ПРОСТАЯ ВОЛНА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

К. Джусупов

(Москва)

1. Рассмотрим одновременное нестационарное движение идеально проводящего газа в однородном магнитном поле H, перпендикулярном направлению скорости, с учетом сил тяжести g. Если движение изэнтропическое в начальный момент, то в услови вмороженности магнитных силовых линий $H = b\rho$ коэффициент b остается постоянным во все время движения.

Тогда для рассматриваемого случая уравнения Эйлера совместно с уравнением неразрывности сводятся к системе уравнений обычной газодинамики [1,2]

$$u_t + uu_x + \frac{p_m}{\rho} = -g, \qquad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \qquad p_m = A\rho^k + \frac{H^2}{8\pi} \tag{1.1}$$

Эффективная скорость звука при этом равна

$$c_m{}^2 = \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho}\right)_s = c^2 + v_a{}^2, \qquad c = (Ak\rho^{k-1})^{1/2}, \qquad v_a = \left(\frac{b^2\rho}{4\pi}\right)^{1/2} \tag{1.2}$$

Здесь c — обычная скорость звука для проводящей среды, v_a — альфвеновская скорость.

Пусть i_m — эффективное теплосодержание проводящего газа. Тогда, пользуясь зависимостью $\rho^{-1}dP_m = c_m{}^2\rho^{-1}d\rho = di_m$, из системы (1.1) можно получить

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c_m)\frac{\partial}{\partial x}\right] U(t) = 0, \qquad U(t) = u + gt \pm \int c_m \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.3}$$

Отсюда видно, что заданное состояние среды, определяемое $U(t)$, распространяется соответственно по течению и против течения со скоростями $u \pm c_m$, взаимодействуя между собой. При $t \leqslant 0$ равновесие проводящего газа, сжатого полем тяжести, описывается уравнением

$$\frac{k}{k-1}A\rho^{k-1} + \frac{b^2\rho}{4\pi} = -gx + \mathrm{const}$$

то для простого случая $k = 3$ эффективная скорость звука выражается формулой

$$c_m{}^2 = 3A\left(B^2 - \frac{1}{4}b_0{}^4\right), \qquad B = -\frac{1}{2}b_0{}^2 + \left[b_0{}^2B(c_{m0}) + \frac{1}{2}b_0{}^4 + \frac{c_{m0}{}^2}{3A} - \frac{2gx}{3A}\right]^{1/2}$$

$$B(c_{m0}) = \left(\frac{1}{4}b_0{}^4 + \frac{c_{m0}{}^2}{3A}\right)^{1/2}, \qquad b_0{}^2 = \frac{b^2}{12\pi A} \tag{1.4}$$

Здесь — c_{m0} соответствует значению c_m в сечении $x = 0$.

В начальный момент движения имеется начальное распределение эффективного давления, тем самым и эффективная скорость звука по столбу проводящего газа, которой соответствует уравнение (1.4). Следовательно, истечение проводящего газа, находящегося в поле тяжести, не может быть описано особым решением системы уравнений (1.1), т. е. в данном случае необходимо пользоваться общим решением этой системы [2,3].

Так как характеристиками системы (1.1) будут условия $dx / dt = u \pm c_m$, то вдоль этих линий должно выполняться соотношение

$$u + gt = \pm \int c_m \frac{d\rho}{\rho} + \mathrm{const}$$

или для рассматриваемого случая

$$u + gt = \pm \{c_m + b_0{}^2(3A)^{1/2} \ln [(B(c_m) + {}^1/_2 b_0{}^2)^{1/2} + (B(c_m) - {}^1/_2 b_0{}^2)^{1/2}]\} + C \tag{1.5}$$

Здесь $C = \mathrm{const}$ определяется из начального условия.

При истечении влево движется фронт волны разрежения, который в каждый данный момент граничит с невозмущенной областью и описывается уравнением

$$dx / dt = - c_m = - [3A (B^2 - {}^1/_4 b_0^4)]^{1/2}$$

Интегрируя это уравнение при условии $t = 0$, $B = B_0$ получим закон движения фронта в виде

$$x = \frac{1}{2g}\left[c_m^2 - c_{m0}^2 + 3Ab_0^2 (B (c_m) - B (c_{m0}))\right]$$

$$t = \frac{1}{g}\left[c_m - c_{m0} + \frac{1}{2} b_0^2 (3A)^{1/2} \ln \frac{c_m + (c_m^2 + {}^3/_4 A b_0^4)^{1/2}}{c_{m0} + (c_{m0}^2 + {}^3/_4 A b_0^4)^{1/2}}\right]$$

На фронте волны разрежении $u = 0$, поэтому из уравнения (1.5) имеем

$$gt = c_m - c_{m0} + b_0^2 (3A)^{1/2} \ln \frac{(B (c_m) + {}^1/_2 b_0^2)^{1/2} + (B (c_m) - {}^1/_2 b_0^2)^{1/2}}{(B (c_{m0}) + {}^1/_2 b_0^2)^{1/2} + (B (c_{m0}) - {}^1/_2 b_0^2)^{1/2}}$$

Фронт истечения проводящего газа в вакуум, в котором отсутствует магнитное поле, обладает максимальной скоростью разлета, т. е. подчиняется закону

$$c_m = 0, \qquad u + gt = f (c_{m0})$$

$$f (c_{m0}) = c_{m0} + b_0^2 (3A)^{1/2} \{\ln [(B (c_{m0}) + {}^1/_2 b_0^2)^{1/2} + (B (c_{m0}) - {}^1/_2 b_0^2)^{1/2}] - \ln b_0\}$$

или, что то же самое,

$$dx / dt = u = f (c_{m0}) - gt$$

Отсюда

$$x = tf (c_{m0}) - {}^1/_2 gt^2$$

При $t = f (c_{m0}) / g$ газ достигает максимального подъема $x_{\max} = f^2 (c_{m0}) / 2g$ и после чего начинает падать «вниз». При этом возникает новая волна, которая может б просто найдена, так как для нее имеются условия $u = 0$,

$$c_m^2 = 3A (B^2 - {}^1/_4 b_0^4)$$

Отметим еще следующие обстоятельства. Для упрощения вычислений условие вмороженности силовых линий магнитного поля $H = b\rho$ можно заменить выражением

$$H^2 = b^2\rho^2 = b_1\rho^3 + b_2$$

не теряя сильно в точности результата при целесообразном выборе коэффициентов b_1 и b_2. При этом система уравнений (1.3) примет простой вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm c_m) + (u \pm c_m) \frac{\partial}{\partial x}(u \pm c_m) + g = 0$$

решение которого очевидно

$$x = (u \pm c_m) t + {}^1/_2 gt^2 + F_{1,2} (u \pm c_m + gt)$$

Здесь $F_1 (u + c_m + gt)$, $F_2 (u - c_m + gt)$ — произвольные функции. Можно сказать, что в этом случае две величины $u \pm c_m$ распространяются независимо одна о другой в виде двух невзаимно действующих простых волн.

Если истечение проводящего газа, ранее находящегося в адиабатическом равновесии $c_m^2 = c_{m0}^2 - 2gx$, $u = 0$, происходит в сторону положительных значений x, то

$$x = ut + \frac{gt^2}{2} - \frac{1}{4g} (u + gt + c_m + c_{m0})^2 - 2c_{m0} (u + gt + c_m + c_{m0})]$$

Поэтому фронт волны разрежения теперь движется по закону $x = -(c_{m0}t + {}^1/_2 gt^2)$, а фронт разлета

$$x = c_{m0}t - {}^1/_2 gt^2 \qquad (x_{\max} = c_{m0}^2 / 2g \text{ при } t = c_{m0} / g)$$

2. Если имеется несжимаемая идеально проводящая жидкость, движущаяся в поперечном поле по открытому каналу, то движение такой жидкости может быть представлено аналогичным движением одномерного идеально проводящего газа. При этом необходимо предположить, что глубина жидкости и ширина канала малы по сравнению с длиной волны [4]. Основными уравнениям для рассматриваемого течения будут

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}(P + H^2 / 8\pi)_x = 0, \qquad F_t + (uF)_x = 0, \qquad H = b_0 F \tag{2.1}$$

где F — площадь поперечного сечения канала.

Так как $dp = g\rho dh$, где h — глубина канала, то уравнение движения имеет вид [2]

$$u_t + uu_x + gh_x + (H^2 / 8\pi\rho)_x = 0 \tag{2.2}$$

В случае призматического канала $F = F(h)$, поэтому при помощи равенства $gdh / dF = b_0 F$ уравнение (2.2) можно представить в виде

$$u_t + uu_x + GFF_x = 0, \qquad G = b_0 + b^2 / 4\pi\rho = \mathrm{const}$$

Теперь систему (2.1) введением новой переменной $C_m^2 = CF^2$ приводим к удобному виду [2,5]

$$u_t + uu_x + c_m c_{mx} = 0, \qquad c_{mt} + uc_{mx} + c_m u_x = 0 \tag{2.3}$$

которая, в свою очередь, может быть записана в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c_m)\frac{\partial}{\partial x}\right](u \pm c_m) = 0 \tag{2.4}$$

Здесь c_m — эффективная скорость звука, определяемая (1.2), при этом в случае проводящей жидкости $c = \sqrt{2gh}$, $v_a = b\,(gh / 2\pi\rho b_0)^{1/2}$. Из системы (2.4) видно, что величины $u \pm c_m$ имеют постоянные значения для точки, движущейся в проводящей жидкости со скоростями $u \pm c_m$, т. е. для точек, движения которых характеризуются уравнениями $dx / dt = u \pm c_m$, а соответствующие возмущения, идущие на встречу одно другому, не взаимодействуют между собой.

Таким образом, система (2.4) совпадает с дифференциальными уравнениями адиабатического течения идеального газа с показателем адиабаты $k = 3$. Это обстоятельство позволяет непосредственно переносить в данную задачу все газодинамические результаты, относящиеся к движению без образования ударных волн.

Поступила 13 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплан С. А., Станюкович К. П. Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного движения. Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 4.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
3. Станюкович К. П., Джусупов К. Неустановившиеся истечения газа в постоянном поле тяжести. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 4.
4. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, ч. 1, гл. III, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1938.
5. Голицын Г. С. Одномерные движения в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.