

ОБ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА, ВЫТЕСНЯЕМОГО ПОРШНЕМ

Ю. Б. Лифшиц, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматривается течение газа под действием поршня, расширяющегося с некоторого момента времени по степенному закону с показателем степени меньшим, чем величина, соответствующая сильному взрыву. Считается, что до начала указанного движения поршня газу передана конечная энергия. В рассматриваемом случае энергия газа остается конечной за бесконечный промежуток времени, поэтому все искомые функции получаются путем линеаризации относительно значений, имеющих место в задаче о сильном взрыве. Для построения решения изучается обратная задача, в которой задается ударная волна, движущаяся по покоящемуся газу с постоянной плотностью и давлением, пренебрежительно малым по сравнению с его значением за ней. Закон расширения поршня определяется в результате решения полученной задачи Коши. Особо рассмотрен случай цилиндрического поршня постоянного радиуса, когда искомое решение содержит логарифмические члены.

Решение задачи о движении газа, возникающем при расширении поршня с постоянной скоростью, было дано Л. И. Седовым [1] и Тейлором [2]. Более общий случай, в котором скорость поршня считалась зависящей от времени по степенному закону, рассматривался позднее Н. Л. Крашенинниковой [3] и Н. Н. Кочиной и Н. С. Мельниковой [4]. В указанных работах функции, описывающие поля возмущенных течений зависели только от одной автомодельной переменной и находились в результате интегрирования системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Как показывает качественное исследование [3,4], ее решение существует не всегда, если задать движение поршня в виде $R = ct^n$ (R — координата, t — время). Для существования решения значения показателя степени n необходимо подчинить неравенству $n > 2 / (\nu + 2)$, где параметр $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для течений с плоской, осевой и центральной симметрией. С. С. Григорьяном было предложено [5] простое объяснение этого требования, заключающееся в том, что при $n < 2 / (\nu + 2)$ в начальный момент движения поршня газу сообщается сразу бесконечное количество энергии. Напротив, когда значения $n > 2 / (\nu + 2)$ при $t = 0$ газ получает нулевую энергию, последняя стремится к бесконечности лишь при $t \rightarrow \infty$. Если же $n = 2 / (\nu + 2)$, конечная энергия выделяется за пренебрежимо малое время, т. е. имеет место задача о сильном взрыве, детально изученная Л. И. Седовым [6,7] и Тейлором [8].

Ниже считается, что движение поршня происходит по степенному закону, начиная с некоторого момента времени $t = T > 0$, причем $n < 2 / (\nu + 2)$. Энергия E_T , переданная газу в начальной фазе расширения при $t < T$, предполагается отличной от нуля и конечной. В рассматриваемом случае ее величина остается ограниченной даже для бесконечно большого промежутка времени, прошедшего от начала движения поршня. Поэтому все функции в искомом решении могут быть получены путем линеаризации относительно тех значений, которые они принимают в задаче о сильном взрыве. Разумеется, для законности линеаризации необходимо выполнение дополнительного требования $(E_\infty - E_T) / E_\infty \ll 1$, где под E_∞ понимается полная энергия в зоне возмущенного течения газа при $t \rightarrow \infty$.

1. Обозначим через r расстояние от некоторой точки пространства до плоскости, оси или центра симметрии, через v — скорость, через ρ — плотность, через p — давление, через κ — отношение удельных теплоем-

костей. Запишем уравнения одномерных нестационарных движений газа в виде [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left[\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{v}{r} \right] &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \kappa p \left[\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{v}{r} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Плотность ρ_1 среды в невозмущенном состоянии будем предполагать постоянной. Что касается интенсивности ударной волны, порождаемой расширяющимся поршнем, то будем считать ее чрезвычайно большой и пренебрежем давлением p_1 перед поверхностью разрыва. Тогда при переходе через ударный фронт, движущийся со скоростью $c(t)$, должны выполняться соотношения [9]

$$v_2 = \frac{2}{\kappa + 1} c, \quad \rho_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \rho_1 c^2 \quad (1.2)$$

в которых индекс 2 относится к газу в сжатом состоянии. Кроме условий Гюгонио (1.2), при построении решения системы дифференциальных уравнений (1.1) должно выполняться еще одно граничное условие, которое гласит, что частицы газа, прилегающие к поршню, имеют одинаковую с ним скорость распространения.

Вместо решения сформулированной прямой задачи удобно обратить процедуру и при $t > T$ задать координату $r_s(t)$ фронта ударной волны следующим образом:

$$r_s(t) = (at)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(1 - \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} \right)$$

Здесь ε — малый параметр, постоянная a определяется величиной энергии E_∞ , выделившейся в начальной фазе расширения газа при $t \ll T$ и затем за все время движения поршня, показатель степени $m > 0$. Начальную энергию E_T будем считать мало отличающейся от полной энергии возмущенного течения, т. е. $(E_\infty - E_T) / E_\infty \ll 1$. По существу это предположение уже содержится в записи закона распространения ударного фронта. Переходя к новым независимым переменным t и $\lambda = r (at)^{-2/(\nu+2)}$, запишем искомые функции как

$$\begin{aligned} v &= v_{20} [f(\lambda) + \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} f_m(\lambda)], \quad \rho = \rho_{20} [g(\lambda) + \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} g_m(\lambda)] \\ p &= p_{20} [h(\lambda) + \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} h_m(\lambda)] \quad \left(\rho_{20}(t) = \frac{(\kappa + 1) \rho_1}{\kappa - 1} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В формулах (1.3) величины $v_{20}(t)$ и $p_{20}(t)$ определяются условиями (1.2), если в них считать

$$c = \frac{2}{\nu + 2} a^{\frac{2}{\nu+2}} t^{-\frac{\nu}{\nu+2}}$$

Что касается функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$, то они являются, очевидно, решением задачи о сильном взрыве [9]. В соответствии с разложением (1.3) представим уравнение фронта ударной волны в виде

$$\lambda_s = 1 - \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} \quad (1.4)$$

причем согласно стандартной процедуре метода возмущений граничные условия для искомых функций $f_m(\lambda)$, $g_m(\lambda)$ и $h_m(\lambda)$ должны быть снесены в точку $\lambda = 1$. Сохраняя во всех соотношениях только члены первого порядка по ε и пренебрегая членами, имеющими более высокий порядок малости, при $\lambda = 1$ имеем

$$f_m = m - 1 + \frac{df}{d\lambda}, \quad g_m = \frac{dg}{d\lambda}, \quad h_m = 2(m - 1) + \frac{dh}{d\lambda} \quad (1.5)$$

Совершенно аналогично выполняется линеаризация уравнений движения (1.1), в результате которой выводим однородную систему

$$\begin{aligned} \left(f - \frac{\kappa + 1}{2} \lambda\right) g \frac{df_m}{d\lambda} + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{df}{d\lambda} - \frac{(\nu + 2m)(\kappa + 1)}{4}\right] g f_m + \\ + \left[\left(f - \frac{\kappa + 1}{2} \lambda\right) \frac{df}{d\lambda} - \frac{\nu(\kappa + 1)}{4} f\right] g_m = 0 \\ g \frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\kappa + 1}{2} \lambda\right) \frac{dg_m}{d\lambda} + \left(\frac{dg}{d\lambda} + \frac{\nu - 1}{\lambda} g\right) f_m + \\ + \left(\frac{df}{d\lambda} + \frac{\nu - 1}{\lambda} f - \frac{\kappa + 1}{2} m\right) g_m = 0 \\ \kappa h \frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\kappa + 1}{2} \lambda\right) \frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{dh}{d\lambda} + \frac{\kappa(\nu - 1)}{\lambda} h\right] f_m + \\ + \left[\kappa \frac{df}{d\lambda} + \frac{\kappa(\nu - 1)}{\lambda} f - \frac{(\kappa + 1)(\nu + m)}{2}\right] h_m = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

определяющую функции $f_m(\lambda)$, $g_m(\lambda)$ и $h_m(\lambda)$ на отрезке $0 < \lambda < 1$.

Можно сразу указать несколько точных решений задачи Коши (1.5) для уравнений (1.6), основываясь на групповых свойствах задачи о сильном точечном взрыве. Как известно, ее автомодельность связана с существованием некоторой группы преобразований подобия. Сдвиг по энергии E_∞ вновь приводит к решению задачи о сильном взрыве с несколько измененным значением этого параметра. Кроме того, исходные уравнения Эйлера и условия Гюгонио инвариантны относительно сдвига по времени t , а при $\nu = 1$ еще и по координате r .

Приняв во внимание сделанные замечания, пишем

$$\begin{aligned} f_m = -f + \lambda \frac{df}{d\lambda}, \quad g_m = \lambda \frac{dg}{d\lambda}, \quad h_m = -2h + \lambda \frac{dh}{d\lambda} \quad \text{при } m = 0 \\ f_m = \frac{\nu}{2} f + \lambda \frac{df}{d\lambda}, \quad g_m = \lambda \frac{dg}{d\lambda}, \quad h_m = \nu h + \lambda \frac{dh}{d\lambda} \quad \text{при } m = \frac{\nu + 2}{2} \\ f_m = \frac{df}{d\lambda}, \quad g_m = \frac{dg}{d\lambda}, \quad h_m = \frac{dh}{d\lambda} \quad \text{при } m = \nu = 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Хотя первая из формул (1.7) верна для любых значений ν , явно она не зависит от этого параметра. Указанный прием отыскания частных решений линеаризованной системы уравнений, существенно опирающийся на инвариантность основного решения относительно некоторой группы преобразований, впервые был использован Я. Б. Зельдовичем и Г. И. Баренблаттом в теории нестационарной фильтрации газа [10].

2. Рассматриваемая обратная задача дает возможность каждому закону (1.4) распространения ударной волны поставить в соответствие вполне определенный закон движения поршня. Для выяснения его характера следует найти асимптотическое поведение функции $f_m(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Предварительно систему трех уравнений (1.6) удобно преобразовать к одному уравнению третьего порядка для $f_m(\lambda)$, а затем получить асимптотические разложения всех его линейно независимых частных решений при $\lambda \rightarrow 0$. Для сокращения выкладок воспользуемся первым интегралом системы (1.6). Существование такого интеграла для уравнений в вариациях, которые берутся относительно автомодельных решений, описывающих нестационарные одномерные течения, было доказано в работах [11,12]. Применяя изложенные там методы, имеем сразу

$$\frac{2\nu f_m}{2f - (\kappa + 1)\lambda} + [m\kappa - \nu(\kappa - 1)] \frac{g_m}{g} + (\nu - m) \frac{h_m}{h} = \nu C \left(\frac{h}{g^\kappa} \right)^{\frac{m}{\nu}} \quad (2.1)$$

Входящая сюда постоянная C определяется из данных Коши (1.5). При помощи формулы (2.1) система уравнений (1.6) преобразуется к уравнению второго, а не третьего порядка для функции $f_m(\lambda)$; это уравнение неоднородно. Асимптотические разложения его решений при $\lambda \rightarrow 0$ находятся без труда, после чего легко устанавливаются и асимптотические разложения функций $g_m(\lambda)$ и $h_m(\lambda)$. В результате для первого линейно независимого решения исходной системы уравнений (1.6) имеем

$$f_m = \alpha_1 \lambda + \dots, \quad g_m = \alpha_2 \lambda^{\nu/(\kappa-1)} + \dots, \quad h_m = \alpha_3 + \dots \quad (2.2)$$

Второе из искомых решений возьмем в виде

$$f_m = \beta_1 \lambda^{1-\nu} + \dots, \quad g_m = \beta_2 \lambda^{\nu(2-\kappa)/(\kappa-1)} + \dots, \quad h_m = \beta_3 \lambda^{\nu(2-\kappa)/(\kappa-1)+2} + \dots \quad (2.3)$$

Третье решение системы (1.6) запишем так

$$f_m = \gamma_1 \lambda^{(\nu-m\kappa)/(\kappa-1)+2} + \dots, \quad g_m = \gamma_2 \lambda^{(\nu-m\kappa)/(\kappa-1)} + \dots \\ h_m = \gamma_3 \lambda^{(\nu-m\kappa)/(\kappa-1)+2} \quad (2.4)$$

Между постоянными, обозначенными одними и теми же буквами, но имеющими различные индексы, существуют определенные связи, которые не приводятся из-за их громоздкости.

Найдем теперь координату поршня $R = \delta r_m(t)$. Прилегающие к его поверхности частицы газа должны иметь одинаковую с ним скорость распространения. Это условие дает

$$\delta \frac{dr_m}{dt} = v_{20} [f(\lambda) + \varepsilon t^{-\frac{2m}{\nu+2}} f_m(\lambda)]_{r=\delta r_m(t)}$$

Подставляя сюда первые из формул (2.2) — (2.4), справедливые при $\lambda \rightarrow 0$, и удерживая в полученном таким образом соотношении только глав-

ные члены, выводим для определения $r_m(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dr_m^v}{dt} - \frac{2\nu}{\kappa(\nu+2)} \frac{r_m^v}{t} = 4\varepsilon\delta^{-\nu} \frac{\nu\beta_1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} a^{\frac{2\nu}{\nu+2}} t^{-\frac{2(m-\nu)}{\nu+2}-1} \quad (2.5)$$

Решение

$$r_m^0 = At^{\frac{2\nu}{\kappa(\nu+2)}} \quad (2.6)$$

соответствующего ему однородного уравнения задает траектории частиц газа в окрестности плоскости, оси или центра симметрии [9]. Выбирая надлежащим образом координату поршня при $t = T$, постоянную A в формуле (2.6) всегда можно считать равной нулю. Решение неоднородного уравнения (2.5), как ясно отсюда, представляет искомый закон расширения поршня.

Положим для простоты $|\varepsilon| = \delta^\nu$, а знак ε возьмем таким, чтобы функции $r_m(t)$ и $R(t)$ были положительными. При $m \neq \nu(\kappa-1)/\kappa$ имеем

$$r_m = a^{\frac{2}{\nu+2}} \left| \frac{2\kappa\nu\beta_1}{(\kappa+1)(\nu\kappa - m\kappa - \nu)} \right|^{\frac{1}{\nu}} t^{\frac{2(\nu-m)}{\nu(\nu+2)}} \quad (2.7)$$

Последнее соотношение показывает, что закон движения поршня явно определяется только одним интегралом (2.3) системы уравнений (1.6) и не зависит от постоянных α_1 и γ_1 в двух других его частных решениях. Как показывает численное интегрирование уравнений (1.6), постоянная β_1 положительна при $m < \nu$. Выполнение этого условия необходимо, чтобы показатель степени у t в формуле (2.7) был больше нуля. Поэтому при $m < \nu(\kappa-1)/\kappa$ параметр $\varepsilon > 0$. В рассматриваемом режиме при $t \rightarrow \infty$ поршень движется быстрее, чем частицы при сильном взрыве. Что касается координаты фронта ударной волны, то ее значения с течением времени стремятся к соответствующим значениям в задаче о сильном взрыве, но всегда остаются меньше последних.

При $m > \nu(\kappa-1)/\kappa$ знак ε будет отрицательным. Скорость поршня в этом случае меньше, чем скорость частиц, приведенных в движение сильным взрывом, а координата ударного фронта достигает своего предельного значения сверху.

Если же $m = \nu(\kappa-1)/\kappa$, формулу (2.7) нужно заменить на

$$r_m = a^{\frac{2}{\nu+2}} \left[A + 4\varepsilon\delta^{-\nu} \frac{\nu\kappa\beta_1}{(\kappa+1)(\nu\kappa + 2\kappa - 2\nu)} \ln t \right]^{\frac{1}{\nu}} t^{\frac{2}{\nu(\nu+2)}} \quad (2.8)$$

Здесь сохранен член, соответствующий однородному решению. При $\varepsilon = 0$ закон движения поршня определяется автомодельным интегралом задачи о сильном взрыве. При $\varepsilon \neq 0$ различие в скоростях движения поршня и распространения частиц газа, подвергшихся воздействию взрывной волны, получается логарифмическим.

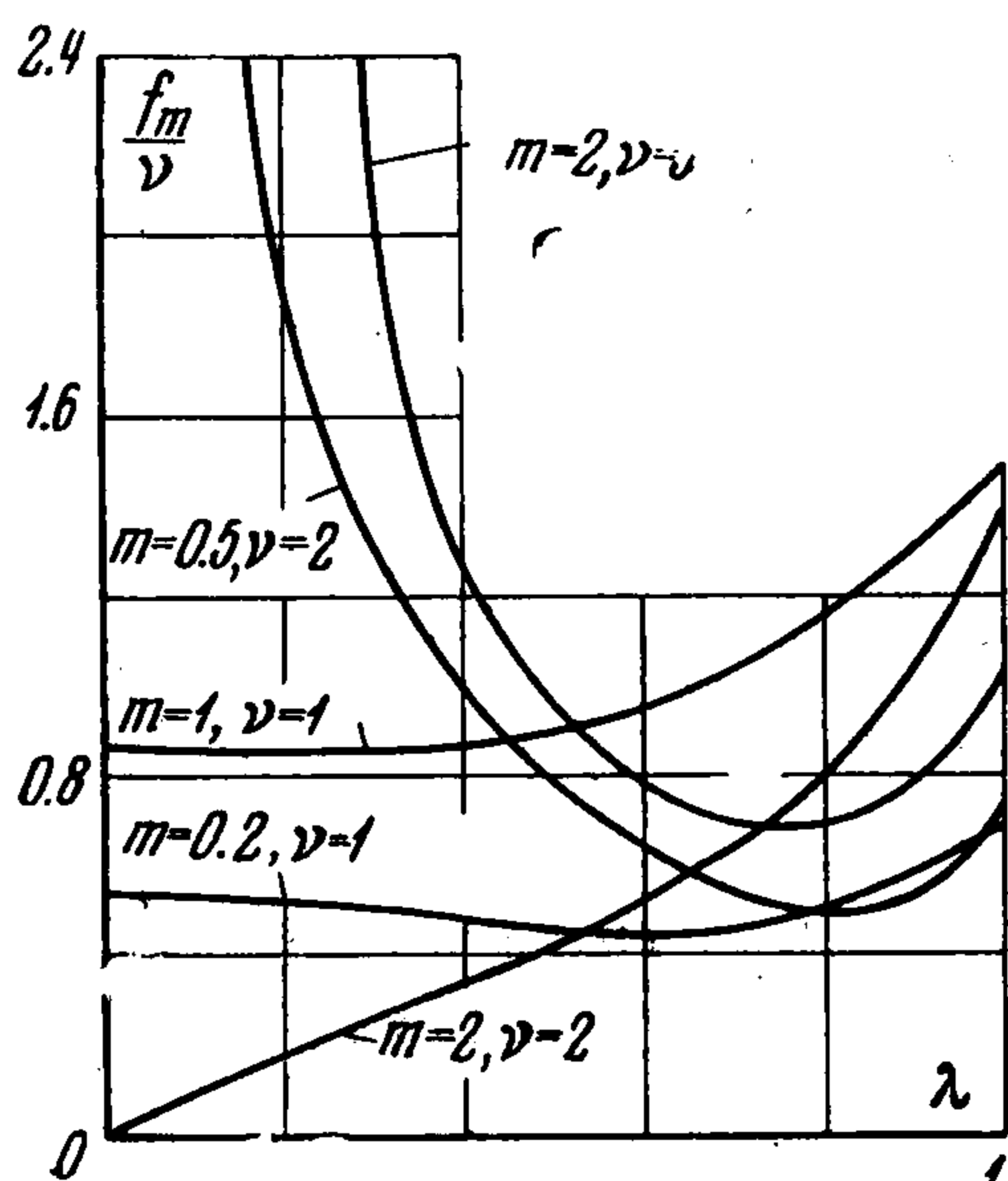
Строго говоря, принятый вид (1.3) представления решения рассматриваемой задачи не будет верным при малых значениях координаты r . Как следует из разложений (2.2) — (2.4) и формулы (2.7), в окрестности поверхности поршня оба слагаемых, заключенных в квадратные скобки в первых двух из соотношений (1.3), имеют одинако-

вый порядок. Чтобы ликвидировать возникающую трудность и получить равномерно справедливое в рамках изучаемого приближения решение, можно воспользоваться известным методом сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. Существо этого метода обстоятельно описано в книге Ван Дайка [13]. Опуская для краткости соответствующие выкладки, укажем, что применение метода сращивания асимптотических разложений подтверждает результаты

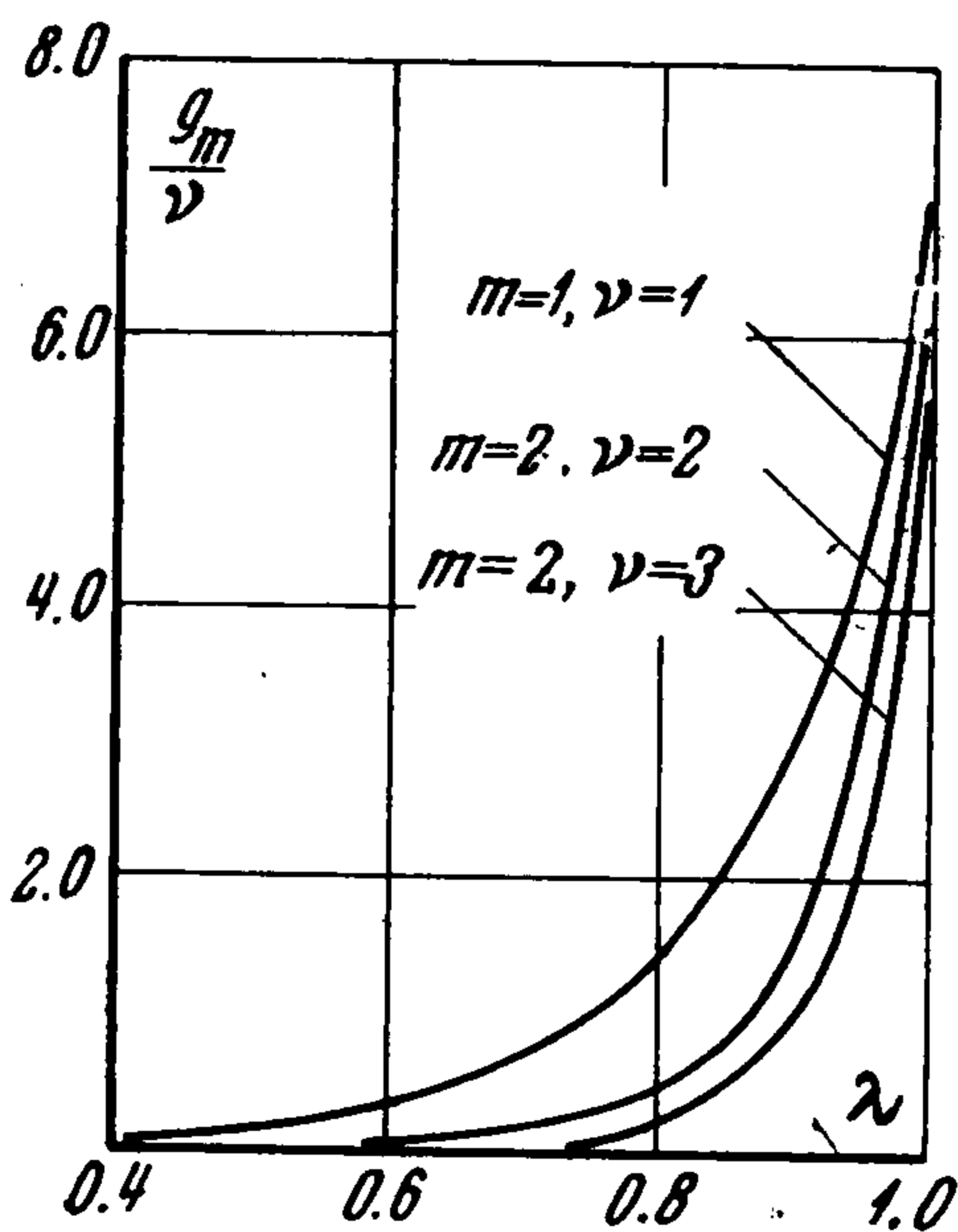
линейной теории, хотя они и были установлены без учета особенности в решении при малых значениях координаты r . В частности, остаются справедливыми законы (2.7) и (2.8) движения поршня.

В качестве иллюстрации приведем несколько зависимостей, полученных при помощи численного интегрирования системы уравнений (1.6) с учетом данных Коши (1.5). В расчетах отношение удельных теплоемкостей предполагалось равным 1.4. Как видно из фиг. 1, функция $f_m(\lambda)$ положительна. При $\nu = 1$ ее значения конечны при любых λ , а при $\nu = 2.3$ они довольно быстро стремятся к бесконечности при $\lambda \rightarrow 0$. Лишь в исключительных случаях, реализующихся при $m = 0$ и $m = (\nu + 2) / 2$, имеем $f_m(0) = 0$. При одинаковых ν значения функции $g_m(\lambda)$ чрезвычайно близки к приведенным на фиг. 2, хотя параметр m может быть произвольным.

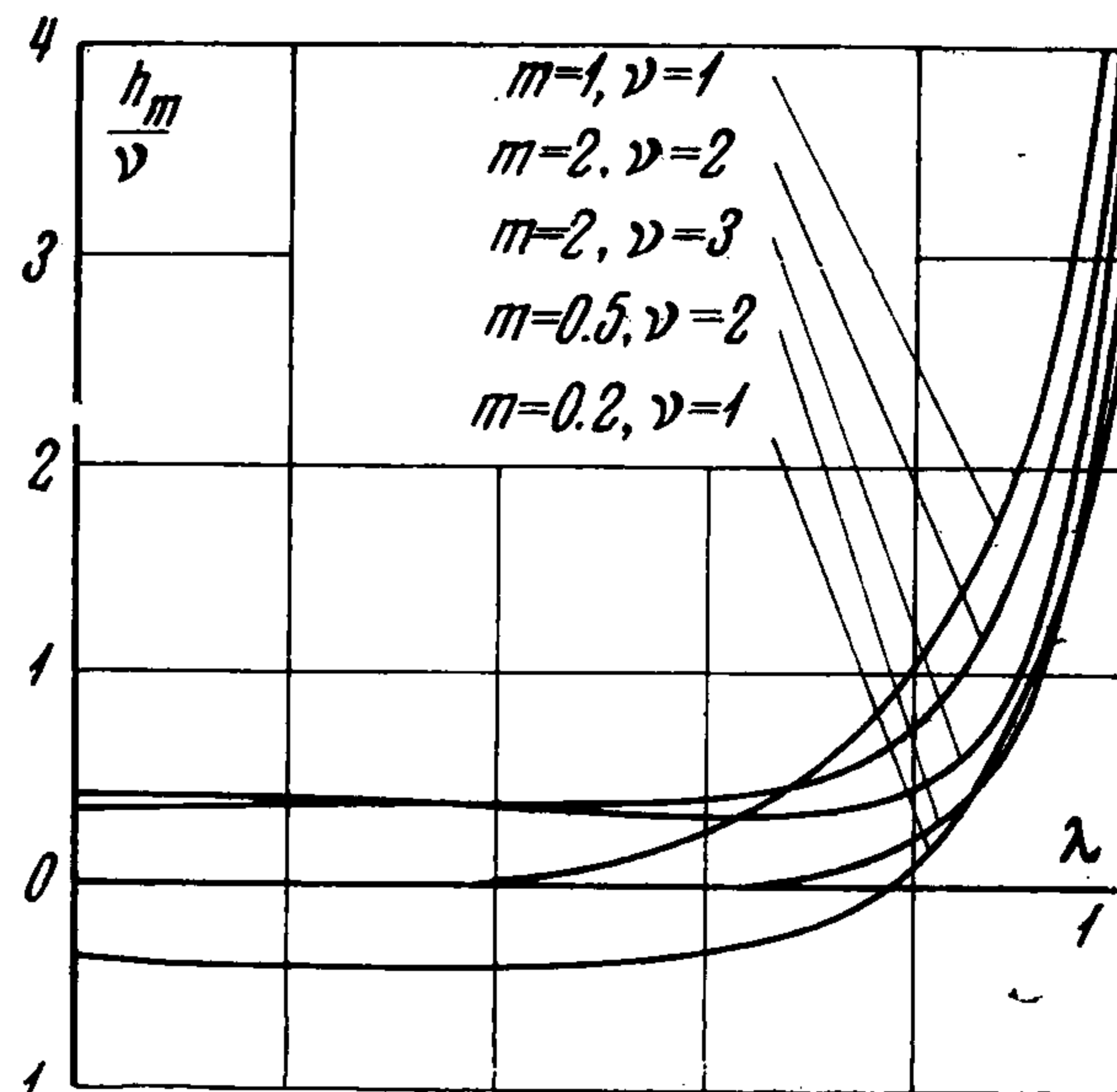
Большие величины функции $g_m(\lambda)$ при λ , близком к единице и их резкое убывание при уменьшении независимой переменной означают, что в возмущенном движении газ концентрируется вблизи фронта ударной волны. Кривые на фиг. 3 дают представление об изменении давления. При $m = \nu = 1$ решение рассматриваемой задачи дается при помощи последних из формул (1.7), из которых, в частности, находим $\beta_1 = (\kappa + 1) / 2\kappa$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Коэффициент β_1 в разложениях (2.3) обращается в нуль, когда $m = (\nu + 2) / 2$. Это значение параметра является собственным, так как система уравнений (1.6) допускает отличное от нуля решение, если даже в качестве граничного условия поставить требование, чтобы скорость частиц газа обращалась в нуль при приближении к плоскости, оси или центру симметрии. Как уже указывалось выше, при $m = (\nu + 2) / 2$ решение системы (1.6) можно представить при помощи второй группы из

формул (1.7), причем это представление связано с инвариантностью исходных уравнений Эйлера и условий Гюгонио по отношению к сдвигу по времени. Ясно, что при $m = (\nu + 2) / 2$ разложение (1.3) не может описать движение поршня.

Обратим, как и прежде, процедуру и зададим координату фронта ударной волны, но вместо формулы (1.4) напомним

$$\lambda_s = 1 - \varepsilon t^{-1} \left(1 + \frac{2}{\nu + 2} b \ln t \right) \quad (3.1)$$

Фигурирующая здесь постоянная b произвольна. В соответствии с (3.1) разложение искомого решения возьмем в виде

$$\begin{aligned} v &= v_{20} \left\{ f(\lambda) + \varepsilon t^{-1} \left[\frac{2}{\nu + 2} b f_m(\lambda) \ln t + f_{m1}(\lambda) \right] \right\} \\ \rho &= \rho_{20} \left\{ g(\lambda) + \varepsilon t^{-1} \left[\frac{2}{\nu + 2} b g_m(\lambda) \ln t + g_{m1}(\lambda) \right] \right\} \\ p &= p_{20} \left\{ h(\lambda) + \varepsilon t^{-1} \left[\frac{2}{\nu + 2} b h_m(\lambda) \ln t + h_{m1}(\lambda) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Начальные значения всех подлежащих определению функций получаются из условий (1.2) на ударном фронте. Применяя метод вариаций, легко доказать, что при $\lambda = 1$ функции $f_m(\lambda)$, $g_m(\lambda)$ и $h_m(\lambda)$ подчиняются равенствам (1.5). Для начальных значений функций $f_{m1}(\lambda)$, $g_{m1}(\lambda)$ и $h_{m1}(\lambda)$ верны соотношения

$$\begin{aligned} f_{m1}(1) &= m - 1 - b + \frac{df}{d\lambda}, & g_{m1}(1) &= \frac{dg}{d\lambda} \\ h_{m1}(1) &= 2(m - 1 - b) + \frac{dh}{d\lambda} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подстановка формул (3.2) в уравнения Эйлера (1.1) позволяет убедиться, что не только начальные данные, но и система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая функции $f_m(\lambda)$, $g_m(\lambda)$ и $h_m(\lambda)$ на отрезке $0 < \lambda < 1$, остаются неизменными. Таким образом, для их представления можно использовать, как и прежде, вторые из формул (1.7). Что касается функций $f_{m1}(\lambda)$, $g_{m1}(\lambda)$ и $h_{m1}(\lambda)$, то они удовлетворяют системе неоднородных дифференциальных уравнений, левые части которых совпадают (1.6), а в правых частях стоят величины

$$-\frac{\kappa + 1}{2} b g \left(\frac{\nu}{2} f + \lambda \frac{df}{d\lambda} \right), \quad -\frac{\kappa + 1}{2} b \lambda \frac{dg}{d\lambda}, \quad -\frac{\kappa + 1}{2} b \left(\nu h + \lambda \frac{dh}{d\lambda} \right) \quad (3.4)$$

Исследование асимптотического поведения частных решений названных неоднородных уравнений доказывает возможность получить с их помощью расширение поршня, причем закон движения последнего соответствует соотношению (2.7). Иными словами,

$$r_m \sim t^{(\nu-2)/(\nu+2)} \quad (3.5)$$

Для получения значений искомым функций посредством численного интегрирования уравнений удобно записать их в виде сумм

$$f_{m1} = f_m + b f_m^*, \quad g_{m1} = g_m + b g_m^*, \quad h_{m1} = h_m + b h_m^* \quad (3.6)$$

Здесь величины $f_m^*(\lambda)$, $g_m^*(\lambda)$ и $h_m^*(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (1.6) с правыми частями (3.4), в которых произвольная постоянная $b = 1$. Начальные данные для новых функций получаются в результате подстановки равенств (3.5) в (3.3) и гласят

$$f_m^*(1) = -1, \quad g_m^*(1) = 0, \quad h_m^*(1) = -2$$

Результаты интегрирования представлены на фиг. 4 для $m = \nu = 2$.

При $(\nu + 2) / 2 < m < \nu$ решение задачи о поршне, расширяющемся в покоящемся газе с постоянной плотностью и пренебрежимо малым давлением, следует уже брать в виде суммы трех членов. Первый из них относится к автомодельному решению [9], описывающему распространение взрывных волн, а второй — к решению (1.7) с $m = (\nu + 2) / 2$. С движением поршня по закону (2.7) будет непосредственно связан только третий член. Если считать, что показатель степени у t в этой формуле

больше нуля, то решение в виде суммы трех членов нужно применять только для описания течений с центральной симметрией.

4. Рассмотрим вопрос об энергии в зоне возмущенного течения газа, который заключен между ударной волной и поршнем. В некоторый момент времени t

$$E = e_\nu \int_{R(t)}^{r_s(t)} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\kappa - 1} \right) r^{\nu-1} dr$$

$$e_\nu = 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3) \quad (4.1)$$

Подстановка в равенство (4.1) соотношений (1.3), (1.4) и (2.7) приводит к выражению

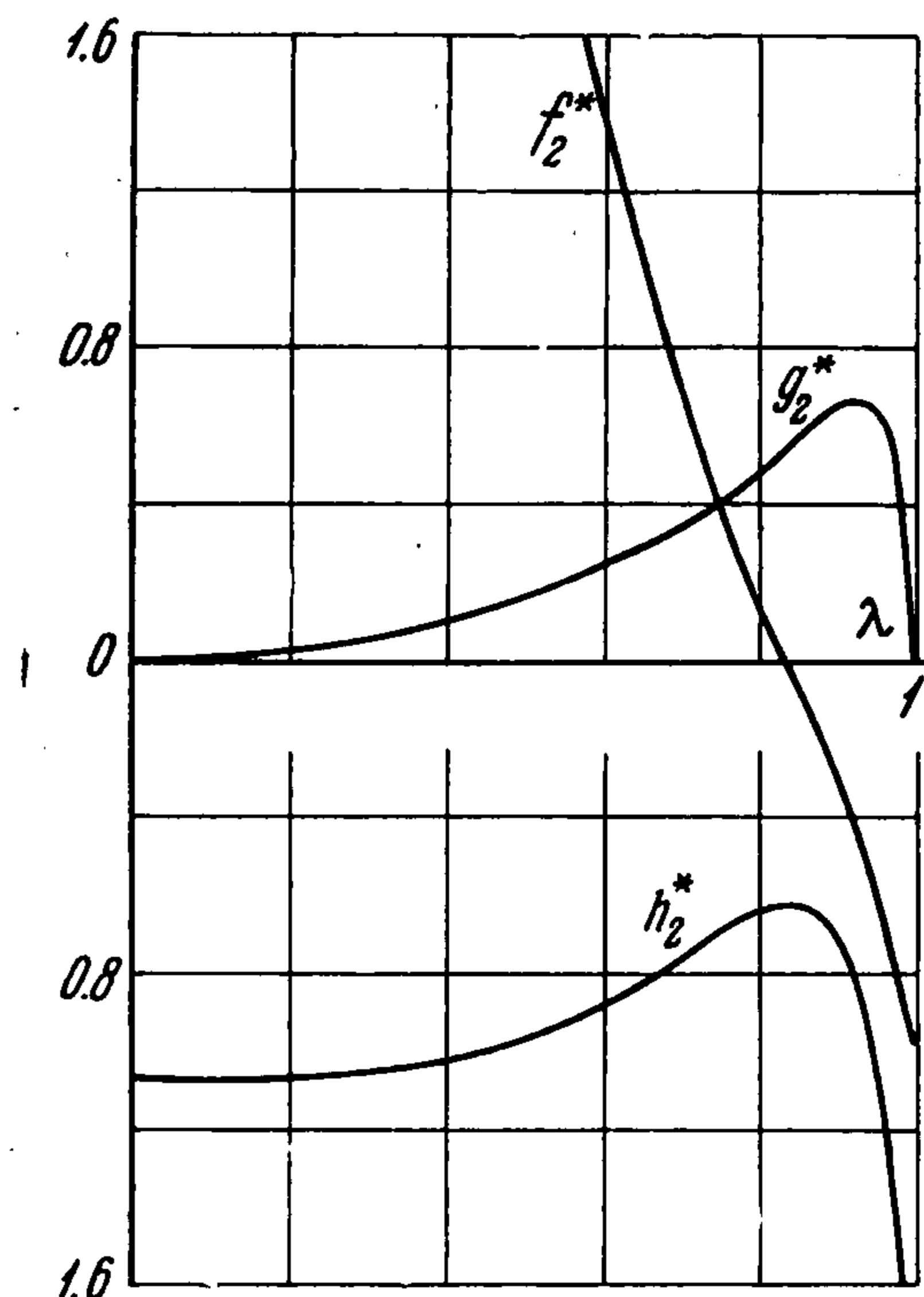
$$E = \frac{8a^2 e_\nu}{(\nu + 2)^2 (\kappa^2 - 1)} (J + \varepsilon J_m t^{-\frac{2m}{\nu+2}}) \quad (4.2)$$

Здесь постоянная J определяется решением задачи о сильном взрыве [9], и пропорциональна асимптотическому значению E_∞ энергии газа при $t \rightarrow \infty$, а величина J_m при $m \neq \nu (\kappa - 1) / \kappa$ дается формулой

$$J_m = \int_0^1 (f^2 g_m + 2f g f_m + h_m) \lambda^{\nu-1} d\lambda - 2 \frac{2\nu\kappa}{(\kappa + 1)(\nu\kappa - m\kappa - \nu)} h(0) \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda^{\nu-1} f_m)$$

При $m = \nu (\kappa - 1) / \kappa$ выражение для J_m согласно (2.8) нужно заменить на

$$J_m = \int_0^1 (f^2 g_m + 2f g f_m + h_m) \lambda^{\nu-1} d\lambda - 2 \left[A \varepsilon^{-1} \delta^\nu + 4\nu\kappa\beta_1 \frac{\ln t}{(\kappa - 1)(\nu\kappa + 2\kappa - 2\nu)} \right]$$



Фиг. 4

Как показывают расчеты, произведение εJ_m отрицательно при всех значениях $m < \nu$. При $m = \nu$ показатель степени у t в законе (2.7) движения поршня обращается в нуль. В этом случае за конечное время $t \leq T$ поршень достигает своих максимальных размеров и затем останавливается. При $t > T$ он, естественно, никакой работы не совершает. В полном согласии с этим фактом при $m = \nu$ величина J_m обращается в нуль. Легко показать, что выражение вида (4.2) для расчета полной энергии газа будет справедливо и в том специальном случае, когда $m = (\nu + 2) / 2$; член, пропорциональный $J_{m_1} t^{-2m_1/(\nu+2)} \pi t$, из него выпадает, так как $J_{m_1} = 0$.

Отметим в заключение, что в силу известной аналогии [14,15] между гиперзвуковым обтеканием тонких тел и нестационарными течениями в пространстве с меньшим на единицу числом измерений построенные решения могут быть применены для расчета параметров газа в области между головной ударной волной и поверхностью тела. Условие, делающее законным такое применение, сводится, очевидно, к требованию малости сопротивления боковой части поверхности по сравнению с сопротивлением переднего затупления. Эффект, связанный с возникновением высокоэнтропийного слоя, должен рассматриваться отдельно. В такой постановке влияние затупления головной части тела на его обтекание гиперзвуковым потоком газа изучалось ранее Г. Г. Черным [16-18], Чэнгом и Паллоном [19] и Лизом и Кубота [20]. Отметим, что формулы (3.2) дают согласно сформулированной аналогии обтекание затупленного круглого цилиндра конечной толщины, поставленного торцом к набегающему потоку, причем его образующие параллельны вектору невозмущенной скорости. Это утверждение немедленно следует из соотношения (3.5), в котором нужно положить $\nu = 2$.

Поступила 11 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
2. Taylor J. I. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1946, vol. 186, No. 1006.
3. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.
4. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодействия. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
5. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (Автомодельные движения). ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
6. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
7. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
8. Taylor J. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 201, No. 1065.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
10. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 4.
11. Лидов М. Л. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 1.
12. Коробейников В. П. Об интегралах уравнений неустановившихся адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 4.
13. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
15. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
16. Черный Г. Г. Влияние малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 4.
17. Черный Г. Г. Обтекание тонкого затупленного конуса при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 4.
18. Черный Г. Г. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 4.
19. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading—edge effect in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 3.
20. Lees L., Kubota I. Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 3.