# НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД

С. А. Регирер, И. М. Руткевич

(Москва)

Исследуется зависимость типа уравнений неньютоновской гидродинамики от принятой реологической модели. Рассмотрение проводится на примере нелинейно-вязкой и вязко-упругой сред.

1. Пусть в плоскости $xy$ происходит стационарное течение несжимаемой жидкости, вязкость которой $\eta$ есть заданная функция от второго инварианта тензора скоростей деформаций. Система уравнений, описывающая движение жидкости в этом случае, имеет вид

$$\rho V \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \quad \rho V \nabla v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad T_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad T_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad T_{yy} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$\eta = \eta_0 f(I), \quad I = 2\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad f > 0$$

Введем, как обычно, функцию тока $\Psi$, положив $u = \partial\Psi / \partial y$, $v = -\partial\Psi / \partial x$, и исключим из первых двух уравнений (1.1) давление $p$. Тогда для $\Psi$ получится квазилинейное уравнение четвертого порядка

$$L(\Psi) \equiv a_1 \left( \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\Psi}{\partial y^4} \right) + 2a_2 \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + 4a_3 \left( \frac{\partial^4\Psi}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^3 \partial y} \right) = H(\Psi) \tag{1.2}$$

где $H(\Psi)$ — нелинейный оператор третьего порядка, и

$$a_1 = \eta_0 (f + 2\varepsilon^2 f'), \qquad a_2 = \eta_0 (f + 4\varepsilon_1^2 f' - 2\varepsilon^2 f'), \qquad a_3 = 2\eta_0 \varepsilon\varepsilon_1 f'$$

$$\varepsilon = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \partial^2\Psi / \partial y^2 - \partial^2\Psi / \partial x^2, \qquad \varepsilon_1 = 2\partial u / \partial x = 2\partial^2\Psi / \partial x \partial y$$

Обычными методами можно установить, что наличие у уравнения (1.2) вещественных характеристик в плоскости $xy$ зависит от вида функции $f(I)$. При выполнении неравенства $f + 2If' > 0$ вещественные характеристики отсутствуют. В частности, их нет в случае обычной гидродинамики, когда $f' = 0$, и в случае любой модели с возрастающей вязкостью, когда $f' > 0$.

Если же

$$f + 2If' < 0 \tag{1.3}$$

то существуют четыре семейства вещественных характеристик $y = y(x)$, определяемых уравнениями

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{1,2,3,4} = k_\pm \pm \sqrt{k_\pm^2 + 1}, \qquad k_\pm = \frac{4\varepsilon\varepsilon_1 f' \mp \sqrt{-f^2 - 2Iff'}}{2(f + 2\varepsilon^2 f')} \tag{1.4}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (1.3) уравнение (1.2) становится гиперболическим. Условие (1.3) означает, что вязкость должна убывать с ростом скоростей деформации, причем настолько быстро, что $df / d\sqrt{I} < -f / \sqrt{I}$. Нетрудно проверить, что на кривой $\sqrt{J} = F(\sqrt{I})$, где $J = 4\eta_0 f^2 I$ — второй инвариант тензора вязких напряжений, неравенство (1.3) выделяет участок убывания напряжений при росте скоростей деформации, которому соответствует область гиперболичности уравнения (1.2). Любопытно, что при течении ньютоновской жидкости, вязкость которой зависит от температуры, о неустойчивости свидетельствует появление такого же убывающего участка на кривой, связывающей, например, трение на стенке с ее скоростью [1]. Вместе с тем, в этом случае система уравнений ни при каких условиях не приобретает вещественных характеристик.

Аналогичные результаты получаются при анализе ряда других задач, например, задачи о полностью развитом течении в трубе, когда для продольной скорости получается квазилинейное уравнение второго порядка

$$N(u) \equiv \left[f + 2f'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4f'\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} +$$

$$+ \left[f + 2f'\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{P}{\eta_0}, \qquad P = -\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

которое становится гиперболическим, когда выполнено условие (1.3).

Рассмотрение конкретных течений, например, куэттовского или пуазейлевского, показывает, что уравнения (1.2) или (1.5) действительно имеют решения, удовлетворяющие надлежащим условиям на границах потока, если неравенство (1.3) выполняется для части исследуемой области течения (иногда даже и для всей области).

Естественно предположить, что в случае малых скоростей деформаций жидкость должна вести себя подобно ньютоновской. Поэтому возникновения в потоке областей, для которых неравенство (1.3) имеет место, можно ожидать при достаточно больших градиентах давления (для течений в трубах), больших скоростях границ (при течениях типа Куэтта). Можно ввести понятие критической скорости сдвига $D_*$, в которой $J$ достигает первого наибольшего значения, а $f + 2If'$ меняет знак с положительного на отрицательный, и выделить класс сред с критической скоростью сдвига.

Таким образом, принципиальная возможность возникновения «гиперболического» режима течения нелинейно-вязкой среды существует и для сред, обладающих критической скоростью сдвига, и при определенных граничных условиях, обеспечивающих для части потока неравенство $\sqrt{I} > D_*$. Подчеркнем, что речь пока идет вовсе не о реальном существовании таких течений, а только о следствиях из исходной системы уравнений.

Можно рассмотреть далее соответствующие нестационарные задачи. При этом окажется, естественно, что (1.2) и (1.5) заменяются уравнениями

$$\rho\partial\Delta\Psi / \partial t = L(\Psi) - H(\Psi), \qquad \rho\partial u / \partial t = \eta_0 N(u) + P \tag{1.6}$$

Правые части здесь — операторы, изменяющие свой тип при переходе $f + 2If'$ через нуль.

Отметим, что уравнения, аналогичные (1.5), встречаются и в других задачах, например, в электродинамике сред с неравновесной проводимостью [2, 3], причем в реальности неравенства, эквивалентного (1.3), там нет сомнений.

2. Обратимся теперь к течению вязко-упругой жидкости с постоянными свойствами. Рассмотрим, например, нестационарное движение такой жидкости в плоском канале $0 < y < \delta$ с непроницаемыми стенками, предполагая, что все параметры зависят от времени $t$ и поперечной координаты $y$. Для простоты примем для жидкости двухконстантную модель Олдройда

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} + \lambda\tau_{ij}^{\cdot} = 2\eta e_{ij}, \quad \tau_{ij}^{\cdot} \equiv \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + v_k\tau_{ij,k} - v_{i,k}\tau_{kj} - v_{j,k}\tau_{ik}$$

и будем напряженное состояние предполагать плоским. Тогда для определения скорости и компонент тензора напряжений получим систему

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = P(t) + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} \tag{2.1}$$

$$\tau_{xx} + \lambda\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial t} - 2\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad \tau_{yy} + \lambda\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial t} = 0$$

$$\tau_{xy} + \lambda\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t} - \tau_{yy}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \eta\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2}$$

Второе уравнение (2.1) и первое уравнение (2.2) служат для отыскания поперечного распределения давления и величины $\tau_{xx}$ по известным $u$, $\tau_{xy}$, $\tau_{yy}$. Первое уравнение в (2.1) и третье уравнение (2.2) определяют $u$, а также $\tau_{xy}$, после того как $\tau_{yy}$ найдено из второго уравнения (2.2).

Допустим, что в начальный момент $\tau_{yy} = \tau_0 = \text{const}$; тогда непрерывное решение второго уравнения (2.2) будет иметь вид $\tau_{yy} = \tau_0 \exp(-t/\lambda)$, и из (2.1) и последнего уравнения (2.2) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\eta/\lambda + \tau_0 e^{-t/\lambda}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\lambda\rho}[P(t) + \lambda P'(t)] \equiv Q(t) \qquad (2.3)$$

Будем считать $Q(t)$ заданной функцией, а для $u$ зададим следующие условия:

$$u(0, y) = u_0(y), \qquad \partial u(t, y)/\partial t\,|_{t=0} = u_1(y), \qquad u(t, 0) = u(t, \delta) = 0 \qquad (2.4)$$

Тогда решение $u(t, y)$ представим в виде ряда

$$u(t, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\alpha_k y, \qquad \alpha_k = \frac{k\pi}{\delta}$$

Функции $u_k(t)$ при этом удовлетворяют уравнению

$$u_k'' + \frac{1}{\lambda}u_k' + \frac{1}{\rho}(\eta/\lambda + \tau_0 e^{-t/\lambda})\alpha_k^2 u_k = \frac{2}{k}[1 + (-1)^{k-1}]\,Q \qquad (2.5)$$

Предполагая $\tau_0 \neq 0$ (случай $\tau_0 = 0$ рассматривался различными авторами, при этом решение выражается в элементарных функциях) и используя начальные условия (2.4), для функций $u_k(t)$ получим следующие формулы:

$$u_k(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\Big[A_k J_{\nu_k}(r_k(t)) + B_k Y_{\nu_k}(r_k(t)) +$$
$$+ \frac{\pi r_k(0)}{2}\int_0^t \{J_{\nu_k}(r_k(t))\,Y_{\nu_k}(r_k(t')) - Y_{\nu_k}(r_k(t))\,J_{\nu_k}(r_k(t'))\}\,Q(t')\,dt'\Big] \qquad (2.6)$$

$$r_k(t) = 2\lambda\alpha_k\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/2}\exp\frac{-t}{2\lambda}, \qquad \nu_k = \left(1 - \frac{4\alpha_k^2\lambda\eta}{\rho}\right)^{1/2} \quad (\tau_0 > 0)$$

$$u_k(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\Big[C_k I_{\nu_k}(s_k(t)) + D_k K_{\nu_k}(s_k(t)) -$$
$$- s_k(0)\int_0^t \{I_{\nu_k}(s_k(t))\,K_{\nu_k}(s_k(t')) - K_{\nu_k}(s_k(t))\,I_{\nu_k}(s_k(t'))\}\,Q(t')\,dt'\Big] \qquad (2.7)$$

$$s_k(t) = 2\lambda\alpha_k\left(-\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/2}\exp\frac{-t}{2\lambda} \qquad (\tau_0 < 0)$$

При этом постоянные $A_k$, $B_k$ и $C_k$, $D_k$ определяются из следующих систем линейных уравнений:

$$J_{\nu_k}(r_k(0))\,A_k + Y_{\nu_k}(r_k(0))\,B_k = E_k \qquad (2.8)$$

$$J_{\nu_k}'(r_k(0))\,A_k + Y_{\nu_k}'(r_k(0))\,B_k = -\frac{E_k + 2\lambda F_k}{r_k(0)} \quad \text{при } \tau_0 > 0$$

$$I_{\nu_k}(s_k(0))\,C_k + K_{\nu_k}(s_k(0))\,D_k = E_k$$

$$I_{\nu_k}'(s_k(0))\,C_k + K_{\nu_k}'(s_k(0))\,D_k = -\frac{E_k + 2\lambda F_k}{s_k(0)} \quad \text{при } \tau_0 < 0 \qquad (2.9)$$

Стоящие в правых частях (2.8), (2.9) величины $E_k$ и $F_k$ являются коэффициентами Фурье функций $u_0(y)$ и $u_1(y)$. Детерминанты систем (2.8) и (2.9), очевидно, не равны нулю.

Обращаясь к уравнению (2.3), легко видеть, что при выполнении неравенства $\tau_0 \exp(-t/\lambda) + \eta/\lambda > 0$ оно является гиперболическим (как и в частном случае $\tau_0 = 0$). Уравнение (2.3) гиперболично для всех значений $t$, если $\tau_0 > -\eta/\lambda$. В противном случае при выполнении неравенства $\tau_0 < -\eta/\lambda$ уравнение (2.3) принадлежит к смешанному типу, причем интервалы времени $(0, t_*)$ и $(t_*, \infty)$, где $t_* = -\lambda \ln(-\eta/\lambda\tau_0)$ соответствуют областям эллиптичности и гиперболичности уравнения. Из изложенного выше следует, что формально решение задачи (2.3), (2.4) можно получить всегда, независимо от типа уравнения (2.3). Однако в том случае, когда уравнение (2.3) принадлежит к смешанному типу, решение оказывается физически неудовлетворительным в области эллиптичности.

**3.** Для уравнения (2.3) в том виде, в каком оно записано, и для линеаризованных уравнений (1.6) можно без труда построить примеры типа Адамара, которые показывают, что задачи с начальными данными для этих уравнений поставлены некорректно, когда $\tau_0 < -\eta/\lambda$ в (2.3) или в (1.6) оператор в правой части гиперболический. Иными словами, уравнения при этих условиях неэволюционны.

Таким образом, общий вывод, который следует из рассмотренных примеров, заключается в том, что уравнения гидродинамики неньютоновской жидкости при определенных, зависящих от принятой реологической модели, условиях могут становиться неэволюционными (заметим, что на основе иных соображений сходные выводы получены в статье [5], где исследовалось распространение малых возмущений в упругой среде с конечными деформациями).

Неэволюционность обнаруживается только при рассмотрении нестационарного течения; изучение стационарных течений, как видно из п. 1, дает при этом некоторые наводящие соображения [6].

Неэволюционность уравнений, возникающая при некоторых условиях, означает, что при этих условиях происходит мгновенное нарастание малых возмущений. В реальных системах развитие неустойчивостей может происходить лишь с конечными скоростями, причем амплитуды возмущений не могут возрастать неограниченно. Всегда существуют физические механизмы, которые обеспечивают выполнение этих ограничений. Поэтому реологические модели, порождающие неэволюционные уравнения, нуждаются в «исправлении», т. е. во введении на основе известных теорий [4] членов, обеспечивающих корректность постановки задач с начальными данными. При этом не исключено, что исправление модели повлечет за собой заметное изменение уравнений и в «области эволюционности».

Представляется возможным, что общие принципы построения моделей сплошных сред должны включать в себя и принцип необходимой эволюционности уравнений.

Авторы выражают признательность А. Г. Куликовскому за весьма полезное обсуждение затронутых в статье вопросов и Р. С. Ривлину, обратившему внимание авторов на работу [5].

Поступила 26 II 1968 НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА


1. Joseph D. D. Variable viscosity effects on the flow and stability of the flow in channels and pipes. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 11, pp. 1761—1771.
2. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Oliver D. A., Mitchner M. Non — uniform electrical conduction in MHD channels. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8, pp. 1424—1432.
4. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
5. Hayes M., Rivlin R. S. Propagation of a plane wave in an isotropic elastic material subjected to pure homogeneous deformation. Arch. for Rat. Mech. and Analysis, 1961, vol. 8, No. 1, pp. 15—22.
6. Куликовский А. Г., Регирер С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.