

К ЗАДАЧЕ О ДВУХ ПОРШНЯХ

Е. В. Ермолин, Л. И. Рубина, А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

В работе [1] был решен ряд задач о течениях политропного газа, возникающих когда стенки бесконечного двугранного угла (плоскости P_1 и P_2), внутри которого в начальный момент времени газ покоился, начинают выдвигаться из газа с постоянными скоростями V_1 и V_2 . Плоскости P_1 и P_2 играют при этом роль поршней, движущихся параллельно самим себе. Было показано, что если скорости выдвижения плоскостей достаточно велики (по сравнению со скоростью звука c_0 в покоящемся газе), то у ребра двугранного угла (линии пересечения поршней) может образоваться зона вакуума. Решение задач строилось из областей автомодельных потенциальных простых и двойных волн и областей постоянного движения. Предметом рассмотрения в [1] был в основном лишь случай, когда образуется область вакуума, случай же, когда зоны вакуума не образуется и осуществляется безотрывное течение, не был исследован.

Ниже при некоторых ограничениях на классы изучаемых течений завершается в основном рассмотрение задачи о двух выдвигаемых из газа поршнях. Показано, что для структуры возникающих течений имеются три возможности.

1. Осуществляется изэнтропическое безотрывное потенциальное течение во всей области возмущенного движения; при этом у ребра двугранного угла имеется область постоянного течения, которая через некоторую характеристическую поверхность смыкается непосредственно с областью нестационарной потенциальной двойной волны.

2. У ребра угла возникают сильные разрывы (ударные волны), течение перестает быть потенциальным, и для решения необходимо привлекать класс двумерных автомодельных течений (с переменными $\xi_i = x_i / t$, $i = 1, 2$) с переменной энтропией.

3. У ребра угла возникает область вакуума. В возмущенной области уравнение двойных волн всегда имеет гиперболический тип и решение можно найти методом характеристик [1].

В работе подробно рассмотрен случай газа с большой начальной плотностью (большой скоростью звука c_0), когда скорости V_1 и V_2 малы по сравнению с c_0 . Здесь удалось построить аналитическое решение задачи о безотрывном течении и указать значения углов α ($0 \leq \alpha \leq \pi / 2$ — угол между плоскостями P_1 и P_2), для которых возможно безотрывное потенциальное течение. Полученное упрощенное уравнение будет хорошей моделью для исследования структуры течений при малых скоростях V_1 и V_2 .

В случае зоны вакуума изучены особенности у границы «вакуум — газ».

1. В условия задачи не входят параметры с размерностью длины. Поэтому решение — функции u_1, u_2 (компоненты вектора скорости) и c — скорость звука — будет зависеть от двух автомодельных переменных $\xi_1 = x_1 / t$ и $\xi_2 = x_2 / t$, где x_i — декартовы координаты, t — время. Систему уравнений, описывающую автомодельные простые волны, запишем в виде [1,2]

$$\begin{aligned} u_1'^2 + u_2'^2 &= 1 & (u_i = u_i(\theta)) \\ \xi_1 u_1' + \xi_2 u_2' - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta - u_1 u_1' - u_1 u_2' &= 0 & (\theta = 2(\gamma - 1)^{-1}c) \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по θ , γ — показатель адиабаты в уравнении состояния

$$p = a^2 \rho^\gamma \quad (a^2 = \text{const})$$

Здесь p — давление, ρ — плотность.

Для потенциальных двойных волн имеем [1,3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta [(1 - \theta_1^2)\theta_{22} + 2\theta_1\theta_2\theta_{12} + (1 - \theta_2^2)\theta_{11}] + \\ + \frac{1}{2}(\gamma - 3)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\xi_i = u_i + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta\theta_i \quad \left(\theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial u_i}, \quad \theta_{ik} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u_i \partial u_k}; \quad (i = 1, 2) \right) \quad (1.3)$$

Рассмотрение ведется одновременно в плоскости годографа скоростей u_1, u_2 (в ней решается уравнение 1.2) и в плоскости автомодельных переменных ξ_1, ξ_2 .

В [1] было сказано, что при малых скоростях V_1 и V_2 , когда реализуется безотрывный режим течения, в плоскости годографа при решении уравнения двойных волн (1.2) появляется линия параболичности, а за ней область эллиптичности этого уравнения, занимающая некоторую небольшую окрестность точки

$$O' (-V_1, -(V_1 \cos \alpha + V_2) / \sin \alpha)$$

Результат этот был получен численно. Однако при более тщательном исследовании (в частности, при уменьшении погрешности счета путем увеличения числа расчетных точек вдоль каждой характеристики) оказалось, что в плоскости годографа область ограниченная линией, вдоль которой $R^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 = 0$, настолько мала, что ее можно принять за точку O' . Соответствующая ей область в плоскости $\xi_1 \xi_2$ остается при этом все же достаточно большой. Расчеты показали, что в плоскости годографа характеристики уравнения (1.2) стягиваются в точку O' , а значения функций θ_i в точке O' зависят от направления приближения к этой точке, т. е. в точке O' функции θ_1 и θ_2 многозначны [4].

Таким образом, можно считать, что в случае осуществления безотрывного течения вдоль некоторой линии в плоскости $\xi_1 \xi_2$ происходит примыкание течения типа двойной волны к течению с постоянными параметрами, которому в плоскости годографа соответствует точка O' .

В работе [5] была исследована задача о примыкании течения типа двойной волны к области покоя и выяснены особенности решений уравнения (1.2) в окрестности линий примыкания. Легко обобщить результаты, полученные в [5], на случай примыкания двойной потенциальной волны к постоянному течению.

Чтобы установить многозначность θ_1 и θ_2 в точке O' , перейдем в уравнении (1.2) к новым переменным, положив

$$u_1 = \sigma \cos \varphi - V_1, \quad u_2 = \delta \sin \varphi - (V_1 \cos \alpha + V_2) / \sin \alpha \quad (1.4)$$

В новых координатах точке O' соответствует отрезок линии $\delta = 0$, на котором $\theta_\varphi = 0, \theta_\delta = 1$, а система уравнений двойных волн принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma - 1}{2} \theta \left[\theta_{\delta\delta} \left(1 - \frac{\theta_\varphi^2}{\delta^2} \right) + \frac{1 - \theta_\delta^2}{\delta^2} \theta_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\theta_\delta \theta_\varphi}{\delta^2} \theta_{\delta\varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{\theta_\delta}{\delta} (1 - \theta_\delta^2) - 2 \frac{\theta_\delta \theta_\varphi^2}{\delta^3} \right] + \frac{\gamma - 3}{2} \left(\theta_\delta^2 + \frac{\theta_\varphi^2}{\delta^2} \right) + 2 = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \delta \cos \varphi - V_1 + \frac{\gamma - 1}{2} \theta \left(\theta_\delta \cos \varphi - \theta_\varphi \frac{\sin \varphi}{\delta} \right) \\ \xi_2 &= \delta \sin \varphi - \frac{V_1 \cos \alpha + V_2}{\sin \alpha} + \frac{\gamma - 1}{2} \theta \left(\theta_\delta \sin \varphi + \theta_\varphi \frac{\cos \varphi}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

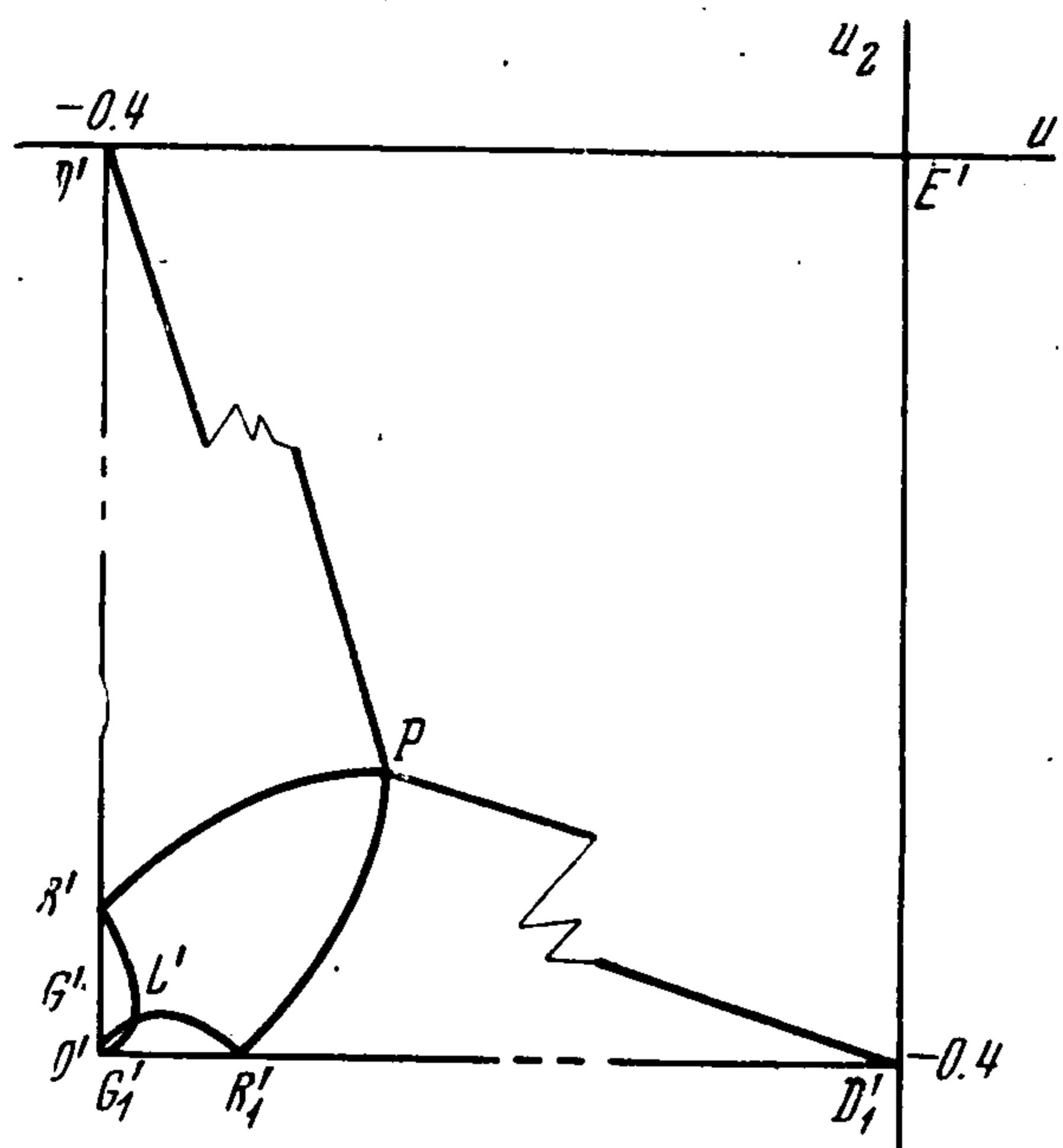
Так же, как и в [5], линия $\delta = 0$ будет характеристикой уравнений (1.2) и одновременно линией параболического вырождения (1.2). Рассматривая окрестность линии $\sigma = 0, \Delta\delta = h, h < 1$ и предполагая, что в этой окрестности непрерывны все четвертые производные функции θ , содержащие дифференцирование дважды по δ и дважды по φ , аналогично [5], для функции θ получим разложение

$$\theta(\delta, \varphi) = \frac{2}{\gamma - 1} \theta^\circ + \delta + \frac{\gamma + 1}{4} \delta^2 + C(\varphi) \delta^3 \quad (1.7)$$

Из (1.6) при $\delta = 0$ следует, что линия примыкания будет окружностью с центром в точке O' (в плоскости $\xi_1 \xi_2$). Уравнения характеристик двух семейств в окрестности линии примыкания имеют вид

$$\varphi + 2 \sqrt{(\gamma + 1)\delta} = C_1 = \text{const}, \quad \varphi - 2 \sqrt{(\gamma + 1)\delta} = C_2 = \text{const} \quad (1.8)$$

Для ряда конкретных задач было проведено сравнение основных параметров тече-



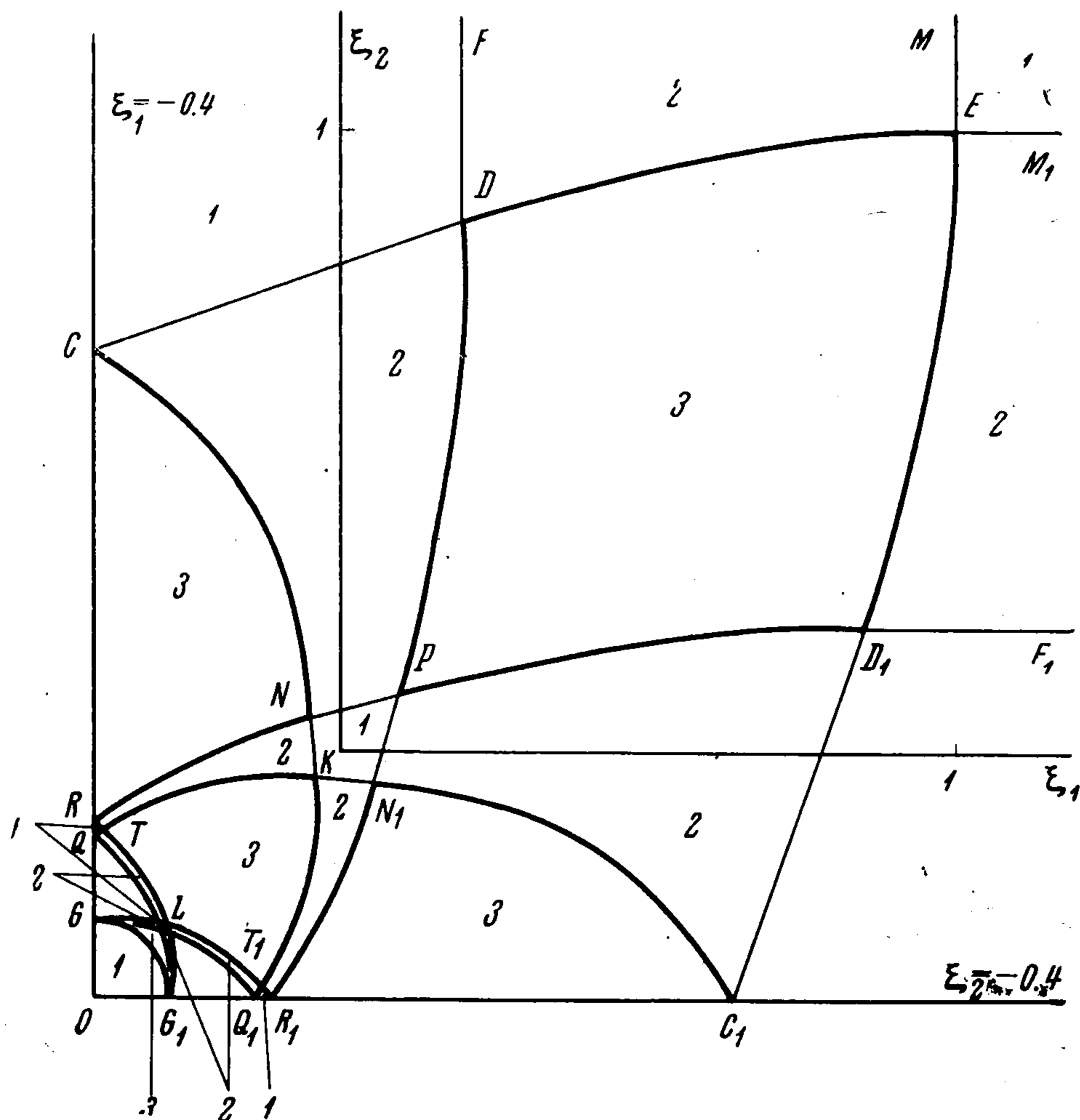
Фиг. 1

На фиг. 1 линии $D'P'$, $D_1'P'$, $E'D'$, $E'D_1'$, $P'R'$, $P'R_1'$, $R'L'$, $R_1'L'$, $L'G'$, $L'G_1'$ соответ-
вуют областям 2, а точки P' , R' , R_1' , L' , O' — областям 1. Например, линии $D'P'$ со-
ответствует область $DCNP$, а точке P' область $PNKN_1$. (На фиг. 1 точки обозначены
теми же буквами, что и соответствующие точки на фиг. 2, но со штрихами.)

ния в окрестности точки O' , полученных двумя способами: при [помощи численного интегрирования уравнения (1.2) методом характеристик на мелкой сетке и при помо-
щи аналитических выражений (1.7) — (1.8) (в точке O' задавалось значение θ°).

Во всех просчитанных вариантах, ког-
да осуществлялся безотрывный режим тече-
ния, наблюдалось хорошее совпадение как
величин θ в окрестности точки O' , так и кар-
тин характеристик (в плоскости δ, φ), полу-
ченных обоими способами.

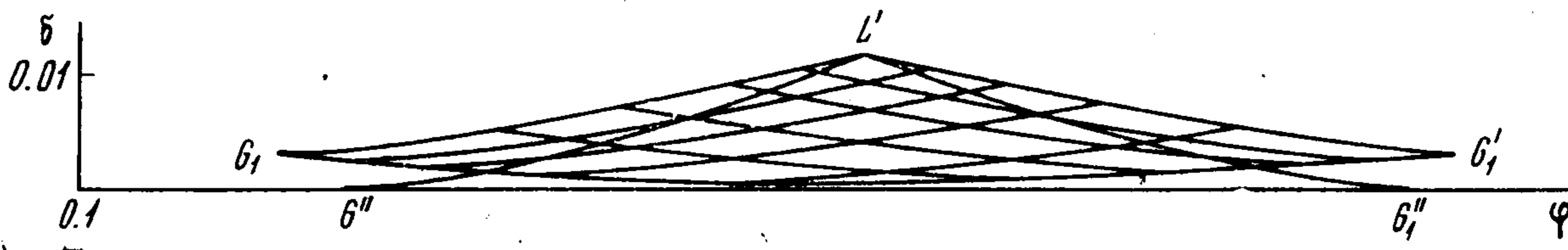
На фиг. 1, 2 показана структура безот-
рывного течения для случая $\gamma = 3$, $\alpha = 1/2\pi$,
 $V_1 = V_2 = 0.4$ в плоскостях u_1u_2 и $\xi_1\xi_2$, со-
ответственно. На фиг. 2 обозначено: 1 — об-
ласти постоянного движения, 2 — области
простых волн и 3 — области двойных волн.



Фиг. 2

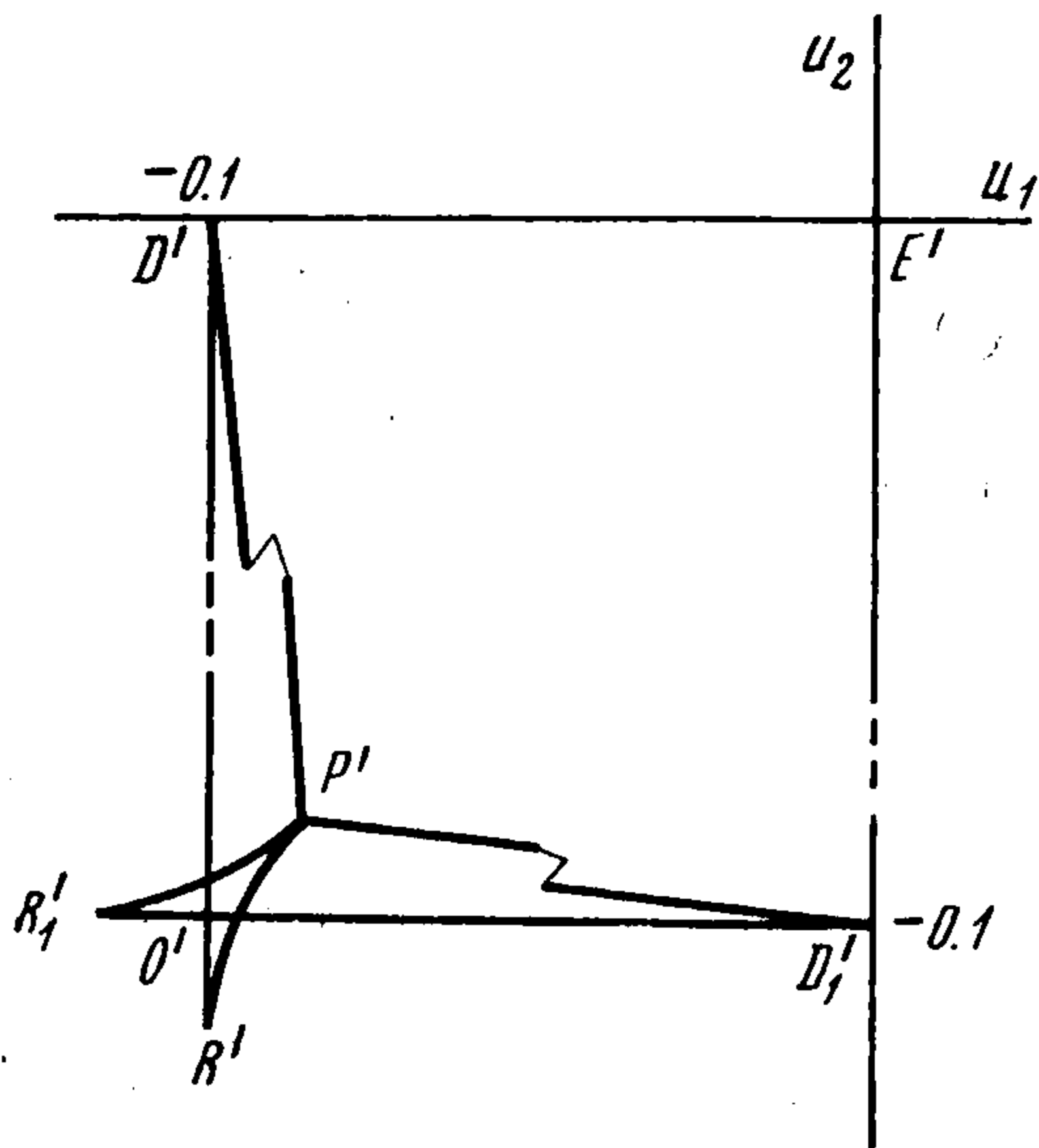
На фиг. 3 показано поведение в координатах δ, φ характеристик, полученных мето-
дом численного интегрирования уравнения (1.2), в области $L'G'O'G_1'$ (фиг. 1). (Мас-
штаб по оси $O\delta$ увеличен в десять раз). Для сравнения через точку L' проведены
характеристики (1.8) (линии $L'G''$ и $L'G_1''$).

Замечание 1.1 Осуществить примыкание постоянного движения непосредственно к двойной волне с самого начала вместо построения простых волн нельзя. Для осуществления такого примыкания необходимо, чтобы имелось параболическое вырождение уравнения (1.2) и, кроме того, в соответствии с результатами [5], плотность в течении типа двойной волны должна возрастать при удалении от линии примыкания. Если (1.2) имеет гиперболический тип в окрестности линии вырождения, удовлетворить обоим этим условиям с самого начала невозможно.

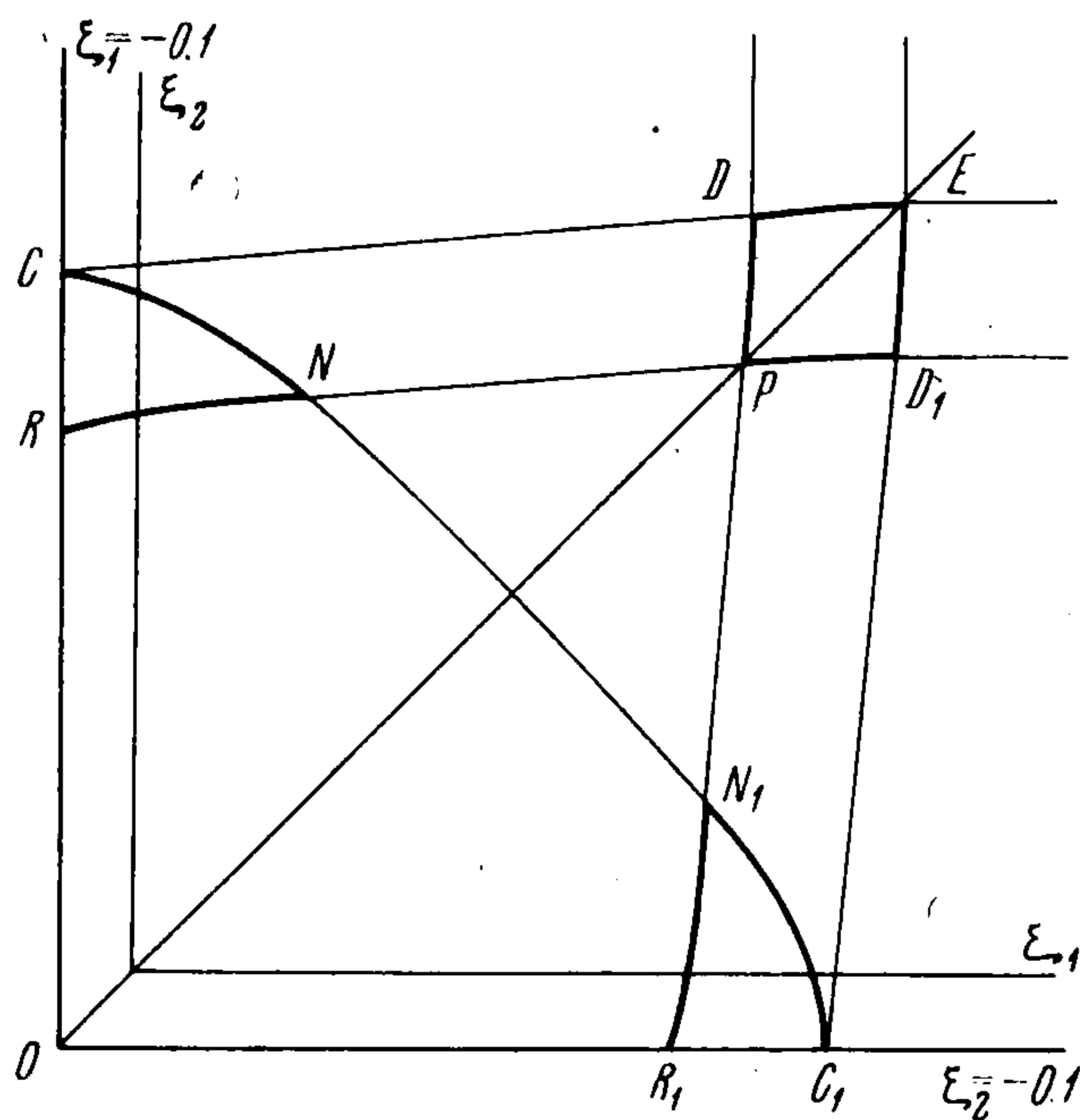


Фиг. 3

2. Численные расчеты показали, что при малых V_1 и V_2 случаи осуществления безотрывных течений, примеры которых были приведены в предыдущем параграфе, весьма редки и реализуются лишь при некоторых определенных соотношениях между углом α и скоростями V_1, V_2 . Как правило, при конкретных реализациях алгоритма построения течений, для малых V_1 и V_2 получается неоднозначное соответствие между множествами пар (ξ_1, ξ_2) и (u_1, u_2) , соответствующих течению, и, более того, характеристики в плоскости годографа выходят за естественную область определения течения (например, при $\alpha = \pi/2$ — за пределы прямоугольника $-V_1 \leq u_1 \leq 0, -V_2 \leq u_2 \leq 0$). Факт этот не случаен и не связан с погрешностью численных расчетов.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим частный случай, когда α и γ связаны между собой зависимостью

$$\frac{+1}{\gamma-3} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = 0, \quad 1 < \gamma < 3, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (2.1)$$

(так называемый [4] случай согласованных α и γ).

Покажем уже строго, что для определенных значений V в плоскости годографа происходит взаимное наложение областей, соответствующих различным областям в плоскости $\xi_1 \xi_2$ ($V_1 = V_2 = V$).

На фиг. 4,5 показано, соответственно, в плоскостях $u_1 u_2$ и $\xi_1 \xi_2$ решение со взаимным наложением областей в плоскости годографа, полученное численно для $\alpha = 1/2\pi, \gamma = 3, V = 0.1, \theta_0 = 1$. Будем пользоваться обозначениями фиг. 4, 5, считая $0 < \alpha < 1/2\pi$ (для таких α картина качественно сохраняется).

Уравнения кривой примыкания ED простой и двойной волн [1] для случая (2.1) имеют вид

$$\xi_1 = \frac{\gamma + 1}{2} \theta - \theta_0, \quad \xi_2 = \frac{\gamma^2 - 1}{2(3 - \gamma)} \theta \quad (2.2)$$

т. е. линия ED будет прямой, вдоль нее $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha$.

Аналогичные формулы справедливы для кривой ED_1 , т. е. в области $EDPD_1$ решение уравнения (1.2) можно записать в виде

$$\theta = u_1 + \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha u_2 + \theta_0 \quad (2.3)$$

К области $EDPD_1$ примыкают волны Римана вида

$$u_1 = -\cos \alpha (\theta - \theta_0 + V \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha), \quad u_2 = \sin \alpha (\theta - \theta_0 + V) \quad (2.4)$$

через характеристику DP и соответственно

$$u_1 = \theta - \theta_0 + V \sin \alpha \operatorname{ctg}^{1/2} \alpha, \quad u_2 = -V \sin \alpha \quad (2.5)$$

через характеристику D_1P .

Из (2.4), (2.5) в точке P' имеем $\theta = \theta_0 - 2V$, т. е. при $V \geq \theta_0 / 2$ в области $EDPD_1$ появится зона вакуума. Пусть $V < \theta_0 / 2$. Определим, при какой скорости V произойдет наложение областей $D'P'R'$ и $D_1'P'R_1'$. Угловым коэффициентом биссектрисы $O'E'$ равен $\operatorname{ctg}^{1/2} \alpha$, а соответствующий коэффициент для характеристики $P'R'$ в P' находится из соотношения

$$\left(\frac{du_2}{du_1} \right)_{P'} = \frac{\theta_1 \theta_2 - \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 - 1}}{1 - \theta_2^2}$$

где θ_i нужно брать в точке N .

Для того чтобы характеристика $P'R'$ пошла ниже $O'E'$, т. е. произошло наложение областей $D'P'R'$ и $D_1'P'R_1'$, должно выполняться неравенство

$$\left(\frac{du_2}{du_1} \right)_{P'} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = b \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left[-\cos \alpha \left(b + \frac{2a}{\cos \alpha \cos^{1/2} \alpha} \right) \right]^{-1} > 0$$

$$a = \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{\theta_0 - 2V}{\theta_0 - V} \right)^{(3-\gamma)/(\gamma-1)} \right]^{1/2}, \quad b = a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{2a}{\cos^{1/2} \alpha} - 1 \quad (2.6)$$

В силу (2.1)

$$b + \frac{2a}{\cos \alpha \cos^{1/2} \alpha} = \frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)(3 - \gamma)} + 1 > 0$$

Для выполнения неравенства (2.6) должно быть $b < 0$, что возможно при $1 < \gamma < 2$, т. е. для $1/3 \pi < \alpha < 1/2 \pi$. При этом скорость V выдвижения поршней удовлетворяет неравенству

$$V < \theta_0 \frac{1 - B}{2 - B} = V^* \quad \left(B = \left[\frac{3\gamma - 5 + (3 - \gamma)^{3/2}}{\gamma} \right]^{(\gamma-1)/(3-\gamma)} \right) \quad (2.7)$$

в частности, при $\gamma = 1,4$, $\alpha = \arccos 0,2$, $V^* \approx 0,03 \theta_0$.

Итак, при выполнении неравенства (2.7) в окрестности точки P' отображение из плоскости годографа в физическое пространство неоднозначно.

На фиг. 4 показано, что при численном решении смешанной задачи для уравнения (1.2) в области $D'P'R'$ точка R' характеристики $P'R'$ выходит за естественную область определения течения — квадрат $O'D'E'D_1'$. Компонента вектора скорости u_2 при этом вдоль стенки поршня CO (фиг. 5) не может быть монотонной (в точке $R u_2 < -0,1$) и, следовательно, вдоль CO должна образоваться волна сжатия, а течение перестает быть потенциальным и изэнтропическим.

Замечание 2.1. Если рассматривать задачу о выдвижении поршней с произвольно-меняющимися скоростями (с нулевым ускорением при $t = 0$) и искать решение в классе неавтомоделных двойных волн, то, как правило, решение без особенностей в этом классе построить не удастся. По-видимому, так же как и в автомоделном случае, у вершины угла могут образоваться слабые ударные волны.

Замечание 2.2. При выдвижении поршней, угол между которыми $\alpha > 1/2\pi$, можно всегда построить решение в классе автомодельных потенциальных двойных волн только для достаточно больших скоростей V_1 и V_2 , когда есть истечение газа в вакуум. В случае же малых V_i найти в этом классе решение без особенностей, вообще говоря, невозможно. (В частности, если одну из стенок оставить неподвижной, в окрестности вершины двугранного угла заведомо появляется слабая ударная волна).

3. Большинство из вышеприведенных результатов было получено при численном решении уравнения (2.1). Получение аналитических решений уравнения (2.1), хотя бы для некоторых областей, очень затруднено вследствие его нелинейности. Представляет интерес попытка упростить это уравнение при некоторых ограничениях на физическое содержание задачи с тем, чтобы упрощенное уравнение допускало аналитическое решение задач Гурса и смешанных задач при краевых условиях, соответствующих рассматриваемой задаче о двух поршнях. Оказывается, что можно сделать для «тяжелого» газа при малых V_1 и V_2 , когда зоны вакуума не образуется. При этом основные качественные особенности безотрывных течений, перечисленные в пп. 1 и 2. сохраняются, а количественные результаты, полученные при помощи упрощенного уравнения, хорошо согласуются с результатами счета методом характеристик уравнения (1.2) (например, на фиг. 6 пунктиром показано решение упрощенного уравнения, сплошной линией — решение (1.2)).

Рассмотрим в условиях рассматриваемой задачи «тяжелый» газ с большой начальной плотностью $\theta_0 \gg 1$ при $V_1 \ll \theta_0$, $V_2 \ll \theta_0$. При малых V_1, V_2 , изменение скорости звука во всей области течения будет невелико, и можно считать, что $\theta \gg 1$ везде. Так как область изменения ξ_1, ξ_2 ограничена, в соответствии с (1.3) можно считать, что θ_1, θ_2 ограничены и величина

$$\eta = [1/2(\gamma - 3)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2] / 1/2(\gamma - 1)\theta$$

мала во всей области течения.

Таким образом, в (1.2) после деления его на $(\gamma - 1)\theta / 2$ можно пренебречь слагаемым η , и упрощенное уравнение будет иметь вид

$$(1 - \theta_1^2)\theta_{22} + 2\theta_1\theta_2\theta_{12} + (1 - \theta_2^2)\theta_{11} = 0 \quad (3.1)$$

У уравнения (3.1) имеются решения вида

$$\theta = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3$$

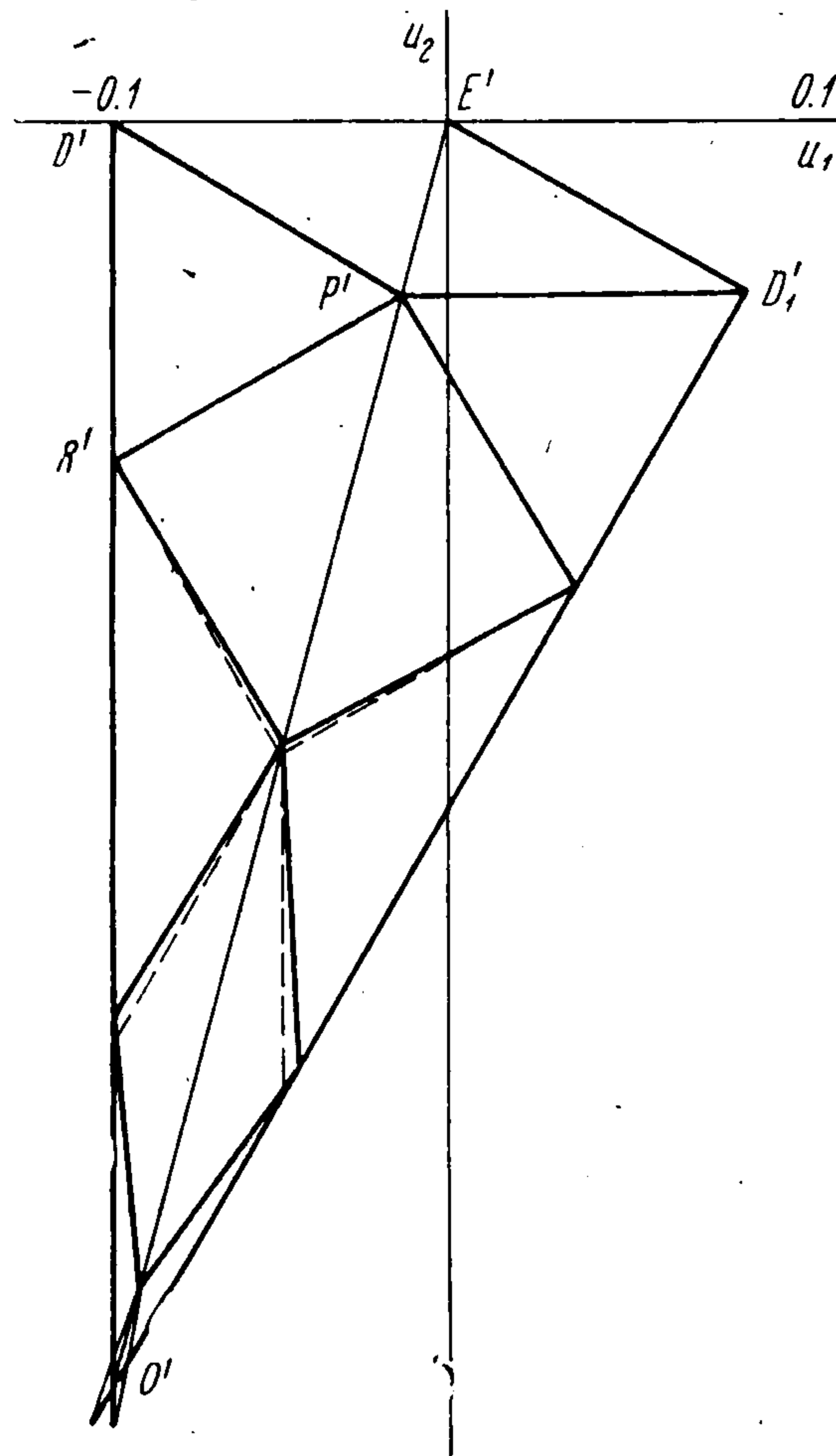
где a_i — произвольные постоянные. Оказывается, что все нужные решения смешанных задач и задач Гурса имеют такой вид.

Будем в дальнейшем области в плоскости годографа, в которых решается задача Гурса, называть областями типа G , а области решения смешанных задач — областями типа S (например, на фиг. 6 область $E'D'P'D_1'$ типа G , область $D'P'R'$ — типа S).

Теорема. Если угол между поршнями P_1 и P_2 $\alpha \in (0, 1/2\pi)$ (поршень P_1 соответствует $\xi_1 = -V_1$), $V_1, V_2 \ll \theta_0$, то при помощи уравнения (3.1) можно построить безотрывное течение без особенностей (в классе из энтропических потенциальных течений) лишь для

$$\alpha = \pi / k; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

При этом для k — нечетных область течения замыкается после решения $1/2(k - 1)$ задач типа G и $(k - 1)$ задач типа S , а в случае k четного — после решения $1/2k$ задач типа G и $(k - 2)$ задач типа S .



Фиг. 6

В n -й области типа G

$$\theta = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin (n\alpha - \frac{1}{2}\alpha)} u_1 + \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin (n\alpha - \frac{1}{2}\alpha)} u_2 + R_n \quad (3.3)$$

В областях типа S , прилегающих к поршням P_1 и P_2 , соответственно

$$\theta = \frac{1}{\sin n\alpha} u_2 + R_{1n} \quad (3.4)$$

$$\theta = \frac{\sin \alpha}{\sin n\alpha} u_1 + \frac{\cos \alpha}{\sin n\alpha} u_2 + R_{2n} \quad (3.5)$$

$$l'_n = \theta_0 + (V_1 + V_2) \left[\frac{(\sin \frac{1}{2}\alpha)^2 + 2 \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}n\alpha \sin [\frac{1}{2}(n-1)\alpha]}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin (n\alpha - \frac{1}{2}\alpha)} - \frac{2n-1}{2} \right] \quad (3.6)$$

$$R_{i1} = \theta_0 - V_i \quad (3.7)$$

$$R_{in} = \theta_0 - V_i -$$

$$\frac{4(V_i \sin [\frac{1}{2}(n-2)\alpha] \cos [\frac{1}{2}(n+2)\alpha] + V_{3-i} \sin [\frac{1}{2}(n-1)\alpha] \cos [\frac{1}{2}(n+1)\alpha])}{\sin n\alpha} \quad (3.8)$$

$(n \geq 2; i = 1, 2)$

Докажем теорему. На некотором расстоянии от поршней образуются волны Римана

$$u_1 = -\cos \alpha (\theta - \theta_0), \quad u_2 = \sin \alpha (\theta - \theta_0) \quad (3.9)$$

$$u_1 = \theta - \theta_0, \quad u_2 = 0 \quad (3.10)$$

которые взаимодействуют в области типа G , ограниченной характеристиками. Используя (3.9), (3.10) в качестве условий на характеристиках $D'E'$ и $D_1'E'$ (фиг. 6) и уравнение характеристической полосы для (1.3), получаем в области G_1

$$\theta = u_1 + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha u_2 + \theta_0$$

Область G_1 через простые волны $D'P'$ и $D_1'P'$ смыкается с областями двойной волны типа S . Для их расчета известны значения θ вдоль характеристик и зависимость между θ_1 и θ_2 , определяемая из условия непротекания газа через стенку

$$c_1 = 0 \text{ в } D', \quad \theta_1 \cos \alpha - \theta_2 \sin \alpha = 0 \text{ в } D_1'$$

Решение смешанной задачи имеет вид:

в области S_{11}

$$\theta = \operatorname{csc} \alpha u_2 + \theta_0 - V_1$$

в области S_{21}

$$\theta = u_1 + \operatorname{ctg} \alpha u_2 + \theta_2 - V_2$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (3.3) — (3.8) выполняются. По индукции легко получаем, что формулы (3.3) — (3.7) справедливы для любого n .

Если в области типа G происходит параболическое вырождение уравнения (3.1)

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = \operatorname{csc}^2 (n\alpha - \frac{1}{2}\alpha) = 1, \quad \text{или } n\alpha = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$$

$$\alpha = \pi / (2n + 1) = \pi / k, \quad k = 2n + 1, \quad n \geq 2$$

то область G_n вырождается в линию, характеристики сливаются и их наклон совпадает с наклоном биссектрисы угла α :

$$\frac{du_2}{du_1} = -\operatorname{tg} n\alpha = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

В плоскости годографа имеем смыкание двух областей типа S по биссектрисе. В физической плоскости картина течения завершается построением простой волны, которая примыкает к области постоянного движения, простирающейся до линии пересечения поршней, с линиями уровня, перпендикулярными биссектрисе угла.

Если в области типа S

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 1 / \sin^2 n\alpha = 1, \quad \alpha = \pi / 2n = \pi / k, \quad k = 2n$$

то области S_{in} вырождаются в линии, совпадающие со стенками P_1 и P_2 , соответственно. В плоскости годографа картина завершается областью типа G . В физической плоскости получаем две простые волны, линии уровня которых идут от биссектрисы перпендикулярно P_1 и P_2 .

Из геометрических соображений ясно, что если α не удовлетворяет (3.2), характеристики G_n или S_{in} выходят за пределы естественной области течения, и решение без особенностей не удастся построить. Теорема доказана.

4. При скоростях V_1 и V_2 , сравнимых по модулю с θ_0 и превышающих некоторые критические скорости, в течении появляется зона вакуума. Такие задачи были подробно изучены в [1]. Установим одно новое свойство таких течений в окрестности линии «вакуум — газ». Именно, покажем, что при некоторых естественных ограничениях форма границы «вакуум — газ» одна и та же в плоскости годографа и в плоскости $\xi_1 \xi_2$.

Чтобы установить это свойство, достаточно в соответствии с (1.3) доказать, что $\lim \theta\theta_i = 0$, при $\theta \rightarrow \theta_i$ ($i = 1, 2$). Если θ_i при $\theta = 0$ конечны (такой случай реализуется, например, для согласованных α и γ), то утверждение очевидно.

Будем считать, что $\theta_i \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow 0$. Пусть в плоскости годографа кривая $u_1 = f(u_2)$ соответствует $\theta = 0$. Рассмотрим узкую полосу L вдоль этой линии, в которой $\theta \in [0, \varepsilon]$ (ε мало) и в которой лежат кривые $u_1 = \varphi(u_2, \xi)$ постоянства θ ($\theta = \varepsilon$), где φ дважды непрерывно дифференцируемы по u_2 . Будем считать, что в соответствующей полоске L' в плоскости $\xi_1 \xi_2$ вдоль кривой «вакуум — газ» $\theta\theta_i = F_i(u_2, \xi) \geq 0$ для $\theta = \xi$, где F_i непрерывно дифференцируемы по u_2 ($\xi \in [0, \varepsilon]$), $\xi = 0$ соответствует линии $u_1 = f(u_2)$ — «вакуум — газ», на фиг. 6 — это кривая AB , в плоскости $\xi_1 \xi_2$ — кривая $A'B'$. Ограниченность F_i следует из того, что область течения в плоскости $\xi_1 \xi_2$ ограничена.

Будем предполагать далее, что в L выполняются неравенства $\varphi' < 0$, $\varphi'' < 0$ (штрих обозначает дифференцирование по u_2), т. е. кривые постоянства θ для любого ξ выпуклы вверх; кроме того, будем считать, что $f, f', f'', F_i(u_2, 0)$ и $\varphi, \varphi', \varphi'', F_i$ в L отличаются, соответственно, на величину $O(\varepsilon)$.

Дифференцируя θ вдоль кривой $u_1 = \varphi(u_2, \xi)$ два раза, получим условия

$$\theta_1 + \varphi'\theta_2 = 0 \tag{4.1}$$

$$\theta_{11}\varphi'^2 + 2\theta_{12}\varphi' + \theta_{22} + \theta_1\varphi'' = 0 \tag{4.2}$$

После подстановки θ_{12} из (4.2) при помощи (4.1) уравнение (1.2) приведем к виду

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta[\theta_{11} + \theta_{22} + \theta_1^3\varphi''] + \frac{1}{2}(\gamma - 3)\theta_1^2(1 + \varphi'^2) + 2 = 0 \tag{4.3}$$

Дифференцируя вдоль $u_1 = \varphi(u_2, \xi)$ равенство $\theta\theta_1 = F_1(u_2, \xi)$ и разрешая полученное соотношение относительно $\theta\theta_{11}$, при помощи (4.2) получим

$$\theta\theta_{11} = \frac{1}{\varphi'^3} [2\varphi'^2 F_1' + \theta\theta_{22}\varphi' - \theta\theta_2\varphi''] \tag{4.4}$$

Подставляя $\theta\theta_{11}$ из (4.4) в (4.3) и пренебрегая в (4.3) величинами порядка $O(\varepsilon)$ по сравнению с $O(1)$ и величинами порядка $O(1)$ по сравнению с $\theta_1^2 + \theta_2^2$, окончательно получим следующее приближенное уравнение, к которому в L сводится (1.2):

$$\theta\theta_{22} - A(u_2)\theta_2^2 + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1}\theta_2^2 = 0 \quad \left(A(u_2) = \frac{F_2(u_2, 0)f''}{f'(1 + f'^2)} \geq 0 \right) \tag{4.5}$$

Фиксируем некоторую прямую $u_1 = c_1 = \text{const}$ и проинтегрируем вдоль нее уравнение (4.5) от u_2 до u_2^* , где (c_1, u_2^*) лежит на кривой $\theta = \varepsilon$, а (c_1, u_2) лежит внутри L

$$\int_{u_2}^{u_2^*} \frac{d\theta_2}{\theta_2} + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \int_{u_2}^{u_2^*} \frac{d\theta}{\theta} - \int_{u_2}^{u_2^*} A(u_2) \frac{d\theta}{\theta} = 0 \tag{4.6}$$

Применяя к последнему слагаемому (4.6) обобщенную теорему о среднем и производя интегрирование, получаем

$$\ln \theta_2 + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \ln \theta - A^* \ln \theta = \ln C \quad \theta \theta_2 = C \theta^{A^* + 2/(\gamma - 1)} \rightarrow 0, \quad \text{при } \theta \rightarrow 0$$

так как $A^* = A(u_2^0) \geq 0$ ($u_2 < u_2^0 < u_2^*$), $C = \text{const}$. Ясно, что в этом случае и $\theta \theta_1 \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$, т. е. в плоскости $\xi_1 \xi_2$ линии $u_1 = f(u_2)$ соответствует кривая $\xi_1 = u_1$.

Для случая $V_1 = V_2 = V$ был произведен расчет критических скоростей V^* (для $V < V^*$ зоны вакуума не образуется), для $\alpha = 1/2\alpha$, $\gamma = 1.4$, $\gamma = 2$ (в [1]) было приведено $V^* = 0.42$ для $\alpha = 1/2\pi$, $\gamma = 3$), результаты следующие

$$V^* \approx 2.29 \quad (\alpha = 1/2\alpha, \gamma = 1.4), \quad V^* \approx 0.88 \quad (\alpha = 1/2\alpha, \gamma = 2)$$

Замечание 4.1. На линии вакуума θ_i могут быть как конечными, так и бесконечными. Однако уже вторые производные, как следует непосредственно из (1.2), для $\gamma \geq 3$ обязательно обращаются в бесконечность.

Поступила 7 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермолин Е. В., Сидоров А. Ф. Некоторые конфигурации изэнтропических распадов двумерных разрывов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
3. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 5.
4. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке, ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
5. Сидоров А. Ф. О нестационарных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.

ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ГАЗА В НОРМАЛЬНОЙ ИОНИЗУЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ И ЗАДАЧА О ПРОВОДЯЩЕМ ПОРШНЕ

А. А. Бармин (Москва)

В работе исследуется изменение скорости газа в ионизирующей ударной волне, распространяющейся вдоль начального магнитного поля (нормальная ионизирующая волна) в случае, когда магнитная вязкость газа много больше остальных диссипативных коэффициентов. Полученные результаты использованы для построения решения задачи о движении проводящего поршня. Аналогичные исследования при произвольной ориентации фронта волны к магнитному полю проведены в работе [1].

Рассмотрение предельного случая нормальных ионизирующих волн представляет интерес в связи с многочисленными экспериментальными исследованиями таких волн [2-3], а также в связи с наличием ряда особенностей в решении по сравнению с общим случаем. В работе [4] применительно к задаче о разряде рассчитывались профили изменения магнитного поля, плотности и других величин в сверхзвуковой нормальной ионизирующей ударной волне и следующей за ней МГД волне разрядки. При этом предполагалось, что ионизирующая волна с изменением магнитного поля будет ионизирующей волной Жуге. Ниже показано, что это предположение выполняется.

В рассматриваемом случае нормальных ионизирующих ударных волн течение будет плоским, т. е. скорость газа и магнитное поле лежат в одной плоскости, проведенной через нормаль к фронту волны. Введем систему координат x, y, z , в которой ось x направлена по нормали к волне, а компонента магнитного поля за волной $H_{z2} = 0$. Пусть u и v — изменения скорости по осям x и y в этой системе координат.

В рассматриваемом случае промежуточные ионизирующие ударные волны отсутствуют, т. е. из пяти типов волн [5] возможны только три: сверхзвуковые быстрые, сверхзвуковые и дозвуковые медленные ионизирующие волны. В сверхзвуковых ионизирующих волнах магнитное поле, а следовательно, и касательная составляющая скорости газа не меняется. На плоскости uv быстрой волне соответствуют точки оси u правее u' .