2}\frac{\operatorname{th}(b_n H)}{b_n H}\right] =$$

$$= \left(1 + \frac{H\mu}{2}\right)z^2 + 1 + \frac{4H\mu}{\nu}z^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2 b_n^2}\left[\frac{\operatorname{th}(b_n H)}{b_n H} - 1\right]$$

$$b_n = \sqrt{b^2 + \alpha_n^2}, \qquad b = \sqrt{z/\nu}, \qquad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots, \qquad I_1(u) = -iJ_1(ui).$$

Здесь $J_0(u)$, $J_1(u)$ — функции Бесселя, α_n — положительные корни $J_1(u)$. Из асимптотических представлений функций Бесселя следуют те существенные при исследовании $\Psi(r, y, z)$ и $\varphi(z)$ факты, что величины

$$\frac{\alpha_n}{n}, \qquad \sqrt{n}\,|J_0(\alpha_n)|, \qquad \frac{\alpha_n - \alpha_m}{n - m}, \qquad n \neq m$$

заключены между положительными числами, не зависящими от номеров n, m.

Второе выражение для $\varphi(z)$ получается из первого как следствие равенств

$$g(u) \equiv \frac{1}{2u}\left[-1 + \sqrt{u}\frac{I_1'(\sqrt{u})}{I_1(\sqrt{u})}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u + \alpha_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u}{\alpha_n^2(u + \alpha_n^2)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2} = g(0) = \frac{1}{8}$$

Очевидно, полюсы $\varphi(z)$ просты, отрицательны и образуют двойную последовательность

$$\zeta_{nm} = -\nu\alpha_n^2 - (2m - 1)^2\frac{\pi^2\nu}{4H^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$$

Пронумеруем полюсы в порядке убывания, приписав совпадающим значениям ζ_{nm} (если такие имеются) один и тот же номер:

$$0 > -\nu\alpha_1^2 > \zeta_1 > \zeta_2 > \ldots > \zeta_p > \zeta_{p+1} > \ldots$$

При $0 \leqslant r < 1$, $|y| < H$ функция $\Psi(r, y, z)$ мероморфна по z. Ее полюсы просты и все содержатся в множестве полюсов ζ_p функции $\varphi(z)$. Предельные условия для Ψ при $z \neq \zeta_p$, $p = 1, 2, \ldots$ имеют вид

$$\Psi(1, y, z) \equiv \Psi(r, -H, z) \equiv \Psi(r, H, z) \equiv 1$$
$$|y| \leqslant H, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

В секторе S $(-\pi + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое фиксированное положительное число, как легко подсчитать, оценивая ряды интегралами по n, зависящими от параметра z, при $z \to \infty$

$$\varphi(z) = z^2 + O(z^{3/2}), \qquad \Psi(r, y, z) = O(z^{3/4}), \qquad \Psi_r = \frac{1}{r}O(z^{3/4}), \qquad \Psi_y = \frac{1}{r}O(z^{3/4})$$

Три последние соотношения выполняются равномерно в прямоугольнике $(0 < r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H)$, причем Ψ непрерывна в $(z \in S$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H)$, а Ψ_r и Ψ_y — в $(z \in S$, $0 < r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H)$. Следовательно: 1) функция ω непрерывна в $(t \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H)$, 2) функции ω_r и ω_y непрерывны, по крайней мере в $(t \geqslant 0$, $0 < r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H)$, причем $|\omega_r| < C_1 r^{-1}$, $|\omega_y| < C_1 r^{-1}$, 3) функции $\omega, \omega_r, \omega_y$ обращаются в нуль на всем сечении ($t = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H$). Легко получить оценку

$$|\omega_{yy}| < C_2 [r^{-3/2} \ln^2 (H - |y|) + 1], \quad t \geqslant 0, \ 0 < r \leqslant 1, \ |y| < H$$

Величины C_1 и C_2 определяются здесь конечными и постоянными, если интервал времени $(0, t_0)$, $t_0 < \infty$, фиксирован (поскольку ω затухает со временем, в действительности можно выбрать C_1 и C_2, не зависящими от интервала времени).

При $t \geqslant 0$, $0 \leqslant r < 1$, $|y| < H$ функция ω бесконечно дифференцируема по всем переменным (с обращением в нуль всех производных при $t = 0$), дифференцировать можно под знаком интеграла (1.3) и непосредственно проверяется, что последний удовлетворяет уравнению (1.1).

Для исследования дифференциальных свойств ω при $t > 0$ удобно в (1.3) деформировать контур интегрирования, оставляя слева от него все корни $\varphi(z)$, в такой новый контур, чтобы при достаточно больших $|z|$ все его точки находились в секторах ($\pi - \varepsilon > \arg z > {}^1/_2\pi + \varepsilon$), ($-\pi + \varepsilon < \arg z < -{}^1/_2\pi - \varepsilon$), $\varepsilon > 0$. Тогда обнаружится аналитичность ω по t при $t > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|y| \leqslant H$ и по всем переменным при $t > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $|y| < H$. В частности, аналитической функцией будет угловая скорость твердой поверхности $\omega_0(t)$ при $t > 0$. Все производные по t, $\omega_t{}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $t > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $y \leqslant H$ при указанной замене контура интегрирования в (1.3) могут быть найдены дифференцированием под знаком интеграла (при вычислении ω_t заменять контур не обязательно). Теперь проверка уравнения (1.2) при $t > 0$ проходит без затруднений, завершая обоснование того факта, что интеграл (1.3) есть решение задачи.

Согласно (1.2) угловое ускорение $\omega_0'(t)$ непрерывно при $t \geqslant 0$, обращаясь в $-A_0$ при $t = 0$, так что ω_t убывает скачком от нулевого значения до $-A_0$ при переходе изнутри сечения $t = 0$ на граничные линии, соответствующие твердой поверхности.

§ 2. Спектр задачи. Переходим к исследованию характеристического уравнения $\varphi(z) = 0$ колебаний цилиндра при произвольных положительных значениях параметров H, η, ν. Совокупность корней $\varphi(z)$ исчерпывает точки спектра, т. е. значения комплексного параметра z, для которых уравнение (1.1) имеет ограниченные решения вида $\omega = \mathrm{Re}\,[e^z f\cdot(r, y, z)]$ с предельным условием (1.2).

Ниже сформулирован основной результат предлагаемой работы.

Теорема. При любых положительных значениях параметров η, H, ν корни $\varphi(z)$ исчерпываются счетным множеством отрицательных корней

$$k_p \in (\zeta_{p+1}, \zeta_p), \qquad \varphi'(k_p) < 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

и парой мнимых сопряженных корней

$$k_0 = -\alpha + \beta i, \ \bar{k}_0 = -\alpha - \beta i, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \varphi'(k_0) \neq 0.$$

Если параметры $H > 0$, $\nu > 0$ фиксированы, а параметр η, $0 \leqslant \eta < \infty$ возрастает, то корень $k_0(\eta)$, выходя из начального положения $z = i$, перемещается на плоскости по непрерывной траектории без кратных точек, асимптотически касающейся мнимой оси в своей предельной точке $z = 0$ при $\eta \to \infty$.

Доказательству этого предложения предпошлем три леммы.

Лемма 2.1. На плоскости z существует такая последовательность окружностей Γ_m, $m = 1, 2, \ldots$, с центром $z = 0$ и неограниченно возрастающим радиусом, что на $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \ldots$ при $z \to \infty$

$$\varphi(z) = z^2 + o(z^2)$$

Лемма 2.2. В каждом интервале (ζ_{p+1}, ζ_p) между полюсами ζ_p $(p = 1, 2,\ldots)$ функция $\varphi(z)$ имеет один и только один корень k_p. На луче $\zeta_1 < z < \infty$ указанная функция положительна.

Лемма 2.3. При любых фиксированных $H > 0$, $\nu > 0$ и достаточно больших $\eta \to \infty$, в круге $|z| \leqslant \varepsilon(\eta)$ $(\lim \varepsilon(\eta) = 0, \lim \eta\, [\varepsilon(\eta)]^2 = \infty)$ функция $\varphi(z)$ имеет два и только два корня k_0, $\overline{k}_0$, причем

$$k_0 = \sqrt{2\nu/\eta H}\, i\, [1 + o(1)]$$

Главная трудность состоит в доказательстве 2.1 и 2.2. Сама же теорема при использовании лемм доказывается просто. Пользуясь леммой 2.1 с учетом принципа аргумента, можно выбрать такой номер контура m_0, что при всех $m \geqslant m_0$ разность чисел корней и полюсов $\varphi(z)$ внутри Γ_m равна двум; отсюда по лемме 2.2 функция $\varphi(z)$, кроме отрицательных корней, имеет два мнимых корня $k_0, \overline{k}_0$ и не имеет других корней. Асимптотическое поведение корня k_0 при фиксированных положительных H, ν и $\eta \to \infty$ описано в лемме 2.3. Непрерывность траектории $k_0(\eta)$, $\eta \in [0, \infty]$, $k_0(0) = i$, $k_0(\infty) = 0$, очевидна. Отсутствие на ней кратных точек вытекает из однозначности выражения η через k_0.

Условие $\operatorname{Re} k_0 < 0$, физически очевидное, может быть формально обосновано, например, так. Выделим из (1.3) сумму вычетов подынтегральной функции относительно k_0, $\overline{k_0}$

$$\omega(t, r, y) = B_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \vartheta) + \chi(t, r, y)$$

$$\vartheta = \arg \frac{\Psi(r, y, k_0)}{\varphi'(k_0)}, \qquad B_0 = \frac{-2A_0 |\Psi(r, y, k_0)|}{|\varphi'(k_0)|}$$

$$\chi(t, r, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_Q \frac{-A_0 \Psi}{\varphi} e^{zt}\, dz$$

Контур Q образован двумя полупрямыми,

$$\arg z = \pi + \varepsilon, \ \infty > |z| \geqslant 0; \qquad \arg z = \pi - \varepsilon, \ 0 \leqslant |z| < \infty$$
$$(0 < \varepsilon < \pi/2, \ \ \varepsilon < \pi - \arg k_0, \ \ 0 < \arg k_0 < \pi)$$

Функции $r\chi_r$ и $r\chi_y$ при $t \to \infty$ стремятся к нулю равномерно относительно r, y, а функция $\Psi(r, y, k_0)$ зависит от переменных r, y, ибо удовлетворяет уравнению

$$\Psi_{rr} + \frac{3}{r}\Psi_r + \Psi_{yy} - \frac{k_0}{\nu}\Psi = 0$$

и обращается в единицу на поверхности твердого цилиндра. Поэтому условие $\operatorname{Re} k_0 \geqslant 0$ противоречит следующему энергетическому равенству, вытекающему из постановки задачи и верному при всех $t \geqslant 0$:

$$\omega_0^2(t) + 2A_0 \int\limits_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau + \left[\int\limits_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau\right]^2 +$$
$$+ \frac{\eta}{\nu} \int\limits_{-H}^{H} \int\limits_0^1 r^3 \omega^2\, dr\, dy + 2\eta \int\limits_0^t \int\limits_{-H}^{H} \int\limits_0^1 r^3 [(\omega_r)^2 + (\omega_y)^2]\, dr\, dy\, dt = 0$$

Доказательство леммы 2.1. Фиксируем произвольные положительные значения параметров H, η, ν. Заменим переменную z на $u = bi$. На каждом интервале (α_m, α_{m+1}), $m = 1, 2, \ldots,$ между положительными корнями функции $J_1(u)$ выделим подынтервал (β_m, β_{m+1}) так, чтобы каждый из отрезков (α_m, β_m), (β_m, β_{m+1}), $(\beta_{m+1}, \alpha_{m+1})$ имел длину больше некоторого положительного числа l, одного и того же для всех m.

По некоторому δ, $0 < \delta < 1/4$, на каждой полуплоскости

$$w_n = b_n H \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad 0 \leqslant \arg b_n \leqslant \pi$$

построим круги $\{\varepsilon_q^{(m)}\} = \{|w_n - (2q-1)\pi i/2| \leqslant \delta/m\}$ $(q = 1, 2, \ldots)$

Легко проверить, что образ круга $\{\rho_q^{(m)}\}$ в преобразовании $w_n \to u$, $|\arg u| \leqslant \pi/2$ оказывается внутри круга

$$\{R_{nq}^{(m)}\} = \left\{|u - \xi_{nq}| \leqslant K_{nq}\frac{\delta}{m}\right\}$$

$$\varepsilon_{nq} = \left(\alpha_n^2 + \frac{\pi^2}{4H^2}(2q-1)^2\right)^{1/2}, \qquad K_{nq} = \frac{\pi(2q-1)}{H^2\xi_{nq}} < \frac{2}{H}$$

и что сумма диаметров кругов $\{R_{nq}^{(m)}\}$ с центрами $\xi_{nq} \in (\beta_m, \beta'_{m+1})$

$$S_m < 4\left(\frac{L}{\pi}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}} + \frac{1}{H}\right)\delta, \qquad L = \sup(\alpha_{m+1} - \alpha_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Выберем окончательно δ таким, что $S_m < 1/2\, l - 4\delta H^{-1}$. Тогда для каждого (β_m, β_{m+1}) сумма $\{\Sigma_m\}$ его подынтервалов, лежащих вне кругов $\{R_{nq}^{(m)}\}$, имеет меру $\operatorname{mes}\{\Sigma_m\} > l/2$, т. е. заведомо не пуста.

На окружностях P_m с центром $u = 0$, пересекающих (β_m, β_{m+1}) в точках $\gamma_m \in \{\Sigma_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, равномерно относительно m, γ_m, N выполнены оценки

$$\left|\frac{J_1'(u)}{J_1(u)}\right| < C_3, \qquad |\operatorname{th}|w_n|| < C_4|u|$$

$$|\varphi(z) - z^2| < 1 + C_5(|u|^2 + |u|^3 + |f(u)|), \qquad f(u) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^6 \operatorname{th} w_n}{\alpha_n^2(u^2 - \alpha_n^2)^{3/2}}$$

При $m > 2N + 1$, на P_m равномерно относительно m, γ_m, N,

$$|f(u)| < C_6\left\{|u|^3\sum_{n=1}^{n=N}\frac{|\operatorname{th} w_n|}{n^2} + |u|^4\sum_{n=N+1}^{n=[m/2]}\frac{1}{n^2} + \right.$$

$$\left. + |u|^{7/2}\left[\sum_{n=[m/2]+1}^{n=m}\frac{1}{(1+m-n)^{3/2}} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n-m)^{3/2}}\right]\right\}$$

Задаем какую-либо последовательность положительных чисел $\varepsilon_s \to 0$, $s = 1, 2, \ldots$. По ε_s определим $N = N_s$ так, что

$$\sum_{n=N_s+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \varepsilon^s$$

При $n \leqslant N_s$, $s = 1, 2, \ldots$, построим круги

$$\{T_{nq}^{(s)}\} = \{|u - \xi_{nq}| \leqslant K_{nq}\delta_s\}$$

фиксируя положительные числа $\delta_s \leqslant \delta$ такими, что множество $\{\Sigma_m^{(1)}\}$, которое остается после удаления из $\{\Sigma_m\}$ точек, принадлежащих кругам $\{T_{nq}^{(s)}\}$, не пустое при любом $m = 1, 2, \ldots$. Окончательно выберем окружности P_m, приняв $\gamma_m \in \{\Sigma_m^{(1)}\}$. Тогда

$$|f(u)| < C(s)|u|^3 + C_6\varepsilon_s|u|^4 + C_7|u|^{7/2}$$

$$u \in P_m, \qquad s = 1, 2, \ldots, \qquad m = 2N_s + 2,\ 2N_s + 3, \ldots$$

На совокупности окружностей Γ_m, являющихся образами на плоскости z окружностей P_m, при $z \to \infty$ и любом фиксированном $s = 1, 2, \ldots$

$$|\varphi(z) - z^2| = C_8\varepsilon_s|z|^2 + o(|z|^2)$$

что равносильно утверждению леммы 2.1, поскольку C_8 не зависит от s.

Доказательство леммы 2.2. При $z < 0$

$$\varphi(z) = 1 + \frac{4\mu\nu^2}{H^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \varphi_n(z), \qquad \varphi_n(z) = \Phi_n(x_n)$$

$$\Phi_n = (x_n^2 + c_n^2)^3 \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{x_n^3} + \alpha_n^2 r_n (x_n^2 + c_n^2)^2$$

$$z < -\nu\alpha_n^2, \qquad x_n = b_n H i < 0$$

$$\Phi_n = (c_n^2 - x_n^2)^3 \frac{x_n - \operatorname{th} x_n}{x_n^3} + \alpha_n^2 r_n (c_n^2 - x_n^2)^2$$

$$-\nu\alpha_n^2 \leqslant z < 0, \qquad 0 \leqslant x_n = b_n H < c_n = \alpha_n H$$

Здесь r_n выбраны таким образом, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{1}{4H\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}, \qquad r_n \geqslant \frac{1}{\alpha_n^2}$$

При этом для $x < 0$, $\cos x \neq 0$ (индекс n условно не проставляем)

$$\Phi'(x)\, x^4 \cos^2 x \leqslant (x^2 + c^2)\, [x^5 + 3\, x^4 \sin x \cos x +$$
$$+ 2c^2 x^3 \sin^2 x + c^4 (1 + 2\cos^2 x)\, x^3 - 3c^4 \sin x \cos x]$$

Если $x \leqslant -\pi/2 < -3/2$

$$x^5 + 3x^4 \sin x \cos x < 0, \qquad f(x) \equiv (1 + 2\cos^2 x)\, x - 3 \sin x \cos x < 0$$

При $-\pi/2 < x < 0$ функция $f(x)$ также отрицательна, так как мотононно возрастает от $-\pi/2$ до нуля

$$f'(x) = 2 \sin 2x\, (\operatorname{tg} x - x) > 0$$

Поэтому при $x_n < 0$, $\cos x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\Phi_n'(x_n) < 0, \qquad \varphi_n'(z) = -\frac{H^2}{2\nu x_n} \Phi_n'(x_n) < 0$$

Используя равенство

$$\left(\frac{x - \operatorname{th} x}{x^3}\right)' = x^{-3} \operatorname{ch}^{-2} x \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{2k}, \qquad a_k > 0, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

получим также, что при $0 \leqslant x_n < c_n$

$$\varphi_n'(z) = \frac{H^2}{2\nu x_n} \Phi_n'(x_n) < 0$$

Итак, при $z < 0$, $z \neq \zeta_p$, $p = 1, 2, \ldots,$ каждая из функций $\varphi_n(z)$ имеет отрицательную производную и $\varphi'(z) < 0$. На интервале $(\zeta_1, 0)$ функция $\varphi(z)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 1 и, следовательно, положительна.

Если $z > 0$, то $\varphi(z) > 0$, например, потому, что

$$-1 + b\frac{I_1'(b)}{I_1(b)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z + \nu\alpha_n^2} > 0$$

Доказательство леммы 2.3. При $H = \text{const} > 0$, $\nu = \text{const} > 0$, $\eta \to \infty$, $z \to 0$

$$\varphi(z) = c\eta z^2 + 1 + o(c\eta z^2), \qquad c = \frac{H}{2\nu}$$

На окружности $|z| = \varepsilon(\eta)$ величина $c\eta z^2 \to \infty$ при $\eta \to \infty$, поэтому при достаточно больших η функция $\varphi(z)$ имеет в круге $|z| \leqslant \varepsilon(\eta) < \nu\alpha_1^2$ два и только два корня k_0, $\overline{k_0}$, $\operatorname{Im} k_0 > 0$, причем

$$c\eta k_0^2\, [1 + o(1)] = -1$$

Примечание. В размерных величинах $c\eta = K_*' / K_*$, где $K_*' = \pi\mu_* R_*^4 H_*$ — момент инерции жидкой массы в цилиндре. Полученная асимптотика $k_0 = \sqrt{K_*' / K_*}\, i\ [1 + o(1)]$ имеет ясный физический смысл: при большой вязкости η_* цилиндр с жидкостью может совершать колебания как единое твердое тело с моментом инерции $K_* + K_*'$, и для $K_*' \gg K_*$ период колебаний возрастает приблизительно в $\sqrt{K_*' / K_*}$ раз по сравнению с периодом колебаний цилиндра без вязкой жидкости.

§ 3. Спектральное разложение угловой скорости цилиндра. Из леммы 2.1 следует, что интеграл (1.3) при $\Psi = 1$ может быть представлен для всех $t \geqslant 0$ рядом из вычетов подынтегральной функции относительно ее полюсов k_0, $\bar{k}_0$, k_p, $p = 1, 2, \ldots$

$$\omega_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{-A_0 e^{zt}}{\varphi(z)}\, dz = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \vartheta_0) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{k_p t} \tag{3.1}$$

$$\vartheta_0 = -\arg \varphi'(k_0), \qquad k_0 = -\alpha + \beta i \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \qquad k_p < 0$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p = -a_0 \cos \vartheta_0, \qquad a_p = -\frac{A_0}{\varphi'(k_p)} > 0, \qquad a_0 = -\frac{2A_0}{|\varphi'(k_0)|} < 0$$

Угловое отклонение твердого цилиндра найдем почленным интегрированием ряда (3.1)

$$\underset{t \geqslant 0}{A(t)} = A_0 + \int\limits_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau = c_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \vartheta_1) + \sum_{p=1}^{\infty} c_p e^{k_p t} \tag{3.2}$$

$$c_p = \frac{a_p}{k_p} < 0, \quad c_0 \cos \vartheta_1 = A_0 - \sum_{p=1}^{\infty} c_p, \quad |c_0| > A_0, \quad |c_0| > |c_p| \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

Рассмотрим главные при $t \to \infty$ члены в (3.2)

$$A(t) \approx c_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \vartheta_1) + c_1 e^{k_1 t}$$

Если $-\alpha \geqslant k_1$, то, при сколь угодно больших t, $A(t)$ колеблется между положительными и отрицательными значениями. Если же $-\alpha < k_1$, то при достаточно больших t, $A(t) < 0$ и, следовательно, будучи аналитической функцией, $A(t)$ меняет знак на всем луче $t > 0$ конечное и притом нечетное число раз. Первый вариант реализуется, например, когда при фиксированных H, ν параметр η достаточно мал; второй — когда фиксированы значения H, η^2 / ν и мал параметр ν или, например, при фиксированных H, $\mu = \eta / \nu$ и малом η.

Поступила 18 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Okaya T., Hasegawa M. On the motion of liquid in a hollow cylinder caused by the torsional vibration. Japan. Journ. Phys., 1936, vol. 11, No. 1, p. 13—22.
2. Швидковский Е. Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. М., Гостехиздат, 1955.
3. Иванов А. Б., Русанов Б. В. Нестационарные вращения вязкой жидкости квазитвердыми поверхностями. Вестн. Ленингр. ун-та, 1968, № 13, вып. 3, стр. 82—87.