Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОБ ОДНОМ ВИДЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Рассматривается задача об установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости конечной постоянной глубины.

Впервые эту задачу, но для потока бесконечной глубины, поставил и приближенно решил Л. Н. Сретенский [1] в 1953 г. Строгое решение задачи для потока бесконечной глубины и для распределения давления более общего вида на поверхности дано в работе [2]. Ниже приводится строгое решение задачи. Как и в случае бесконечной глубины, давление задается некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Исследуется также и особый случай, когда длина волны заданного давления совпадает с длиной установившейся свободной волны, отвечающей взятой скорости и постоянному давлению на поверхности. Краткое изложение полученных результатов дано в статье [3].

§ 1. Постановка задачи и вывод основного интегрального уравнения. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной постоянной глубины h, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление $p = p_0(x)$ будет заданной периодической функцией от горизонтальной координаты x. Предположим, что поток обладает на горизонтальном дне постоянной заданной средней скоростью c, направленной слева направо.

Благодаря периодически распределенному давлению, поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$.

Пусть искомая волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось y с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$.

Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathbf{q}$ на оси координат. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -U + iV, \qquad U = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad V = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Для вывода из граничного условия основного уравнения задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальный прямоугольник, ограниченный сверху волнообразной кривой, на прямоугольник

$$|\varphi| \leqslant {}^1/_2 c\lambda, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$$

(здесь $\psi = \psi_0$ — расход потока в единицу времени), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в начале координат плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$.

Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.1}$$

При этом отрезок $|\varphi| \leqslant {}^1/_2\, c\lambda$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга радиуса единицы, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса

$$r_0 = \exp(-2\pi \psi_0/\varphi_0) = \exp(-2\pi h/\lambda)$$

меньшего единицы. Кольцо будет иметь разрез вдоль отрезка $(-1, -r_0)$.

Отображение этого кольца плоскости u на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{f(u)}{u} \tag{1.2}$$

Функция $f(u)$ представляется рядом Лорана внутри рассматриваемого кольца плоскости u. Коэффициенты этого ряда должны быть действительны в силу симметрии волны; при этом удовлетворится и граничное условие непротекания на дне.

Используя интеграл Бернулли для поверхности, перейдя в нем к переменному u, полагаем $u = e^{i\theta}$; учтя, что на поверхности $p = p_0(x)$, после дифференцирования по θ имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -g \frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{dq^2}{d\theta} \tag{1.3}$$

Здесь θ — угол радиуса вектора на плоскости u, с осью u_1, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, q — модуль вектора скорости.

Как обычно, путем введения функции [4]

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u) \tag{1.4}$$

Из (1.4) и (1.2) находим, что при $u = e^{i\theta}$

$$\frac{dx}{d\theta} + i \frac{dy}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau(\theta)} (\cos\Phi + i \sin\Phi) \tag{1.5}$$

Из формул (1.4), (1.2) и (1.1) следует, что всюду в потоке Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью x, и что

$$q = ce^{\tau} \tag{1.6}$$

В силу (1.5), (1.6) из уравнения (1.3) получим дифференциальное соотношение, интегрируя которое, вводим вместо постоянного интегрирования, параметр

$$\mu = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2} e^{-3\tau(0)} \tag{1.7}$$

связанный с аддитивной константой у $p_0(x)$.

Беря логарифмическую производную от обеих частей пополучившегося интегрального соотношения, находим

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\mu [\sin \Phi + Q (\theta) \cos \Phi]}{3} \left[1 + \mu \int_0^\theta (\sin \Phi + Q \cos \Phi)\, d\eta\right]^{-1} \tag{1.8}$$

где

$$Q (\theta) = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0}{dx} \tag{1.9}$$

Равенство (1.8) дает связь на окружности $|u| = 1$ между действительной и мнимой частями аналитической функции $\omega (u)$ из (1.4) регулярной внутри кольца, для которого окружность $|u| = 1$ будет внешней границей.

Из теории аналитических функций известно, что между $\Phi (\theta)$ и $d\tau/d\theta$ должно выполняться соотношение Дини вида

$$\Phi (\theta) = 3 \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\eta} K (\eta, \theta)\, d\eta, \qquad K(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n (\eta)\, \varphi_n (\theta)}{\nu_n} \tag{1.10}$$

при этом собственные функции $\varphi_n (\theta)$ и собственные числа ν_n ядра $K (\eta, \theta)$ даются формулами

$$\varphi_n (\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \qquad \nu_n = 3n \operatorname{cth}\left(2\pi n \frac{h}{\lambda}\right) \tag{1.11}$$

Из (1.8) и (1.10) имеем окончательно

$$\begin{gathered}\Phi (\theta) = \mu \int_0^{2\pi} H [\Phi (\eta), \eta] \left[1 + \mu \int_0^\eta H [\Phi, \eta_1]\, d\eta_1\right]^{-1} K (\eta, \theta)\, d\eta \\ H [\Phi (\eta), \eta] = \sin \Phi (\eta) + Q (\eta) \cos \Phi (\eta)\end{gathered} \tag{1.12}$$

Это и есть интегральное уравнение задачи. Из него при $p_0 = \mathrm{const}$ получается уравнение А. И. Некрасова [4] для конечной глубины.

При решении уравнения (1.12) предполагаем , что

$$Q (\theta) = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \sin n\theta \tag{1.13}$$

где ε — малый безразмерный положительный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем бесконечный ряд

$$\varepsilon |d_1| + \varepsilon^2 |d_2| + \varepsilon^3 |d_3| + \ldots$$

сходится в круге радиуса $\varepsilon_0 > 0$.

Заметим, что в исходной задаче p_0— заданная с точностью аддитивной константы периодическая функция x. Можно, показать, что решение изучаемой задачи при условии (1.13) соответствует заданию ряда

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n c_n' \sin\frac{2\pi n}{\lambda} x, \qquad c_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c_{mn}'$$

При этом либо коэффициенты c_{0n}' можно считать заданными и по ним определить d_n, либо, наоборот; коэффициенты c_{mn}' ($m = 1, 2, \ldots$) определяются через d_n. Если же полагать

$$d_n = d_{0n} + \varepsilon d_{1n} + \varepsilon^2 d_{2n} + \cdots$$

(здесь этого не делаем), то и c_{mn}' ($m = 1, 2, \ldots$) можно считать заданными и по ним определить d_{in} ($i = 1, 2, \ldots$), либо наоборот.

Параметрическое уравнение профиля волны получается из (1.5) в виде

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos\Phi(\eta)\, d\eta, \qquad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\tau(\eta)} \sin\Phi(\eta)\, d\eta \qquad (1.14)$$

Формулы (1.14) показывают, что при решении задачи, кроме Φ, необходимо найти и $\tau(\theta)$. Обе эти функции представляются следующими тригонометрическими рядами:

$$-\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \qquad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \qquad (1.15)$$

Из разложения в ряд Лорана функции $\ln f(u) = i\omega(u)$ получаются следующие соотношения между коэффициентами этих рядов:

$$A_n = \frac{\nu_n}{3n} B_n \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (1.16)$$

Таким образом, зная B_n, можно найти все A_n, кроме A_0.

Преобразуем формулу (1.7). Положив

$$\mu_0 = \frac{3}{2}\frac{g\lambda}{\pi c^2} \qquad (1.17)$$

из уравнений (1.15) (1.17) и (1.7) имеем

$$\mu = \mu_0 \exp\left[3\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] \qquad (1.18)$$

Полагая в правой части первой формулы (1.14) $\theta = 2\pi$ в левой ее части должны получить $-\lambda$, так как при этом x уменьшается на λ. Таким путем получаем следующее уравнение для определения A_0:

$$\exp(-A_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[-\tau(\eta) - A_0] \cos\Phi(\eta)\, d\eta \qquad (1.19)$$

при этом $-\tau(\eta) - A_0$ в силу (1.15) не содержит A_0.

Положив

$$\Psi(\theta)=\left[1+\mu\int_0^\theta H[\Phi,\eta]\,d\eta\right]^{-1} \tag{1.20}$$

сводим, как и в случае бесконечной глубины [2], уравнение (1.12) к эквивалентной системе из двух уравнений с неизвестными функциями $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$. Для этого, дифференцируя (1.20) по θ, получаем

$$\Psi'(\theta)=-\mu\Psi^2(\theta)\,H[\Phi(\theta),\ \theta]$$

Интегрируя обе части этого уравнения по θ и замечая, что при $\theta=0$ должно быть $\Psi(0)=1$, будем иметь

$$\Psi(\theta)=1-\mu\int_0^\theta \Psi^2(\eta)H[\Phi,\eta]\,d\eta \tag{1.21}$$

В силу (1.20) уравнение (1.12) примет вид

$$\Phi(\theta)=\mu\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)H[\Phi,\eta]\,\Psi(\eta)\,d\eta \tag{1.22}$$

Как можно было бы убедиться, система уравнений (1.21), (1.22) эквивалентна одному уравнению (1.12).

Приведем к окончательному виду уравнение (1.18). Положим

$$\mu=\mu_0\left\{\exp\left[3\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right]-1+1\right\}=\mu_0(1+\mu') \tag{1.23}$$

$$\mu'=\exp\left[3\left(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right]-1 \tag{1.24}$$

Из (1.19) и (1.15) имеем

$$\exp(-3A_0)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\eta\right)\cos\Phi(\eta)\,d\eta\right]^3 \tag{1.25}$$

В силу (1.25) уравнение (1.24) примет окончательный вид:

$$\mu'=\exp\left(3\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\eta\right)\cos\Phi(\eta)\,d\eta\right]^{-3}-1 \tag{1.26}$$

Таким образом, задача свелась к определению функций $\Phi(\theta,\varepsilon)$ и $\Psi(\theta,\varepsilon)$ из системы уравнений (1.21), (1.22), параметра $\mu(\varepsilon)$ из (1.26) и (1.23) и коэффициента $A_0(\varepsilon)$ из (1.19). При решении приходится рассматривать два случая: в первом случае $\mu_0\neq\nu_n$, во втором $\mu_0=\nu_n$.

В следующих двух параграфах показано, что в первом случае решение $\Phi(\theta,\varepsilon)$, $\Psi(\theta,\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае в качестве примера рассматривается значение $\mu_0=\nu_1$.

Здесь решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях методами Ляпунова — Шмидта [6] доказано, что эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и что они дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи (теоремы 1 и 2; здесь ε_1 меньшее из чисел ε_3' и ε_4'').

§ 2. Решение в случае $\mu_0 \neq \nu_n$. В этом так называемом регулярном случае систему уравнений (1.22) и (1.21) перепишем в виде

$$\Phi(\theta) = \mu_0(1+\mu')\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)[\Phi(\eta)+P(\eta)]\,d\eta \tag{2.1}$$

$$\Psi^*(\theta) = -\mu_0(1+\mu')\int_0^{\theta}\{\Phi(\eta)+\varepsilon d_1\sin\eta + F_1[\Phi(\eta),\Psi^*(\eta),\varepsilon]\}\,d\eta$$

где

$$\Psi^*(\theta) = \Psi(\theta)-1, \qquad P(\eta) = \varepsilon d_1\sin\eta + F[\Phi(\eta),\ \Psi^*(\eta),\ \varepsilon] \tag{2.2}$$

$$F[\Phi(\eta),\Psi^*(\eta),\varepsilon] = \sin\Phi(\eta) - \Phi(\eta) + Q(\eta)(\cos\Phi-1) + $$
$$+ Q(\eta) - \varepsilon d_1\sin\eta + \Psi^*(\eta)\,H[\Phi(\eta),\eta],\quad F_1[\Phi(\eta),\Psi^*(\eta),\varepsilon] =$$
$$= Q\cos\Phi - \varepsilon d_1\sin\eta + \sin\Phi - \Phi + [\Psi^{*2}(\eta) + 2\Psi^*(\eta)]\,H[\Phi(\eta),\eta]$$

Преобразуем первое уравнение (2.1). Оно, очевидно, эквивалентно следующему уравнению:

$$\Phi(\theta)+P(\theta) = \mu_0(1+\mu')\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)[\Phi(\eta)+P(\eta)]\,d\eta + P(\theta) \tag{2.3}$$

Обозначим через $R[\theta,\eta,\mu_0(1+\mu')]$ резольвенту линейного интегрального уравнения с ядром $K(\eta,\theta)$ и параметром $\mu_0(1+\mu')$. Тогда, следуя методу Ляпунова — Шмидта, представим уравнение (2.3), а следовательно, и (2.1) в следующей эквивалентной форме:

$$\Phi(\theta) = \mu_0(1+\mu')\int_0^{2\pi} R[\eta,\theta,\mu_0(1+\mu')]\,P(\eta)\,d\eta \tag{2.4}$$

Представим резольвенту R в явном виде. Для этого воспользуемся формулой для резольвенты $\Gamma(x,y;\lambda)$, справедливой в случае симметричного ядра $K(x,y)$ (см., например, Гурса [6])

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}$$

В рассматриваемом случае $x=\eta$, $y=\theta$, $\lambda=\mu_0(1+\mu')$, $\lambda_n=\nu_n$ резольвента обозначена через R и ядро $K(\eta,\theta)$ дается формулой (1.10). Поэтому имеем

$$R[\eta,\theta;\mu_0(1+\mu')] = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta\sin n\theta}{\nu_n-\mu_0(1+\mu')} \tag{2.5}$$

Для приведения уравнения (2.4) к окончательному виду подставим в него выражение $P(\eta)$ из (2.2)

$$\Phi(\theta) = \varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R[\eta, \theta, \mu_0(1 + \mu')] \sin \eta \, d\eta +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R[\eta, \theta, \mu_0(1 + \mu')] F[\Phi(\eta), \Psi^*(\eta), \varepsilon] \, d\eta$$

Пользуясь формулой (2.5), имеем

$$\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R[\eta, \theta, \mu_0(1 + \mu')] \sin \eta \, d\eta = \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')}$$

Поэтому предыдущее уравнение принимает следующий окончательный вид:

$$\Phi(\theta) = \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} \sin \theta +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R[\eta, \theta, \mu_0(1 + \mu')] F[\Phi(\eta), \Psi^*(\eta, \varepsilon)] \, d\eta \qquad (2.6)$$

Преобразуем второе уравнение системы (2.1). Выполнив в его правой части интегрирования и очевидные преобразования, представляем его в виде

$$\Psi^*(\theta) = \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} (\cos \theta - 1) -$$

$$- \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} \left[\Phi(\eta) - \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} \sin \eta \right] d\eta -$$

$$- \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} F_1 [\Phi(\eta), \Psi^*(\eta), \varepsilon] \, d\eta \qquad (2.7)$$

Сначала будем решать систему (2.6) и (2.7), считая параметры ε и μ' заданными малыми по модулю действительными величинами, а затем будем определять $\mu'(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось соотношение (1.26).

Решая систему (2.6), (2.7) методом последовательных приближений, за первое приближение принимаем

$$\Phi^{(1)}(\theta) = \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} \sin \theta \qquad (2.8)$$

$$\Psi^{*(1)}(\theta) = \mu_0 (1 + \mu') \varepsilon d_1 (\cos \theta - 1) + \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} \Phi^{(1)}(\eta) \, d\eta =$$

$$= \frac{\mu_0 \nu_1 (1 + \mu') \varepsilon d_1}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} (\cos \theta - 1) \qquad (2.9)$$

Любое приближение конечного номера $k > 1$ определяем следующими формулами:

$$\Phi^{(k)}(\theta) = \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} \sin\theta +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R [\eta, \theta, \mu_0 (1 + \mu')] F [\Phi^{(k-1)}, \Psi^{*(k-1)}, \varepsilon] \, d\eta \qquad (2.10)$$

$$\Psi^{*(k)}(\theta) = \frac{\nu_1 \mu_0 (1 + \mu') \varepsilon d_1}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} (\cos\theta - 1) -$$

$$- \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} \left[\Phi^{(k)}(\eta) - \frac{\varepsilon d_1 \mu_0 (1 + \mu')}{\nu_1 - \mu_0 (1 + \mu')} \sin\eta \right] d\eta -$$

$$- \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} F_1 [\Phi^{(k-1)}(\eta), \Psi^{*(k-1)}(\eta), \varepsilon] \, d\eta \qquad (2.11)$$

Методом математической индукции можно показать, что величины $\Phi^{(k)}(\theta), \Psi^{*(k)}(\theta)$ будут аналитическими функциями относительно ε и μ' при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $|\mu'| < \mu^0$.

Обычным путем можно доказать, что последовательные приближения сходятся к решению $\Phi(\theta, \varepsilon, \mu')$, $\Psi^*(\theta, \varepsilon, \mu')$ системы (2.6), (2.7). Это решение будет единственным малым относительно ε и μ' и непрерывным относительно θ решением системы. Обе эти функции будут аналитическими относительно ε и μ' при $|\varepsilon| < \varepsilon_1' \leqslant \varepsilon_0$ и $|\mu'| < \mu^0$. Для явного составления уравнения (1.26) необходимо убедиться, что ряд $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ сходится. Для этого надо найти $\tau(\theta)$ из (1.15). Из предыдущего вытекает, что производная $d\tau / d\theta$, определяемая формулой (1.8), будет функцией непрерывной, по θ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и аналитической по ε и μ'. Поэтому функция $\tau(\theta)$ представима первым рядом (1.15) абсолютно и равномерно сходящимся, а члены его и сумма будут аналитическими функциями ε и μ' при $|\varepsilon| < \varepsilon_1'$ и $|\mu'| < \mu^0$. Кроме того, второй ряд (1.15) для $\Phi(\theta)$ обладает теми же свойствами. Таким образом, ряд $A_1 + A_2 + \ldots$ будет сходящимся и правая часть уравнения (1.26) будет аналитической функцией от ε и μ'. При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.26) имеет решение $\mu' = 0$. С другой стороны, перенося в уравнении (1.26) все члены в левую часть и обозначив ее через $G(\varepsilon, \mu')$, получаем

$$G(\varepsilon, \mu') = 0 \qquad (2.12)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \mu'} \right)_{\varepsilon = \mu' = 0} = 1$$

то, применяя теорему о неявных функциях, имеем, что уравнение (2.12), а следовательно, и (1.26) при малых значениях ε имеет единственное решение $\mu'(\varepsilon)$, удовлетворяющее условию

$$\lim \mu'(\varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

и это решение при $|\varepsilon| < \varepsilon_2' \leqslant \varepsilon_1'$ будет аналитической функцией ε.

Подставляя это выражение $\mu'(\varepsilon)$, получим, что $-\tau(\theta) - A_0{}'$ и $\Phi(\theta)$ будут рядами по степеням ε. Следовательно, в силу (1.19), выражение $\exp(-A_0) = \chi(\varepsilon)$ также будет аналитической функцией от ε и, так как по условию $\lim A_0 = 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\chi(0) = 1$. Поэтому $-A_0 = \ln \chi(\varepsilon)$ будет также аналитической функцией от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_3' \leqslant \varepsilon_2'$.

С другой стороны, заметим, что в уравнении (2.6) и (2.7) параметр μ' имел произвольные фиксированные, но малые по модулям значения. Найдя μ' из (1.23) определим μ. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Система уравнений (1.22), (1.21), (1.26) и (1.19) при $\mu_0 \neq \nu_n$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ решение $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\Psi(\theta, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ и это решение будет аналитической функцией от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_3'$.

Из этой теоремы следует, что при решении системы (1.22), (1.21), (1.26) и (1.19) проще всего искать функции $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\Psi(\theta, \varepsilon)$, параметр $\mu'(\varepsilon)$ или $\mu(\varepsilon)$ и коэффициент $A_0(\varepsilon)$ в виде рядов по степеням ε.

Приводим результаты соответствующих вычислений, включая члены с ε^3

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \varepsilon C_{11} \sin\theta + \varepsilon^2 C_{22} \sin 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13} \sin\theta + C_{33} \sin 3\theta)$$

$$\begin{aligned}\Psi^*(\theta, \varepsilon) &= \varepsilon\nu_1 C_{11} (\cos\theta - 1) + \varepsilon^2 [{}^1/_2 \nu_1^2 C_{11}^2 + \mu_0 C_{22} + \\ &+ \mu_0 d_2) (\cos 2\theta - 1) - \nu_1^2 C_{11}^2 (\cos\theta - 1)] + \varepsilon^3 \Psi_3^*(\theta)\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\mu(\varepsilon) &= \varepsilon\nu_1\mu_0 C_{11} + \varepsilon^2 [(15\nu_1^2 + 27)\, {}^1/_{36} C_{11}^2 + {}^1/_2 \nu_2 C_{22}] + \\ &+ \varepsilon^3 \mu_0 [{}^1/_{12}\, \nu_1 C_{11}^3 (\nu_1^2 + 9) + {}^1/_2 \nu_1 \nu_2\, C_{11} C_{22} + \nu_1 C_{13} + {}^1/_3 \nu_3\, C_{33}]\end{aligned}$$

$$A_0(\varepsilon) = -\varepsilon^2\, {}^1/_4\, ({}^1/_9\, \nu_1^2 - 1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{d_1\mu_0}{\nu_1 - \mu_0}, \qquad C_{22} = \frac{1}{\nu_2 - \mu_0} ({}^1/_2 \nu_1^2 C_{11}^2 + \mu_0 d_2) \\ C_{13} &= \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \frac{a_{13}}{\nu_1 - \mu_0}, \qquad C_{33} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \frac{a_{33}}{\nu_3 - \mu_0} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Многочлены a_{13} и a_{33} — линейные относительно величин C_{11}^3, C_{11}^2, C_{11}, C_{22} C_{11} и C_{22}; $\Psi^*_3(\theta)$ — полином линейный относительно $\cos\theta - 1$, $\cos 2\theta - 1$, $\cos 3\theta - 1$ с коэффициентами линейными многочленами относительно C_{13}, C_{33}, C_{11}^3, C_{11}^2, C_{22}, C_{11} C_{22}).

§ 3. Решение в случае $\mu_0 = \nu_1$. В общем случае так называемого ветвления может оказаться, что $\mu_0 = \nu_n$. Однако здесь, в качестве примера ограничиваемся частным случаем, когда $\mu_0 = \nu_1$. Непосредственные вычисления показывают, что в данном случае решение должно строиться в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. Покажем это, применяя развитие общих методов теории ветвления Ляпунова — Шмидта.

Беря первое уравнение системы в форме (2.1), преобразуем в нем ядро по формуле

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{\nu_1\pi} \sin\eta \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{\nu_n} = \frac{1}{\nu_1\pi} \sin\eta \sin\theta + N(\eta, \theta) \tag{3.1}$$

Тогда указанное уравнение примет вид

$$\Phi(\theta) = \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} N(\eta, \theta) [\Phi(\eta) + P(\eta)] d\eta +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \left[\xi \sin\theta + \frac{1}{\nu_1 \pi} \int_0^{2\pi} P(\eta) \sin\eta \, d\eta \sin\theta \right] \tag{3.2}$$

Здесь

$$\xi = \frac{1}{\nu_1 \pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\eta) \sin\eta \, d\eta \tag{3.3}$$

Согласно известной лемме Е. Шмидта [5] число $\mu_0 = \nu_1$ не будет собственным значением ядра $N(\eta, \theta)$.

Уравнение (3.2) эквивалентно следующему:

$$\Phi(\theta) + P(\theta) = \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} N(\eta, \theta) [\Phi(\eta) + P(\eta)] d\eta + P(\theta) +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \left[\xi \sin\theta + \frac{1}{\nu_1 \pi} \int_0^{2\pi} P(\eta) \sin\eta \, d\eta \sin\theta \right] \tag{3.4}$$

Обозначим через $R_1 [\eta, \theta, \mu_0 (1 + \mu')]$ резольвенту линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром $N(\eta, \theta)$ и параметром $\mu_0 (1 + \mu')$. Тогда, следуя методу Ляпунова — Шмидта [5], представим уравнение (3.4) в эквивалентной форме:

$$\Phi(\theta) = \mu_0 (1 + \mu') \left[\xi \sin\theta + \frac{1}{\nu_1 \pi} \int_0^{2\pi} P(\eta) \sin\eta \, d\eta \sin\theta \right] +$$

$$+ \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} R_1 [\eta, \theta, \mu_0 (1 + \mu')] \times$$

$$\times \left\{ P(\eta) + \mu_0 (1 + \mu') \left[\xi \sin\eta + \frac{1}{\nu_1 \pi} \int_0^{2\pi} P(\eta_1) \sin\eta_1 \, d\eta_1 \sin\eta \right] \right\} d\eta \tag{3.5}$$

Заметим, что уравнение (3.5) справедливо при $\mu' = 0$, так как $\mu_0 = \nu_1$ не будет собственным значением ядра $N(\eta, \theta)$. Аналогично случаю резольвенты R п. 1 представим R_1 в явном виде:

$$R_1 [\eta, \theta, \mu_0 (1 + \mu')] = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{\nu_n - \mu_0 (1 + \mu')} \tag{3.6}$$

Второе уравнение системы оставляем в прежней форме (2.1); в том же виде сохраняем уравнения (1.19) и (1.26).

Как и в п. 1, сначала считаем μ' фиксированной малой по модулю величиной и решаем методом последовательных приближений систему из уравнений (3.5) и второго уравнения (2.1). В результате получим функции $\Phi(\theta, \varepsilon, \xi, \mu')$ и $\Psi^* (\theta, \varepsilon, \xi, \mu')$ как аналитические функции от ε, μ' и ξ при $|\varepsilon| < \varepsilon_1'' \leqslant \varepsilon_0$, $|\mu'| < \mu_1^\circ$ и $|\xi| < \xi_1^\circ$. Как и в п. 1, разрешаем уравнение (1.26) относительно μ' и получаем $\mu'(\varepsilon, \xi)$ в виде ряда по степеням ε и ξ при $|\varepsilon| < \varepsilon_2'' \leqslant \varepsilon_1''$ и $|\xi| < \xi_2^\circ \leqslant \xi_1^\circ$. При этом очевидно будут удовлетворяться уравнение (3.5) и второе уравнение (2.1), в которых μ' считалось произвольной малой по модулю действительной величиной. Из уравнения (1.19) определяется $A_0 (\varepsilon, \xi)$ в виде ряда по степеням ε и ξ при $|\varepsilon| < \varepsilon_3'' \leqslant \varepsilon_2''$ и $|\xi| < \xi_3^\circ \leqslant \xi_2^\circ$.

Согласно общей теории Ляпунова — Шмидта [5] для перехода от уравнения (3.5) к исходному первому уравнению (2.1) необходимо параметр ξ выразить через параметр ε, так чтобы удовлетворялось уравнение разветвления, которое получается из уравнения (3.3) путем подстановки в него найденной функции $\Phi\,[\eta,\ \varepsilon,\ \xi,\ \mu'\,(\varepsilon,\ \xi)]$.

Напомним, что, подставив функцию $\xi\,(\varepsilon)$, найденную из уравнения разветвления, в выражения $\Phi\,[\eta,\ \varepsilon,\ \xi,\ \mu'\,(\varepsilon,\ \xi)]$, $\Psi^*\,[\eta,\ \varepsilon,\ \xi,\ \mu'\,(\varepsilon,\ \xi)]$, $\mu'(\varepsilon,\ \xi)$ и $A_0\,(\varepsilon,\ \xi)$, получим решение исходной системы. Таким образом, согласно общей теории, число и вид решений основной системы, как функции от ε, определяется решениями уравнения разветвления. Составим уравнение разветвления. В рассматриваемом случае, как будет видно из дальнейшего, достаточно ограничиться в нем членами с ξ^3. Для этого надо определить из (3.2) следующее приближенное выражение:

$$\Phi\,(\theta,\ \varepsilon,\ \xi) \approx \Phi_{01}\,(\theta)\,\xi + \Phi_{10}\,(\theta)\,\varepsilon + \Phi_{02}\,(\theta)\xi^2 + \Phi_{11}\,(\theta)\,\xi\varepsilon + \Phi_{20}\,(\theta)\,\varepsilon^2 + \Phi_{03}\,(\theta)\xi^3 \tag{3.7}$$

Попутно, с той же степенью точности, необходимо найти $\Psi^*\,(\theta,\ \varepsilon,\ \xi)$, $\mu\,(\varepsilon,\ \xi) = \mu_0\,(1 + \mu')$ и $A_0\,(\varepsilon,\ \xi)$. Опуская все промежуточные вычисления и ограничиваясь в выражении Φ_{03} только членом с $\sin\theta$, необходимым для уравнения разветвления, находим

$$\Phi_{01}\,(\theta) = \mu_0 \sin\theta, \qquad \Phi_{10}\,(\theta) = \frac{\mu_0}{\nu_1}\,d_1 \sin\theta, \qquad \Phi_{02}\,(\theta) = \frac{\mu_0^4}{2\,(\nu_2 - \mu_0)} \sin 2\theta$$

$$\Phi_{11}\,(\theta) = -\,2\mu_0\,d_1 \sin\theta + \frac{2\mu_0^3}{\nu_2 - \mu_0} \sin 2\theta \tag{3.8}$$

$$\Phi_{20}\,(\theta) = -\frac{3\mu_0^2\,d_1^2}{\nu_1} \sin\theta + \frac{\mu_0\,(2\mu_0\,d_1^2 + d_2)}{\nu_2 - \mu_0} \sin 2\theta$$

$$\Phi_{03}\,(\theta) = \frac{\nu_1^3}{24\,(\nu_2 - \nu_1)}\,[(15 - 8\nu_1^2)\,(\nu_2 - \nu_1) + 3\nu_1^2\,(2\nu_2 - \nu_1)] \sin\theta$$

В выражении $\Phi_{03}\,(\theta)$ учтено, что здесь $\mu_0 = \nu_1$. Учтя значения (3.8), подставляем в (3.3) выражение Φ из (3.7). Получаем уравнение разветвления в следующей приближенной форме:

$$d_1\varepsilon - 2d_1\nu_1\varepsilon\xi - 3\nu_1 d_1^2\varepsilon^2 + \alpha\xi^3 = 0 \tag{3.9}$$

$$\alpha = \frac{\nu_1^3}{24\,(\nu_2 - \nu_1)}\,[(15 - 8\nu_1^2)\,(\nu_2 - \nu_1) + 3\nu_1^2\,(2\nu_2 - \nu_1)] \tag{3.10}$$

Приближенного уравнения (3.9) достаточно для определения числа и вида всех малых решений полного уравнения разветвления. Построив для (3.9) диаграмму Ньютона [5], убеждаемся, что ее убывающая часть состоит из одного отрезка (0,1) и (3,0). Поэтому уравнение разветвления имеет три малых решения и каждое из них представляется в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/3}$. Так как $\alpha > 0$, то из этих решений лишь одно вещественное. Рассматриваемая задача, следовательно, имеет единственное непрерывное малое решение и оно представимо в виде сходящегося ряда по стеденям $\varepsilon^{1/3}$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. Система уравнений (1.22), (1.21), (1.26) и (1.19) при $\mu_0 = \nu_1$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ решение $\Phi\,(\theta,\ \varepsilon)$, $\Psi\,(\theta,\ \varepsilon)$, $\mu\,(\varepsilon)$ и $A_0\,(\varepsilon)$ и это решение представимо в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, сходящихся при $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_4'' \leqslant \varepsilon_3''$.

Из этой теоремы следует, что при решении системы уравнений (1.22), (1.21), (1.26) и (1.19) при $\mu_0 = \nu_1$ проще всего непосредственно искать функции $\Phi\,(\theta,\ \varepsilon)$, $\Psi^*\,(\theta,\ \varepsilon) = \Psi\,(\theta,\ \varepsilon) - 1$, параметр $\mu'\,(\varepsilon)$ или $\mu\,(\varepsilon)$ и коэффициент $A_0\,(\varepsilon)$ в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$.

Приводим результаты соответствующих вычислений, включая члены $\varepsilon^{2/3}$

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/3}(d_1\beta)^{1/3}\sin\theta + \varepsilon^{2/3}(d_1\beta)^{2/3}\frac{\nu_1}{2(\nu_2-\nu_1)}\sin 2\theta$$

$$\Psi^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/3}(d_1\beta)^{1/3}(\cos\theta - 1) + \varepsilon^{2/3}(d_1\beta)^{2/3}\nu_1^2\left[1-\cos\theta + \frac{2\nu_2-\nu_1}{4(\nu_2-\nu_1)}(\cos 2\theta - 1)\right] \tag{3.11}$$

$$\mu(\varepsilon) = -\varepsilon^{1/3}(d_1\beta)^{1/3}\nu_1^2 + \varepsilon^{2/3}(d_1\beta)^{2/3}\frac{\nu_1}{12(\nu_2-\nu_1)}\left[(5\nu_1^2+9)(\nu_2-\nu_1)+3\nu_2\nu_1^2\right]$$

$$A_0(\varepsilon) = -\varepsilon^{2/3}(d_1\beta)^{2/3}\,{}^1\!/_4\left(\frac{\nu_1^2}{9}-1\right) \quad \left(\beta = \frac{\nu_1^3}{\alpha}\right)$$

§ 4. **Определение профиля волны.** Профиль волны в параметрической форме дается уравнениями (1.14). После подстановки в эти уравнения найденных $\tau(\theta, \varepsilon)$ и $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и исключения из них θ получаем уравнение профиля в форме $y = y(x, \varepsilon)$.

Приведем приближенные с точностью до членов второго порядка, уравнения профиля в обоих рассмотренных выше случаях:

для $\mu_0 \neq \nu_n$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k}\left[\varepsilon C_{11}(\cos kx - 1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{6}\nu_1 C_{11}^2 - C_{22}\right)(1-\cos 2kx)\right]\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

где C_{11} и C_{22} даются формулами (2.14);

для $\mu_0 = \nu_1$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k}\left[-\varepsilon^{1/3}(d_1\beta)^{1/3}(\cos kx - 1) + {}^1\!/_2\varepsilon^{2/3}(d_1\beta)^{2/3}\frac{\nu_1^2(\nu_2-4\nu_1)}{6(\nu_2-\nu_1)}(1-\cos 2kx)\right]$$

По условию задачи начало координат помещено в гребне волны. Поэтому из анализа главных членов в формулах для $y = y(x, \varepsilon)$, полагая $\nu_1 < \mu_0 < \nu_2$, заключаем, что надо считать $d_1 < 0$.

Отметим еще, что $\mu_0 = \nu_1$ будет тем особым случаем, который указан в начале статьи.

Поступила 18 VI 1968

Институт проблем механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Волны конечной амплитуды, возникающие от периодически распределенного давления. Изв. АН СССР ОТН, 1953, № 4, стр. 505—511.
2. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.
3. Секерж-Зенькович Я. И. Об установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости конечной глубины. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 3.
4. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951, стр. 1—96.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 2, стр. 13—75.
6. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. 2. М.— Л., Гостехтеориздат, 1934, стр. 121.