К ФОРМУЛИРОВКЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЛОНОВОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. Н. Николаевский

(Москва)

Построение определяющих связей для предельного равновесного состояния кулоновой сплошной несжимаемой сыпучей среды [1] наталкивается на некоторые принципиальные трудности. Как известно, линии (площадки) предельно равновесного состояния (вдоль касательных, к которым выполнено условие Кулона) располагаются симметрично под углом α к направлению максимального нормального напряжения и только при нулевом угле $\Phi = 0$ внутреннего трения (идеально пластическое тело) линии предельного равновесия совпадают ($\alpha = {}^1/_4\pi$) с линиями максимума скорости сдвига (второе условие Сен-Венана [2], определяющее пластическое состояние).

Если же $\Phi \neq 0$, то угол между линиями предельного равновесия равен $2\alpha = {}^1/_2\pi - \Phi$, т. е. отличен от 90°, а потому условие совпадения линий предельного равновесия и линий максимума скоростей сдвига (угол между которыми должен быть всегда равен 90°) не выполняется. Тем самым, формальное введение [3] гипотезы о коллинеарности тензоров напряжений и скоростей деформации в сыпучей несжимаемой кулоновой среде противоречит физически понятному представлению (см., например, [2]), что направление наибольшего сопротивления среды совпадает с направлением наибольшего сдвига.

Поэтому позднее [4] предлагалось условие совпадения лишь одной линии скольжения (максимальной скорости сдвига) с линией предельного равновесия и некоторые другие варианты построения теории (см., например, [5]). Отметим, что определяющие соотношения, рекомендуемые в [5], не удовлетворяют обычным для механики сплошных сред условиям инвариантности [6].

В предлагаемой заметке вводится обобщенная формулировка условия предельного равновесия, согласно которой сила сопротивления среды R, уравновешивающая напряжения на линии (площадке) предельного равновесия, составляет с касательной к этой линии угол β. Если принять, что сила R коллинеарна направлению максимума относительного сдвига, то оказывается, что угол β равен истинному углу внутреннего трения Φ_0, а эффективное условие предельного равновесия при некотором переопределении угла внутреннего трения и сцепления сводится к обычному виду условия Кулона. Таким образом, удается прийти к такой интепретации предельно равновесного кулонова состояния сыпучей среды, которая не противоречит гипотезе о коллинеарности тензоров напряжения и скоростей деформации.

1. Обозначим главные напряжения через σ_1, σ_2 (сжатию соответствует знак $\sigma_i > 0$). Тогда на площадке, наклоненной к оси *1* под углом α, значения касательной τ_n и нормальной σ_n компонент напряжения будут

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \qquad \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \tag{1.1}$$

причем

$$d\tau_n \,/\, d\sigma_n = \operatorname{ctg} 2\,|\alpha|\, \operatorname{sgn} \alpha \tag{1.2}$$

Будем считать, что рассматриваемая макроточка среды находится в предельно равновесном состоянии, если среди проходящих через нее элементарных площадок имеется площадка (предельного равновесия), действующие на которой напряжения связаны между собой обобщенным условием Кулона, а именно, уравновешены силой реакции — силой сухого трения R, которая, вообще говоря, действует под углом β к рассматриваемой площадке

$$\tau_n \cos\beta - \sigma_n \sin\beta = R, \qquad \tau_n \sin\beta + \sigma_n \cos\beta = N$$
$$R = N\theta \operatorname{tg} \Phi_0 + c_0\theta, \qquad \theta = \operatorname{sgn} R, \qquad N > 0 \tag{1.3}$$

где Φ_0 — истинный угол внутреннего трения, c_0 — истинное сцепление.

Условия (1.3) сводятся к следующему:

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg}(\beta + \theta\Phi_0) + c_0 \frac{\theta \cos \Phi_0}{\cos(\beta + \theta\Phi_0)} \tag{1.4}$$

причем

$$\frac{d\tau_n}{d\sigma_n} = \operatorname{tg}(\beta + \theta\Phi_0) \tag{1.5}$$

Приравнивание условий (1.2) и (1.5) позволяет найти наклон α площадки (линии) предельного равновесия как решение уравнения

$$\operatorname{ctg} 2\,|\alpha| \operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{tg}(\beta + \theta\Phi_0)$$

т. е.

$$|\alpha| = {}^1/_4\pi - {}^1/_2(\beta + \theta\Phi_0) \operatorname{sgn}\alpha \tag{1.6}$$

2. Примем далее, что сила R коллинеарна некоторому направлению, составляющему с осью 1 угол λ. Тогда $\beta = (|\lambda| - |\alpha|) \operatorname{sgn}\alpha$ (отсчет углов α и λ ведем в одну сторону), и из решения (1.6) имеем

$$|\alpha| = {}^1/_4\pi + {}^1/_2(|\alpha| - |\lambda| - \Phi_0\theta \operatorname{sgn}\alpha)$$

что дает

$$|\alpha| + |\lambda| + \Phi_0 = {}^1/_2\pi, \qquad \theta \operatorname{sgn}\alpha = 1$$

$$|\alpha| + |\lambda| - \Phi_0 = {}^1/_2\pi, \qquad \theta \operatorname{sgn}\alpha = -1 \tag{2.1}$$

Предположим теперь, что сила R коллинеарна касательной в рассматриваемой точке к линии скольжения [1] (линии максимума скоростей сдвига $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij},\ i \neq j$)

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2\varepsilon_{12}} \tag{2.2}$$

и по знаку совпадает со знаком скорости сдвига γ вдоль линии скольжения $\theta = \operatorname{sgn}\gamma_{\max}$.

Если тензоры напряжений и скоростей деформаций коллинеарны (гипотеза, принята в работе [3]), тогда

$$|\lambda| = {}^1/_4\pi, \quad |\alpha| = {}^1/_4\pi - \Phi_0, \qquad \beta = \Phi_0 \operatorname{sgn}\alpha, \qquad \theta \operatorname{sgn}\alpha = 1 \tag{2.3}$$

или

$$|\lambda| = {}^1/_4\pi, \quad |\alpha| = {}^1/_4\pi + \Phi_0, \qquad \beta = -\Phi_0 \operatorname{sgn}\alpha, \qquad \theta \operatorname{sgn}\alpha = -1$$

Видно, что условие

$$\theta \operatorname{sgn}\alpha = 1 \qquad [\operatorname{sgn}\gamma_{\max} = \operatorname{sgn}\alpha, \qquad |\gamma_{\max}| = {}^1/_2|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|]$$

соответствует неравенству $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$: направления максимальных (по модулю) главных скоростей деформации и напряжения совпадают.

В этом случае при несжимаемости среды $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ диссипация механической работы в элементарном объеме будет

$$W^{\cdot} = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} = 2A^{\cdot} \qquad \left(A^{\cdot} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)$$

Здесь $A^{\cdot}$ — диссипация на каждой (из двух) площадке скольжения.

---

[1] В отличие от обычной постановки здесь по существу необходимо различать линии скольжения (максимума скорости сдвига) и линии предельного равновесия (см. условие (1.3)).

При $\theta \operatorname{sgn} \alpha = -1$ вдоль оси максимального главного напряжения направлена минимальная главная скорость деформации. В этом случае оказалось бы, что $W^{\cdot} = 0$.

Выбирая поэтому условие $\theta \operatorname{sgn} \alpha = 1$, приходим к условию колинеарности в произвольной системе координат

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{12}} \tag{2.4}$$

что в силу несжимаемости среды ($\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$) означает коаксиальность и подобие тензоров-девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$\varepsilon_{11} = \zeta^{\cdot}\left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right), \qquad \varepsilon_{22} = \zeta^{\cdot}\left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)$$
$$^1/_2\varepsilon_{12} = \zeta^{\cdot}\sigma_{12}, \qquad \zeta^{\cdot} \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Существенно, что предельно равновесное соотношение (1.4) сводится при выполнении равенства (2.3) к условию Кулона обычного вида

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \Phi + c, \qquad \Phi = 2\Phi_0, \qquad c = c_0 \frac{\cos \Phi_0}{\cos 2\Phi_0} \tag{2.6}$$

В самом деле, при $\beta = \theta\, \Phi_0$ из соотношений (1.3) следует, что

$$\tau_n = \theta\,(|R| + N \operatorname{tg} \Phi_0), \qquad N > 0$$

т. е. знак τ_n совпадает со знаком R.

Таким образом, предположение о действии наклонной силы сухого трения на площадке предельного равновесия, если ее направление коллинеарно направлению максимума скорости сдвига, сводится к новой интерпретации классического условия Кулона, если только ввести эффективные значения угла трения Φ и сцепления c среды, отличные от истинных значений Φ_0, c_0.

Отметим, что в инвариантном виде условие (2.6) имеет вид

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin 2\Phi_0 + 2c_0 \cos \Phi_0 \tag{2.7}$$

Поступила 11 IV 1968

Институт физики Земли
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. 3. М., Физматгиз, 1960.
2. Saint-Venant B. Mémoire sur l'establissement des équations differentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides, etc. J. math. pures et appl., ser. 11, 1871, vol. 16. (Рус. пер.: Сен-Венан. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости. В сб.: «Теория пластичности». Ред. Ю. Н. Работнов. М., Изд-во иностр. лит., 1948).
3. Ишлинский А. Ю. О плоском движении песка. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 4.
4. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучей среды. М., Госстройиздат, 1958.
5. Загайнов Л. С. Об уравнениях плоского установившегося движения сыпучей среды. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
6. Truesdell C. Six lectures on modern natural philosophy. N. Y., Springer — Verlag, Inc., 1966.