ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

А. Н. Гузь (Киев)

Рассматривается статическая устойчивость трехмерного упругого тела при малых докритических деформациях. Ввиду предположения о малости докритических деформаций полученные ниже результаты применимы к исследованию устойчивости упругих тел, изготовленных из металла и из жестких армированных пластиков. Для последних эти результаты и необходимы, так как армированные пластики обладают малой сдвиговой жесткостью, поэтому применение прикладных теорий иногда приводит к большим погрешностям при определении критических сил.

Основное внимание уделяется получению общих решений уравнений статической устойчивости трехмерного тела при сжатии его вдоль оси Ox_3 усилиями интенсивности q и вдоль осей Ox_1 и Ox_2 усилиями интенсивности p. В частном случае $p = 0$ решения подобного вида [1] позволили исследовать устойчивость цилиндрических оболочек [2] и стержней [3]. В этих работах [2] и [3] вычислены первые члены асимптотического разложения величины критической силы, которые совпадают со значением критической силы, полученной с привлечением гипотезы Кирхгофа — Лява.

Ниже в инвариантной форме строятся общие решения, позволяющие исследовать устойчивость полых цилиндрических оболочек и оболочек с заполнителем, стрежней, пластин как однослойных, так и многослойных при действии указанных выше нагрузок. В качестве примера рассматривается устойчивость прямоугольных и круговых пластин при всестороннем сжатии, при этом граничным условиям удовлетворяются приближенно в интегральном смысле.

Рассмотрим статическую устойчивость трехмерного тела при малых докритических деформациях при сжатии его вдоль оси x_3 усилиями интенсивности q и вдоль осей x_1 и x_2 усилиями интенсивности p. Основные уравнения в вариациях, следуя [4-7], можем представить в виде

$$[\sigma_{im} - q\delta_{i3}u_{m,3} - p(\delta_{i1}u_{m,1} + \delta_{i2}u_{m,2})]_{,i} = 0 \qquad (1)$$

Будем считать, что тело является трансверсально-изотропным и ось изотропии совпадает с осью x_3, тогда связь между напряжениями и деформациями можем представить в форме

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}a_{ik}u_{k,k} + (1 - \delta_{ij})G_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (2)$$

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{13} = a_{23}, \qquad G_{12} = {}^1/_2\,(a_{11} - a_{12}), \qquad G_{13} = G_{23} = G$$

Необходимо отметить, что симметрия упругих свойств здесь соответствует симметрии основного напряженного состояния (докритического состояния). Это обстоятельство дает возможность включить в рассмотрение нелинейно-упругие среды, так как линеаризированный закон связи между напряжениями и деформациями (вернее их приращениями) при рассматриваемом напряженном состоянии можно представить в виде (2). Принимая концепцию касательного модуля, можем включить в рассмотрение и устойчивость при малых упруго-пластических деформациях. Таким образом, полученные ниже результаты в равной степени относятся к нелинейно-упругим телам и к упруго-пластическим телам, только нужно определить значения величин a_{ij} и G, отправляясь от конкретного вида соотношений между напряжениями и деформациями.

Подставляя зависимости (2) в уравнение (1), получаем уравнения в перемещениях

$$L_{mj}u_j = 0 \qquad (m = 1, 2, 3) \qquad (3)$$

$$L_{mj} = \delta_{im}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (1 - \delta_{jm})G_{jm}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} +$$

$$+ (1 - \delta_{im})\delta_{jm}G_{im}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - (q\delta_{i3}\delta_{n3} + p\delta_{i1}\delta_{n1} + p\delta_{i2}\delta_{n2})\delta_{mj}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} \qquad (4)$$

Решение системы уравнений (3) можем представить в виде одной из трех форм или в виде их линейной комбинации

$$u_i^{(j)} = \frac{\partial \det \| L_{rs} \|}{\partial (L_{ji})} \Phi^{(j)} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{5}$$

по j не суммировать. Функции $\Phi^{(j)}$ определяются из уравнения

$$\det \| L_{rs} \| \Phi^{(j)} = 0 \tag{6}$$

Решение уравнения (6) представим в форме

$$\Phi^{(j)} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \zeta_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Для определения величин ζ_i получаем алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned}
&\zeta^6 - \left[(a_{11} - p) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) (G - p) \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) [-(G + a_{13})^2 + \right. \\
&\left. + (G - p)(G - q) + (a_{11} - p)(a_{33} - q)] + (a_{11} - p)(G - p)(G - q) \right\} \zeta^4 + \\
&+ \left[(a_{11} - p) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) (G - p) \right]^{-1} (G - p) \left[-(G + a_{13})^2 + \right. \\
&\left. + (a_{33} - q) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) + (G - p)(G - q) + (a_{33} - q)(a_{11} - p) \right] \zeta^2 - \\
&- \left[(a_{11} - p) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) (G - p) \right]^{-1} (a_{33} - q)(G - q)^2 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Корни уравнения (8) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\zeta_1^2 = \frac{G - q}{1/2(a_{11} - a_{12}) - p}, \qquad \zeta_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \frac{-(a_{13} + G)^2 + (G - p)(G - q) + (a_{11} - p)(a_{33} - q)}{(a_{11} - p)(G - p)} \pm \\
&\pm \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{-(a_{13} + G)^2 + (G - p)(G - q) + (a_{11} - p)(a_{33} - q)}{(a_{11} - p)(G - p)} \right]^2 - \frac{(G - q)(a_{33} - q)}{(a_{11} - p)(G - p)} \right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Для определения перемещений положим

$$\Phi^{(1)} = \Phi_1, \qquad \Phi^{(2)} = \Phi_1, \qquad \Phi^{(3)} = \Phi_2 + \Phi_3, \qquad u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} + u_i^{(3)} \tag{10}$$

и введем новые функции Ψ_i, которые удовлетворяют уравнениям (7) и связаны с функциями Φ_i такими зависимостями

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = (G - p) \frac{a_{11} + a_{12}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left[\frac{a_{33} - q}{G - p} - \right. \right. \\
&\left. \left. - 2 \frac{(a_{13} + G)^2}{(G - p)(a_{11} + a_{12})} \right] \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right\} \Phi_1 \qquad (i = 2, 3) \\
&\Psi_i = (G + a_{13}) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (G - q) \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{2} - p \right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \Phi_i
\end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (4), (5), (9) — (11) получаем

$$\begin{aligned}
&u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\Psi_2 + \Psi_3), \qquad u_2 = - \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\psi_2 + \psi_3) \\
&u_3 = \frac{a_{11} - p}{G + a_{13}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{G - q}{a_{11} - p} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (\Psi_2 + \Psi_3)
\end{aligned} \tag{12}$$

Для тела с криволинейным контурном поперечного сечения перемещения можем представить в виде

$$\begin{aligned}
&u_n = \frac{\partial}{\partial s} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3} (\Psi_2 + \Psi_3), \qquad u_s = - \frac{\partial}{\partial n} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial_s \partial x_3} (\Psi_2 + \Psi_3) \\
&u_3 = \frac{a_{11} - p}{G + a_{13}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{G - q}{a_{11} - p} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (\Psi_2 + \Psi_3)
\end{aligned} \tag{13}$$

Если в общем решении (7), (9) и (13) положить $p = 0$, то получим общее решение для одноосного сжатия, изложенное в [1].

Граничные условия в напряжениях можно записать в виде [6]

$$P_m = n_i\{\sigma_{im} - u_{m,n}[p(\delta_{i1}\delta_{n1} + \delta_{i2}\delta_{n2}) + q\delta_{i3}\delta_{n3}] \tag{14}$$

Здесь P_m — составляющие поверхностной нагрузки в теле после деформации, n_i — направляющие косинусы нормали к поверхности тела до деформации. Перейдем к исследованию конкретных задач.

Остановимся на внутренней неустойчивости, согласно терминологии работы [8] под внутренней неустойчивостью понимается явление, заключающееся в том, что теряется устойчивость самой структуры материала независимо от вида граничных условий. Например, для слоистого материала это свойство проявляется в том, что в микрообъеме появляются искривления слоев. При описании таких материалов в рамках теории однородных ортотропных тел условием возникновения внутренней неустойчивости будет условие превращения системы уравнений (3) в систему гиперболо-эллиптического типа или в систему гиперболического типа. Ограничимся случаем $a_{33} > G$ и $a_{11} > G$, что может быть оправдано из соображений физического характера, тогда в результате анализа получаем критическое значение

$$q_* = G \tag{15}$$

При этом q_* не зависит от p при $p < G$.

Рассмотрим устойчивость прямоугольной пластинки [1], сжатой вдоль осей x_1 и x_2 усилиями интенсивности p, толщина пластинки $2h$, длина b и ширина a. Согласно (14) граничные условия имеют вид

$$\sigma_{33} = 0, \ \sigma_{13} = 0, \ \sigma_{23} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h \tag{16}$$

Решение уравнений (7) выберем в форме

$$\Psi_i = A_i \operatorname{ch}\frac{\gamma}{\zeta_i} x_3 \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2, \qquad \alpha = m\frac{\pi}{a}, \qquad \beta = n\frac{\pi}{b} \qquad (i=2,3)$$

$$\Psi_1 = A_1 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{\zeta_1} x_3 \cos \alpha x_1 \cos \beta x_2, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{17}$$

Из выражений (2), (9), (12), (14) и (17) следует: при $x_1 = 0, a$ и $x_2 = 0$, выполняются в интегральном смысле условия шарнирного опирания, т. е.

$$\begin{aligned} &u_3|_{x_1=0,\,a} = 0, \quad P_1|_{x_1=0,\,a} = 0, \quad \int_{-h}^{+h} P_2|_{x_1=0,\,a}\,dx_3 = 0 \\ &u_3|_{x_2=0,\,b} = 0, \quad P_2|_{x_2=0,\,b} = 0, \quad \int_{-h}^{+h} P_1|_{x_2=0,\,b}\,dx_3 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя решение (17) в граничные условия (16) и учитывая соотношения (2) и (12), в результате обычной процедуры получаем трансцендентное уравнение для определения критического значения p, которое после преобразований принимает форму

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\zeta_2}\left[a_{33}\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_2^2\right)+a_{13}\zeta_2^2\right]\left[\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_3^2\right)-1\right]\times \\ &\times \operatorname{sh}\frac{\gamma h}{\zeta_2}\operatorname{ch}\frac{\gamma h}{\zeta_3}-\frac{1}{\zeta_3}\left[a_{33}\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_3^2\right)+a_{13}\zeta_3^2\right]\times \\ &\times\left[\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_2^2\right)-1\right]\operatorname{sh}\frac{\gamma h}{\zeta_3}\operatorname{ch}\frac{\gamma h}{\zeta_2}=0 \end{aligned} \tag{19}$$

[1] В рассмотренных задачах для пластинок везде в соотношениях (1) и (14) принималось $q = 0$.

Займемся анализом корней уравнения (19) для тонкостенных пластин, в этом случае $\gamma h \ll 1$. Воспользовавшись этим условием, приближенно примем

$$\begin{gathered}
\operatorname{sh}\frac{\gamma h}{\zeta_i} \approx \left(\frac{\gamma h}{\zeta_i}\right)\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{\gamma h}{\zeta_i}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{\gamma h}{\zeta_i}\right)^4\right] \\
\operatorname{ch}\frac{\gamma h}{\zeta_i} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma h}{\zeta_i}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\gamma h}{\zeta_i}\right)^4
\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в уравнение (19), получим уравнение с точностью до $(\gamma h)^4$, решение которого представим в форме

$$p=\sum_{i=0}^{\infty}(\gamma h)^i p_i \tag{21}$$

В результате обычной процедуры получаем значение величин p_i. Ограничившись определением величин p_0, p_1 и p_2, получаем окончательный результат в форме

$$p=p^*\left[1-\pi^2 h^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\frac{6\left(a_{11}a_{33}-a_{13}{}^2\right)+G\left(5a_{33}-2a_{13}\right)}{15a_{33}G}\right] \tag{22}$$

Здесь через p^* обозначено значение эйлеровой силы при потере устойчивости по m, n-форме в случае соотношений между напряжениями и деформациями в виде (2)

$$p^*=\frac{1}{3}\,\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}{}^2}{a_{33}}\,\pi^2 h^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \tag{23}$$

Очевидно, что выражение (22) принимает минимальное значение при $m=n=1$.

Рассмотрим устойчивость круговой пластинки радиуса R и толщины $2h$ при сжатии ее усилиями интенсивности p в плоскости пластинки x_1x_2 в случае осесимметричных деформаций. Решение основных уравнений согласно (13) выберем в форме

$$u_r=-\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial x_3}\left(\Psi_2+\Psi_3\right),\qquad \Psi_1\equiv 0,\qquad u_\theta=0 \tag{24}$$

$$u_3=\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left[\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_2{}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}\Psi_2+\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_3{}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}\Psi_3\right]$$

$$\Psi_i=\sum_{k=0}^{\infty}A_k{}^{(i)}J\left(\frac{\varkappa_k}{R}r\right)\operatorname{ch}\frac{\varkappa_k}{R\zeta_i}x_3 \qquad (i=2,\,3)$$

Граничные условия при $x_3=\pm h$ согласно (14) имеют вид

$$\sigma_{33}=0,\ \sigma_{r3}=0,\ \text{при } x_3=\pm h \tag{25}$$

Компоненты внешней нагрузки при $r=R$ согласно (14) представим в виде

$$P_r=\left(\sigma_{rr}+pu_{r,r}\right),\quad P_3=\left(\sigma_{r3}-pu_{3,r}\right) \tag{26}$$

Для прямоугольной пластины рассмотрим случай шарнирного опирания, для круглой — рассмотрим случай жесткого защемления, для этого положим, что $\varkappa_k$ являются корнями уравнения

$$J'(\varkappa_k)=0 \tag{27}$$

Из соотношений (2), (9), (24) и (26) следует, что при $r=R$ выполняются граничные условия

$$u_r\big|_{r=R}=0,\qquad \int_{-h}^{+h}P_r\big|_{r=R}\,dx_3=0,\qquad u_3\big|_{\substack{r=R\\x_3=0}}=0 \tag{28}$$

Третье условие (28) можем всегда выполнить, добавляя к перемещению u_3 (24) произвольную постоянную.

Подставляя решение (24) в граничные условия (25), в результате обычной процедуры получаем трансцендентное уравнение для определения

$$\frac{1}{\zeta_2}\left[a_{33}\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_2^2\right)+a_{13}\zeta_2^2\right]\left[\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_3^2\right)-1\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{sh}\frac{\varkappa_k}{\zeta_2}\frac{h}{R}\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa_k}{\zeta_3}\frac{h}{R}-\frac{1}{\zeta_3}\left[a_{33}\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_3^2\right)+a_{13}\zeta_3^2\right]\times$$
$$\times\left[\frac{a_{11}-p}{a_{13}+G}\left(\frac{G}{a_{11}-p}-\zeta_2^2\right)-1\right]\mathrm{sh}\frac{\varkappa_k}{\zeta_3}\frac{h}{R}\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa_k}{\zeta_2}\frac{h}{R}=0 \qquad (29)$$

Займемся анализом корней уравнения (29) для тонкостенных пластин, в этом случае $h/R \ll 1$. Ограничиваясь образованием малого числа выпучин вдоль радиуса, по аналогии с (19)—(22) получаем

$$p=\frac{1}{3}\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{33}}\left(\varkappa_k\frac{h}{R}\right)^2\left[1-\left(\varkappa_k\frac{h}{R}\right)^2\frac{6(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)+G(5a_{33}-2a_{13})}{15a_{33}G}\right] \qquad (30)$$

Выражение (30) принимает минимальное значение при $k=1$, поэтому

$$p_*=p^*\left[1-14.68\left(\frac{h}{R}\right)^2\frac{6(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)+G(5a_{33}-2a_{13})}{15a_{33}G}\right],\quad \varkappa_1\approx 3.83 \qquad (31)$$

где через p^* обозначено значение эйлеровой силы

$$p^*=14.68\left(\frac{h}{R}\right)^2\frac{1}{3}\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{33}}$$

Таким образом, в результате анализа формул (22) и (31) приходим к выводам.

1. Гипотеза Кирхгофа — Лява в теории устойчивости пластин является асимптотически точной.

2. Теория, построенная с применением гипотезы Кирхгофа — Лява, дает завышенное значение критической силы.

Эти выводы получены независимо от свойств материала пластинки и в равной степени относятся и к изотропным материалам, и к трансверсально-изотропным материалам с малой сдвиговой жесткостью, и к нелинейно-упругим материалам, и к упругопластическим материалам, если в случае последних принять концепцию касательного модуля.

Поступила 26 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость ортотропных тел. Прикл. механика, 1967, т. 3, вып. 5.
2. Бабич И. Ю., Гузь А. Н. О точности гипотезы Кирхгофа — Лява в теории Густойчивости цилиндрических изотропных оболочек при осесимметричных деформациях. Докл. АН УРСР, сер. А, 1967, № 10.
3. узь А. Н. О точности гипотезы плоских сечений в теории устойчивости транс- в ерсально-изотропных стержней. Докл. АН УРСР, сер. А, 1967, № 8.
4. Biot M. A. Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Phil. Mag. Ser. 7, 1939, vol. 27, p. 469—489.
5. Biezena C. B., Henchky H. On the general theory of elastic stability. Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., Amsterdam, 1928, No. 31, 1929, No. 32.
6. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
7. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
8. Biot M. A. Interfacial instability in finite elasticity under initial stress. Proc. Roy. Soc., 1963, vol. 273, No. 1354.