О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Н. В. Стоянов

(София)

Рассматривается задача о стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае пары чисто мнимых корней. Ввводится неаналитическое управление по двум критическим переменным. Исследование опирается на классическую теорию устойчивости движения по Ляпунову [1,2] и методов, развитых в работе [3].

1. Рассмотрим управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + g(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь x — $n+2$-мерный вектор возмущения; u — m-мерный вектор управления, которое будем считать невозмущенным помехами; A, B — постоянные матрицы порядка $(n+2) \times (n+2)$ и $(n+2) \times m$, соответственно; $g(x, u)$ — члены выше первого порядка малости относительно x и u.

Если при $u \equiv 0$ невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) не будет асимптотически устойчивым, то ставится задача о стабилизации, т. е. требуется найти такое управляющее воздействие $u = u(x)$, при подстановке которого в (1.1) невозмущенное движение $x = 0$ стало бы асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Пусть имеет место критический случай пары чисто мнимых корней [2]. В этом случае, как известно [2,4], система уравнений (1.1) при помощи некоторого невырожденного линейного преобразования переменных x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+2)$ может быть преобразована к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + X(\xi, \eta, z, u), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + Y(\xi, \eta, z, u) \tag{1.2}$$

$$dz / dt = A_0 z + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, z, u) \tag{1.3}$$

Здесь ξ, η — скалярные переменные; z — n-мерный вектор с компонентами z_s a, b — n-мерные постоянные векторы; A_0, B_0 — постоянные матрицы порядка $n \times n$ и $n \times m$; вектор функция Z имеет компоненты Z_s; X, Y, Z_s аналитические нелинейности по ξ, η, z, u.

Задача о стабилизации для системы (1.1) эквивалентна той же задаче для системы (1.2), (1.3). Как известно [3], система

$$dz / dt = A_0 z + B_0 u \tag{1.4}$$

стабилизируема, и для нее можно построить линейное управление

$$u^\circ(z) = Pz \tag{1.5}$$

Постоянная матрица P порядка $m \times n$ должна быть выбрана так, чтобы после подстановки (1.5) в (1.4) матрица

$$C = A_0 + B_0 P = \text{const} \quad (C = (c_{ij}))$$

имела все собственные числа μ_s с отрицательными действительными частями.

Для системы (1.2), (1.3) рассмотрим непрерывное неаналитическое управление, указанное Н. Н. Красовским [4]

$$u(\xi, \eta, z) = Pz + w(\xi, \eta) \qquad (w = (w_1, \ldots, w_m)) \tag{1.6}$$

$$w_j(\xi, \eta) = w_j^{(1)}(\xi, \eta) + w_j^{(2)}(\xi, \eta) + \ldots + w_j^{(\omega)}(\xi, \eta) \tag{1.7}$$

$$w_j^{(k)}(\xi, \eta) = \sum_{r=-1}^{a_{jk}} \sum_{p+q-r=k} \alpha_{pq-r}^{(j)} \xi^p \eta^q \rho^{-r} \quad (k = 1, 2, \ldots \omega) \tag{1.8}$$

$$(\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0;\ a_{jk} \geqslant 0,\ \omega > 0 \text{ — целые числа})$$

Функции вида (1.8) удовлетворяют оценке, характерной для однородных форм k-го порядка

$$|w_j^{(k)}(\xi, \eta)| \leqslant A_j^k \|\zeta\|^k, \qquad \|\zeta\| = \sqrt{\xi^2+\eta^2}, \qquad A_j^k = \mathrm{const} > 0$$

Здесь и в дальнейшем для функций типа (1.8) под $w_j(0, 0)$ будем понимать

$$w_j(0, 0) = \lim_{\rho\to 0} w_j(\xi, \eta) = 0$$

Постоянные $\alpha_{pq-r}^{(j)}$ и целые числа w, a_{jk} выбираются в зависимости от вида исходной системы (1.2), (1.3) и возможности ее стабилизации.

Покажем, что можно, преобразовывая некритические переменные z_s по формулам

$$z_s = y_s + \varkappa_s(\xi, \eta) \tag{1.9}$$

добиться того, чтобы в разложениях правых частей уравнений для некритических переменных при $y_s = 0$ присутствовали члены, зависящие только от критических переменных ξ, η в степенях, больших $N - 1$ ($N > 1$ — целое число).

Для этого функции $\varkappa_s(\xi, \eta)$ определим как формальное решение системы уравнений с частными производными

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}[-\lambda\eta + X(\xi, \eta, \varkappa, u)] + \frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}[\lambda\xi + Y(\xi, \eta, \varkappa, u)] =$$
$$= A_0\varkappa + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, \varkappa, u) \tag{1.10}$$

где $\varkappa$ — n-мерный вектор с компонентами $\varkappa_s$.

Решение этой системы будем искать в виде формальных рядов

$$\varkappa_s^{(k)}(\xi, \eta) = \varkappa_s^{(1)}(\xi, \eta) + \varkappa_s^{(2)}(\xi, \eta) + \ldots \tag{1.11}$$

где функции $\varkappa_s^{(k)}(\xi, \eta))$ типа (1.8), т. е.

$$\varkappa_s^{(k)}(\xi, \eta) = \sum_{r=-1}^{b_{sk}} \sum_{p+q-r=k} a_{pq-r}^{(s)} \xi^p \eta^q \rho^{-r}, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11), (1.12) и (1.6) — (1.8) в (1.10), а затем приравнивая в левой и правой частях полученных уравнений члены ν-го порядка, т. е. члены, для которых $p + q - r = \nu$, получим для определения вектор-функции $\varkappa^\nu$ систему уравнений

$$\lambda\left(\xi\frac{\partial\varkappa^{(\nu)}}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varkappa^{(\nu)}}{\partial\xi}\right) = C\varkappa^{(\nu)} + \tau^{(\nu)}(\xi, \eta) \qquad (\nu \geqslant 1) \tag{1.13}$$

Здесь $\tau_s^{(\nu)}$ — компоненты вектор-функции $\tau^{(\nu)}$ — однородные функции переменных ξ, η и ν-й степени типа (1.8). При $\nu = 1$ имеем $\tau^{(1)} = a\xi + b\eta + B_0 w^\nu$. При $\nu > 1$ функции $\tau_s^{(\nu)}$ зависят от функций $\varkappa_s^{(1)}, \varkappa_s^{(2)}, \ldots, \varkappa_s^{(\nu-1)}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, и если $\varkappa_s^{(l)})$ при $l < \nu$ уже вычислены, то функции $\tau_s^{(\nu)}(\xi, \eta)$ будут известными.

Выделяя члены с одинаковыми множителями ρ^{-r} в функциях $\varkappa_s^{(\nu)}(\xi, \eta)$ и $\tau_s^{(\nu)}(\xi, \eta)$, представим их в виде

$$\varkappa_s^{(\nu)} = \sum_{r=-1}^{b_{s\nu}} \varkappa_s^{(\nu+r)_\nu} \rho^{-r}, \qquad \tau_s^{(\nu)} = \sum_{r=-1}^{\sigma_{s\nu}} \tau_s^{(\nu+r)_\nu} \rho^{-r} \tag{1.14}$$

где $\varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}$ и $\tau_s^{(\nu+r)_\nu}$ — формы $(\nu + r)$-го порядка относительно ξ, η; $\sigma_{s\nu} \geqslant 0$ — целые числа.

Подставляя (1.14) в (1.13) и учитывая, что

$$\xi\frac{\partial\rho^{-r}}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\rho^{-r}}{\partial\xi} \equiv 0 \tag{1.15}$$

получим

$$\lambda \sum_{r=-1}^{b_{s\nu}} \rho^{-r}\left(\xi \frac{\partial \varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}}{\partial \xi}\right) = \sum_{r=-1}^{b_{s\nu}} \sum_{i=1}^{n} c_{si}\varkappa_i^{(\nu+r)_\nu}\rho^{-r} + \sum_{r=-1}^{\sigma_{s\nu}} \tau_s^{(\nu+r)_\nu}\rho^{-r} \tag{1.16}$$

Постоянные $b_{s\nu}$ выбираются так. Положим сначала в (1.11), (1.16)

$$b_{1\nu} = b_{2\nu} = \ldots = b_{n\nu} = \max\,[\sigma_{1\nu}, \sigma_{2\nu}, \ldots, \sigma_{n\nu}]$$

после этого конкретные значения для постоянных $b_{s\nu}$ получим, приравнивая в левой и правой частях уравнений (1.16) члены с одинаковыми множителями ρ^{-r}. Таким образом, для определения вектор-функции $\varkappa^{(\nu+r)_\nu}$ получим уравнения

$$\lambda\left(\xi \frac{\partial \varkappa^{(\nu+r)_\nu}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \varkappa^{(\nu+r)_\nu}}{\partial \xi}\right) = C\varkappa^{(\nu+r)_\nu} + \tau^{(\nu+r)_\nu} \tag{1.17}$$

Полученная система является частным случаем системы (32) работы [1], § 30 (см. также (39.1) работы [2], § 39). На основании теоремы Ляпунова [1,2] система (1.17) имеет единственное решение для $\varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}$. Это решение можно искать методом неопределенных коэффициентов; при этом для коэффициентов $a_{pq-r}^{(s)}$ $(p+q-r = \nu)$ формы $\varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}$ получим линейные алгебраические системы, которые здесь не будем выписывать.

Таким образом, уравнения (1.17) дают возможность последовательно определить функции $\varkappa_s^{(\nu+r)_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, а следовательно, и функции $\varkappa_s^{(\cdot)}$ формулы (1.12).

Замечание 1.1. Можно показать, что если в управлении (1.6) — (1.8) положить $\rho = \sqrt{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2}$, где α, β — положительные постоянные, то необходимо должно быть $\alpha = \beta$.

Допустим, что функции $\varkappa_s(\xi, \eta)$ (1.11) до заданного порядка $N-1$ уже вычислены, т. е. известны

$$\varkappa_s(\xi, \eta) = \varkappa_s^{(1)}(\xi, \eta) + \varkappa_s^{(2)}(\xi, \eta) + \ldots + \varkappa_s^{(N-1)}(\xi, \eta) \tag{1.18}$$

Подставляя в уравнения (1.2), (1.3) управление (1.6) — (1.8) и преобразуя эту систему по формулам (1.9), (1.18), получим

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + \sum_{\sigma=2}^{N} X_\sigma(\xi, \eta) + \varphi_1(\xi, \eta, y), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + \sum_{\sigma=2}^{N} Y_\sigma(\xi, \eta) + \varphi_2(\xi, \eta, y) \tag{1.19}$$

$$dy/dt = Cy + Z^*(\xi, \eta, y) \tag{1.20}$$

Здесь функции $\varphi_i(\xi, \eta, y)$ и компоненты вектор-функции $Z^*(\xi, \eta, y)$ имеют относительно ξ, η, y_s порядок малости не ниже второго.

Функции $\varphi_i(\xi, \eta, 0)$ удовлетворяют условию Липшица с бесконечно малой константой и оценке

$$|\varphi_i(\xi, \eta, 0)| \leqslant \beta_i \|\zeta\|^{N+1} \qquad (\beta_i > 0 \text{ — постоянные})$$

В силу выбора преобразования (1.9), (1.18) разложение компонент вектор-функции $Z^*(\xi, \eta, 0)$ начинается с членов порядка не ниже, чем N.

При выполнении этих условий имеет место теорема 2.2 из работы [5], т. е. задача об устойчивости нулевого решения системы (1.19), (1.20) эквивалентна задаче об устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + \sum_{\sigma=2}^{N} X_\sigma(\xi, \eta), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + \sum_{\sigma=2}^{N} Y_\sigma(\xi, \eta) \tag{1.21}$$

Отметим, что систему (1.21) можно получить, подставляя в уравнения (1.2) управление (1.6) — (1.8), а затем, заменяя в полученных соотношениях компоненты вектора z на компоненты вектора $\varkappa$ (1.18), соответственно, и ограничиваясь членами до N-го порядка включительно. Очевидно, что увеличение числа N не изменит в уравнениях (1.19) членов порядка, не превосходящего первоначально N. Поэтому при выполнении вычислений следует сначала положить $N = 2$, а затем, в случае необходимости, это число увеличить.

2. Рассмотрим однородные функции $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$ m-й степени переменных ξ, η типа (1.8)

$$u^{(m)}(\xi, \eta) = \sum_{r=-1}^{\gamma} \sum_{p+q-r=m} c_{pq-r}\, \xi^p \eta^q \rho^{-r} \qquad (c_{pq-r} = \mathrm{const}) \tag{2.1}$$

$$v^{(m)}(\xi, \eta) = \sum_{r=-1}^{\gamma} \sum_{p+q-r=m} d_{pq-r}\, \xi^p \eta^q \rho^{-r} \qquad (d_{pq-r} = \mathrm{const}) \tag{2.2}$$

$$(\gamma \geqslant 0,\ m > 0 \text{ — целые числа})$$

Для функций $u^{(m)}$, $v^{(m)}$ поставим задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в книге И. Г. Малкина [2], а именно: пусть задана функции $u^{(m)}$; требуется найти функцию $v^{(m)}$ такую, чтобы ее производная по времени в силу линейной части системы (1.21), т. е. уравнений

$$d\xi \,/\, dt = -\lambda\eta, \qquad d\eta \,/\, dt = \lambda\xi \tag{2.3}$$

была равна функции $u^{(m)}$.

Производная от ρ^{-r} по времени в силу уравнений (2.3) тождественно равна нулю (см. (1.15)). Поэтому в функции $v^{(m)}$ (2.2) при ее дифференцировании в силу (2.3) ρ^{-r} можем рассматривать как параметр. Группируя все слагаемые, содержащие множитель ρ^{-r}, запишем (2.1) и (2.2) в виде

$$u^{(m)} = \sum_{r=-1}^{\gamma} u_{-r}^{(m+r)} \rho^{-r}, \qquad v^{(m)} = \sum_{r=-1}^{\gamma} v_{-r}^{(m+r)} \rho^{-r} \tag{2.4}$$

Здесь $u_{-r}^{(m+r)}$ и $v_{-r}^{(m+r)}$ — формы $(m + r)$-го порядка относительно ξ, η, где $m + r$ может быть числом четным или нечетным в зависимости от m и r.

Будем искать функцию $v^{(m)}$ (2.2) при заданной функции $u^{(m)}$ (2.1), удовлетворяющую уравнению

$$\lambda \left(\xi \frac{\partial v^{(m)}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial v^{(m)}}{\partial \xi} \right) = u^{(m)} + \sum_{r=-1}^{\gamma} G_{-r} (\xi^2 + \eta^2)^{1/2(m+r)} \rho^{-r} \tag{2.5}$$

где $G_{-r} = 0$ при $m + r = 2k - 1$, $(k = 1, 2, \ldots)$.

Постоянные G_{-r} могут быть выбраны так, чтобы уравнение (2.5) имело решение. Действительно, подставляя (2.4) в (2.5) и приравнивая в левой и правой частях полученного уравнения члены, содержащие множитель ρ^{-r}, получим для определения форм $v_{-r}^{(m+r)}$ уравнения

$$\lambda \left(\xi \frac{\partial v_{-r}^{(m+r)}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial v_{-r}^{(m+r)}}{\partial \xi} \right) = u_{-r}^{(m+r)} \qquad (m + r = 2k - 1) \tag{2.6}$$

$$\lambda \left(\xi \frac{\partial v_{-r}^{(m+r)}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial v_{-r}^{(m+r)}}{\partial \xi} \right) = u_{-r}^{(m+r)} + G_{-r} (\xi^2 + \eta^2)^{1/2(m+r)} \qquad (m + r = 2k) \tag{2.7}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в [2], приводят к следующей формуле для вычисления постоянных:

$$G_{-r} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{-r}^{(m+r)}(\xi,\eta)\Big|_{\substack{\xi=\cos\theta\\ \eta=\sin\theta}} d\theta, \qquad (m+r=2k) \tag{2.8}$$

3. Исследуем устойчивость укороченной системы (1.21). Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} d\xi / dt &= -\lambda\eta + X_2(\xi,\eta) + X_3(\xi,\eta) + \ldots \\ d\eta / dt &= \lambda\,\xi + Y_2(\xi,\eta) + Y_3(\xi,\eta) + \ldots \end{aligned} \tag{3.1}$$

где X_k, Y_k — совокупность членов k-го порядка типа (1.8), т. е.

$$X_k = \sum_{r=-1}^{e_{1k}} \sum_{p+q-r=k} l_{pq-r}\xi^p\eta^q\rho^{-r}, \quad Y_k = \sum_{r=-1}^{e_{2k}} \sum_{p+q-r=k} h_{pq-r}\xi^p\eta^q\rho^{-r} \tag{3.2}$$

Здесь $k \geqslant 2$, $e_{1k} \geqslant 0$, $e_{2k} \geqslant 0$ — целые числа. Коэффициенты l_{pq-r}, h_{pq-r} зависят от коэффициентов управления (1.6) — (1.8); их выражения не будем выписывать в общем виде, так как они достаточно громоздки.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \xi^2 + \eta^2 + \varphi_3(\xi,\eta) + \varphi_4(\xi,\eta) + \ldots \tag{3.3}$$

Здесь символ $\varphi_k(\xi,\eta)$ означает члены k-го порядка относительно ξ, η типа (1.8), которые попытаемся подобрать так, чтобы полная производная функция V в силу уравнений (3.1) была знакоопределенной. Запишем эту производную в виде

$$dV / dt = g_3(\xi,\eta) + g_4(\xi,\eta) + \ldots \tag{3.4}$$

Здесь $g_k(\xi,\eta)$ — совокупность членов k-го порядка

$$g_k(\xi,\eta) = \lambda\left(\xi\frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi}\right) + \Phi^{(k)}(\xi,\eta) \tag{3.5}$$

$$\Phi^{(k)}(\xi,\eta) = 2\xi X_{k-1} + 2\eta Y_{k-1} + \sum_{i+j=k+1}\left(X_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi} + Y_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right) \tag{3.6}$$

$$(k \geqslant 3,\ i \geqslant 3,\ j \geqslant 2)$$

Очевидно, что если функции $\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}$ определены, то функция $\Phi^{(k)}(\xi,\eta)$ будет известна.

Рассмотрим в (3.4) совокупность членов третьего порядка

$$g_3(\xi,\eta) = \lambda\left(\xi\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi}\right) + \Phi^{(3)}(\xi,\eta) \tag{3.7}$$

$$\Phi^{(3)}(\xi,\eta) = 2\xi X_2 + 2\eta Y_2 = \sum_{r=-1}^{\delta_3} \Phi_{-r}^{(3+r)}(\xi,\eta)\rho^{-r}$$

Здесь $\Phi_{-r}^{(3+r)}$ — формы $(3+r)$-го порядка относительно ξ, η; $\delta_3 = \max\,[e_{13}, e_{23}]$. Функции $\varphi_3(\xi,\eta)$ выберем так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\lambda\left(\xi\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi}\right) = -\Phi^{(3)}(\xi,\eta) + \sum_{r=-1,1,3,\ldots,\delta_3} G_{-r}^{(3+r)}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{3+r}{\ldots}}$$

Вычислим ${G_{-r}}^{(3+r)}$ по формуле (2.8) и получим

$$G_{-r}^{(3+r)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi_{-r}^{(3+r)}(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi=\cos\theta \\ \eta=\sin\theta}} d\theta \qquad (r = -1, 1, 3, \ldots, \delta_3) \tag{3.9}$$

Положим $G^{(m)} = \Sigma {G_{-r}}^{(m+r)}$, где m означает степень искомой однородной функции $\varphi_m(\xi, \eta)$.

Таким образом, для dV / dt будем иметь выражение

$$dV / dt = G^{(3)}(\xi^2 + \eta^2)\rho + \ldots$$

где невыписанные члены выше третьего порядка.

В достаточно малой окрестности $\xi = 0$, $\eta = 0$ функция V определенно положительная, а dV / dt при $G^{(3)} \neq 0$ будет знакоопределенная. Следовательно, на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и первой теоремы о неустойчивости невозмущенное движение системы (3.1) будет асимптотически устойчиво при $G^{(3)} < 0$ и неустойчиво при $G^{(3)} > 0$. В силу принципа сведения (теоремы 2.2 работы [5]) то же самое будет справедливо и для невозмущенного движения исходной системы (1.2), (1.3). На основании изложенного можем высказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. Управление (1.6) — (1.8) стабилизирует систему (3.1), а тем самым и систему (1.2), (1.3), если коэффициенты $\alpha_{pq-r}^{(j)}$ могут быть выбраны так, чтобы было $G^{(3)} < 0$. Если при любом выборе коэффициентов $\alpha_{pq-r}^{(j)}$ будем иметь $G^{(3)} > 0$, то система (3.1) не может быть стабилизируема управлением (1.6) — (1.8).

Отметим, что при $G^{(3)} \neq 0$ в управлении (1.6) — (1.8) достаточно ограничиться членами первого порядка ($p + q - r = 1$), так как только коэффициенты при этих членах рассматриваемого управления будут оказывать влияние на $g_3(\xi, \eta)$.

Замечание 3.1. При выбранном неаналитическом управлении (1.6) — (1.8) можно, вообще говоря, подобрать функцию $\varphi_3(\xi, \eta)$ из класса функций вида (1.8) так, чтобы вопрос о знакоопределенности dV / dt решался рассмотрением совокупности членов наинизшего порядка, даже если он нечетный.

Если при любом выборе коэффициентов $\alpha_{pq-r}^{(j)}$ постоянная $G^{(3)} = 0$, то в этом случае в (3.4) нужно рассмотреть совокупность членов четвертого порядка, т. е. функцию $g_4(\xi, \eta)$, и повторить описанную процедуру по той же схеме, что и для функции $g_3(\xi, \eta)$. Тогда вычисляем постоянную $G^{(4)}$. При этом, если $G^{(4)} < 0$, то система (3.1) стабилизируется управлением (1.6) — (1.8), а если $G^{(4)} > 0$, то стабилизация невозможна.

Если опять получится $G^{(4)} = 0$, то нужно рассмотреть в (3.4) совокупность членов пятого порядка и повторить описанную процедуру. Если, продолжая таким образом, придем к такому m ($m \leqslant N$), что $G^{(m)} \neq 0$, то задача о стабилизации решается так: при $G^{(m)} < 0$ невозмущенное движение стабилизируется управлением (1.6) — (1.8), а при $G^{(m)} > 0$ стабилизация невозможна.

Автор благодарит В. В. Румянцева за замечания и советы.

Поступила 28 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
2. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
3. Г а л ь п е р и н Е. А., К р а с о в с к и й Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, стр. 988—1004.
4 Г а л ь п е р и н Е. А. О стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, стр. 1070—1080.
5. В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР, ., 1964, т. 28, № 6, стр. 1297—1324.