# ОБ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

К. В. Брушлинский, А. И. Морозов

(Москва)

Установлено, что система уравнений магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла для двумерного плоского течения бездиссипативной плазмы поперек магнитного поля не будет эволюционной (корректной).

Численное решение задачи о течении плазмы в коаксиальном канале с учетом эффекта Холла [1] обнаружило неустойчивость течения, проявляющуюся тем заметнее, чем сильнее эффект Холла. Эта неустойчивость нестационарного потока плазмы развивается вблизи анода и носит характер взрыва, в котором резко возрастают плотность тока и скорость частиц. Экспериментальное изучение таких течений [2] показало, что вблизи анода возникают большие скачки потенциала, а само течение становится неустойчивым, приводя к так называемым «привязкам тока» и сильной эрозии анода.

Указанные результаты и наблюдения вызывают желание провести математическое исследование устойчивости двумерного течения плазмы с учетом эффекта Холла. Заметка посвящена относительно более простому, но важному результату, который следует иметь в виду при обстоятельных исследованиях на эту тему, а именно: уравнения бездиссипативной магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла для плоского двумерного течения поперек магнитного поля неэволюционны. Под неэволюционностью [3] (или некорректностью) понимается неустойчивость решения задачи Коши относительно высокочастотных возмущений, растущих как угодно быстро. Этот же результат справедлив и для осесимметричных течений под действием азимутального магнитного поля, поскольку локально их можно рассматривать как плоские.

Течение невязкой и нетеплопроводной плазмы с учетом эффекта Холла описывается уравнениями (в безразмерной форме и в обычных обозначениях [1])

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \qquad \xi = \frac{c}{eL}\left(\frac{M}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2} \\
\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] \qquad \left(\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma L v_0} = \frac{1}{R_m}\right) \\
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - \xi \operatorname{rot}\left[\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\rho}\times\mathbf{H}\right)\right] - \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot}\mathbf{H})
\end{gathered} \tag{1}
$$

Эту систему следует дополнить условием адиабатичности (или изотермичности при значении $\gamma = 1$)

$$
p = \beta\rho^\gamma \qquad \left(\beta = \frac{4\pi p_0}{H_0^2}\right)
$$

Здесь $\beta$ — отношение характерных для задачи газового и магнитного давлений, $\xi$ — параметр обмена, характеризующий эффект Холла, $\eta$ — безразмерная величина, обратная проводимости.

В случае плоского течения поперек магнитного поля $v_z = H_x = H_y = 0$; кроме того $\partial(\ldots)/\partial z = 0$. Уравнения (1) имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\
\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H^2}{2}\right), \qquad \rho\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{H^2}{2}\right) \\
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} + \xi\frac{H}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}\right) = \eta\Delta H
\end{gathered} \tag{2}
$$

Здесь

$$
u = v_x, \quad v = v_y, \quad H = H_z, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}
$$

Особенностью рассматриваемого типа течения будет вырожденный характер эффекта Холла. В уравнениях (2) он входит в виде произведений первых производных, в то время, как, согласно (1), главные члены соответствующего выражения должны быть, вообще говоря, второго порядка.

Для изучения устойчивости относительно высокочастотных возмущений система (2), как обычно, линеаризуется, и коэффициенты линейной системы полагаются постоянными. При этом, чтобы почувствовать влияние эффекта Холла, нужно при линеаризации холловского члена в (2) учесть производные невозмущенного решения и считать их постоянными. Если обозначить возмущения $\rho_1$, $u_1$, $v_1$ и $H_1$, то линеаризованная система уравнений такова:

$$\frac{d\rho_1}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)=0 \qquad \frac{du_1}{dt}+\frac{C^2}{\rho}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{H}{\rho}\frac{\partial H_1}{\partial x}=0 \qquad \left(C^2=\frac{dp}{d\rho}=\beta\gamma\rho^{\gamma-1}\right)$$

$$\frac{dv_1}{dt}+\frac{C^2}{\rho}\frac{\partial \rho_1}{\partial y}+\frac{H}{\rho}\frac{\partial H_1}{\partial y}=0, \qquad \frac{dH_1}{dt}+H\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+$$

$$+\xi\frac{H}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial H_1}{\partial y}-\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\right)=\eta\Delta H_1 \qquad (3)$$

Здесь все коэффициенты, включая $\partial\rho / \partial x$, $\partial\rho / \partial y$, $\partial H / \partial x$, $\partial H / \partial y$ постоянны.

Решения системы (3) ищутся в виде плоских волн, т. е. $\exp(i\omega t + ik_1x + ik_2y)$ с постоянными множителями, где $k_1$, $k_2$ — произвольные действительные числа (см. например, [3]). Обозначим $s^2 = k_1^2 + k_2^2$, $\omega = s\lambda$, $k_1 = s\mu$, $k_2 = s\nu$. Тогда направление плоской волны определяется единичным вектором $\mathbf{l} = (\mu, \nu)$, и естественно писать

$$\mu u + \nu v = v_l, \quad \mu\partial / \partial y - \nu\partial / \partial x = \partial / \partial\tau$$

где $\tau$ — направление вдоль фронта волны, ортогональное $\mathbf{l}$. Если, наконец, обозначить $\lambda + v_l = z$, то характеристическое уравнение, связывающее $\omega$, $k_1$ и $k_2$ принимает следующий простой вид:

$$z\left(z^3-\frac{\xi H}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}z^2-C_m{}^2z+\frac{\xi H}{\rho^2}\frac{\partial P}{\partial\tau}-is\eta\,(z^2-C^2)\right]=0 \qquad (4)$$

$$(C_m{}^2=C^2+H^2/\rho,\ \ P=p+H^2/2)$$

Условием корректности задачи Коши для систем (2) и (3) будет, очевидно, неравенство

$$\operatorname{Im}\omega = s\operatorname{Im}\lambda = s\operatorname{Im}z \geqslant \text{const} \qquad (5)$$

при любых действительных $\mu$, $\nu$ и $s > 0$. При конечных значениях $s$ решения всегда конечны, поэтому практически нужно требовать выполнения условия (5) при $s\to\infty$.

В случае $\eta \neq 0$ легко убедиться, что корни уравнения (4) имеют следующую асимптотику при $s\to\infty$:

$$z_1 = is\eta + O(1), \quad z_{2,3} = \pm C + O(1/s)$$

Величина $s > 0$ и $\eta > 0$, поэтому они удовлетворяют условию (5), т. е. при конечной проводимости рассматриваемая задача эволюционна (корректна).

При идеальной проводимости, т. е. при $\eta = 0$, уравнение (4) будет уравнением с действительными коэффициентами, не зависящими от $s$. Если оно имеет два комплексно сопряженных корня, то для одного из них $\operatorname{Im}z < 0$, и $\operatorname{Im}\omega \to -\infty$ при $s\to\infty$, т. е. условие (5) не выполнено. Значит, выполнение условия (5), т. е. корректность задачи, эквивалентна действительности всех трех корней уравнения (4).

Известно, что все корни уравнения $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ с действительными коэффициентами действительны тогда и только тогда, когда дискриминант

$$D \equiv p^2q^2 + 18pqr - (4p^3r + 4q^3 + 27r^2) \geqslant 0$$

В применении к уравнению (4) при ($\eta = 0$)

$$D = 4gX^2 + (C_m^4 + 18C_m^2 g - 27g^2)\,X + 4C_m^6 \tag{6}$$

$$X = \left(\frac{\xi H}{\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\right)^2, \qquad g = \frac{\partial P / \partial\tau}{\partial\rho / \partial\tau}$$

Элементарное исследование квадратного трехчлена (6) показывает, что $D \geqslant 0$ при всех $X > 0$ в том и только в том случае, когда

$$0 \leqslant g \leqslant C_m^2 \tag{7}$$

Это значит, что система уравнений (2) эволюционна, если условие (7) выполнено для всех возможных направлений вектора $\tau$. Если оно нарушено, то уравнение (4) имеет комплексные корни, приводящие к некорректности в следующих случаях:

$$1)\ g < 0, \quad X > X_2; \qquad 2)\ g > C_m^2, \quad X_1 < X < X_2$$

Здесь $X_1$, $X_2$ — корни трехчлена $D$.

В реальных течениях плазмы условие (7), как правило, нарушается. Действительно, если градиенты $\rho$ и $P = p + H^2 / 2$ не коллинеарны, то всегда найдется такое направление волны, что $g < 0$.

Таким образом, уравнения (2) неэволюционны в случае бесконечной проводимости плазмы. По-видимому, это свойство уравнений ответственно за то, что при расчетах течений с эффектом Холла возникают неустойчивости тем скорее, чем выше проводимость плазмы.

В заключение следует отметить, что полученный результат обязан вырожденному характеру эффекта Холла в уравнениях (2) плоского течения поперек магнитного поля. В случае произвольного течения не удается исследовать корректность методом плоских волн. Повторение проведенных рассуждений в общем трехмерном случае (или даже для трехмерных возмущений рассмотренного здесь течения) приводит к следующим результатам.

1. При конечной проводимости ($\eta \neq 0$) уравнения по-прежнему эволюционны.

2. При идеальной проводимости ($\eta = 0$) характеристическое уравнение, обобщающее (4), имеет часть корней в виде $z = as + O(1)$, т. е. $\omega = as^2 + O(s)$ с действительным $a$. Главный член этого выражения «нейтрален», и выполнение условия (5) при $s \to \infty$ зависит от следующего члена. В то же время в методе плоских волн, предполагающем постоянство коэффициентов, имеют смысл только главные члены асимптотики.

Таким образом, задача в общем бездиссипативном случае значительно сложнее, так как требует рассмотрения переменных коэффициентов уравнений. Она будет в каком-то смысле обобщением на систему уравнений сложной задачи об эволюционности уравнения Шредингера с переменными коэффициентами.

Поступила 14 I 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Расчет двумерных нестационарных течений плазмы конечной проводимости при наличии эффекта Холла. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1, стр. 3—8.
2. Ковров П. Е., Морозов А. И., Токарев Л. Г., Щепкин Г. Я. Распределение магнитного поля в коаксиальном инжекторе плазмы. Докл. АН, 1967, т. 172, № 6, стр. 1305—1308.
3. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2, стр. 87—158.