Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

СЕН-ВЕНАНОВ ИЗГИБ ПРИ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Е. Рейсснер

(США)

Рассматривается плоская задача о Сен-Венановом изгибе для балки тонкого прямоугольного поперечного сечения. Задача ставится по двум соображениям. Первое заключается в том, что оказывается возможным дать в замкнутой форме решение этой задачи с учетом эффекта моментных напряжений; второе заключается в том, что эту проблему можно рассматривать как частный случай проблемы вывода двухмерной теории оболочек из трехмерной теории упругости с помощью итерационного метода[1].

1. Постановка задачи. Исходные дифференциальные уравнения состоят из трех уравнений равновесия

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0, \ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \quad \tau_{x,x} + \tau_{y,y} + \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0 \tag{1.1}$$

трех уравнений неразрывности

$$e_{xx,y} - e_{yx,x} + k_x = 0, \ e_{xy,y} - e_{yy,x} + k_y = 0, \ k_{x,y} - k_{y,x} = 0 \tag{1.2}$$

вытекающих из формул деформации — смещения

$$e_{xx} = u_{,x}, \ e_{yy} = v_{,y}, \ k_x = \psi_{,x}, \ k_y = \psi_{,y}, \ e_{xy} = v_{,x} - \psi, \ e_{yx} = v_{,y} + \psi$$

и шести соотношений деформации — напряжения, которые берутся в форме

$$\begin{gathered} E_x e_{xx} = \sigma_{xx} - \nu_x \sigma_{yy}, \ E_y e_{yy} = \sigma_{yy} - \nu_y \sigma_{xx} \\ 2G_x e_{xy} = \sigma_{xy}, \ \ 2G_y e_{yx} = \sigma_{yx} \\ c^2 \Gamma_x k_x = \tau_x, \ c^2 \Gamma_y k_y = \tau_y \quad (\nu_x / E_x = \nu_y / E_y) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Система (1.1) — (1.3) должна быть решена в прямоугольной области $|y| \leqslant c, \ |x| \leqslant L$ с учетом граничных условий

$$y = \pm c, \quad \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \tau_y = 0 \tag{1.4}$$

$$x = \pm L, \quad \int_{-c}^{c} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, y\sigma_{xx} - \tau_x)\, dy = (0, Q, \pm QL) \tag{1.5}$$

Граничные условия при $x = \pm L$ ставятся в интегральной форме; это позволяет решать задачу полуобратным методом.

---

[1] Результаты, относящиеся к итерационному выводу двухмерных уравнений теории оболочек, доложены в Копенгагене (сентябрь 1967 г. II Симпозиум по теории оболочек).

2. Приведение к дифференциальному уравнению второго порядка. Примем такие допущения: σ_{xx} и τ_x линейны по x; σ_{xy}, σ_{yx}, τ_y не зависят от x, σ_{yy} тождественно равно нулю. Тогда можно написать

$$\sigma_{xx} = xS_x,\ \tau_x = xT_x,\ \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = S_{xy},\ \sigma_{yx} = S_{yx},\ \tau_y = T_y \qquad (2.1)$$

Подставив (2.1), (2.2) в уравнения (1.1) — (1.3), получим следующую систему:

$$S_x + S_{yx}' = 0,\ \ T_x + T_y' + S_{xy} - S_{yx} = 0 \qquad (2.2)$$

$$\left(\frac{S_x}{E_x}\right)' + \frac{T_x}{c^2\Gamma_x} = 0,\quad \left(\frac{S_{xy}}{2G_x}\right)' + \frac{\nu_x S_x}{E_x} + \frac{T_y}{c^2\Gamma_y} = 0,\quad \left(\frac{T_x}{c^2\Gamma_x}\right)' = 0 \qquad (2.3)$$

в которой штрих обозначает дифференцирование по y.

Из последнего и первого уравнений (2.3) следует:

$$\frac{T_x}{c^2\Gamma_x} = K, \qquad \frac{S_x}{E_x} = -K(y - y_0) \qquad (2.4)$$

где K и y_0 — константы интегрирования.

Далее из первого уравнения (2.2) и (1.4) вытекает, что

$$S_{yx} = K\int_{-c}^{y} E_x(\eta - y_0)\,d\eta, \qquad y_0\int_{-c}^{c} E_x\,dy = \int_{-c}^{c} yE_x\,dy \qquad (2.5)$$

Второе равенство (2.2) представим в виде

$$S_{xy} = S_{yx} - T_x - T_y' \qquad (2.6)$$

и подставим во второе равенство (2.3). Это приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left(\frac{T_y'}{2G_x}\right)' - \frac{T_y}{c^2\Gamma_y} = \left(\frac{S_{yx} - T_x}{2G_x}\right)' + \frac{\nu_x S_x}{E_x} \qquad (2.7)$$

при граничных условиях

$$T_y(\pm c) = 0 \qquad (2.8)$$

В уравнениях (2.4) — (2.7) константа K выражается через силы Q, приложенные к балке, при помощи соотношений

$$-K\int_{-c}^{c}[c^2\Gamma_x + y(y - y_0)E_x]\,dy = Q \qquad (2.9)$$

Геометрический смысл K вытекает из следующих равенств:

$$v_{,xx} = e_{xy,x} + k_x = \tau_x / c^2\Gamma_x = Kx \qquad (2.10)$$

3. Точное решение для балки постоянного поперечного сечения. Если E, ν, G, Γ не зависят от y, то, прежде всего, из второго уравнения (2.5) и уравнения (2.8) получим

$$y_0 = 0, \qquad K = \frac{-Q}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3} \qquad (3.1)$$

Далее из (2.4), (2.5) и (2.1) вытекают выражения для σ_{xx}, σ_{xy} и τ_x

$$\sigma_{xx} = \frac{E_x Qxy}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3}, \qquad \sigma_{yx} = \frac{{}^1/_2 E_x Q\,(c^2 - y^2)}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3} \tag{3.2}$$

$$\tau_x = \frac{-\Gamma_x Q c^2 x}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3}$$

Дифференциальное уравнение (2.7) приводится к виду

$$T_y'' - \frac{2G_x}{\Gamma_y c^2} T_y = (E_x - 2\nu_x G_x)\,Ky \tag{3.3}$$

и, так как $T_y\,(\pm c) = 0$, то отсюда следует:

$$T_y = -\frac{E_x - 2\nu_x G_x}{\lambda^2} K\left(y - c\,\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right), \qquad \lambda^2 = \frac{2G_x}{\Gamma_y c^2} \tag{3.4}$$

Далее, имея в виду последнее уравнение (2.1), получаем

$$\tau_y = \left(\frac{1}{2}\,\frac{E_x}{G_x} - \nu_x\right) \frac{\Gamma_y Q c^3}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3} \left(\frac{y}{c} - \frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right) \tag{3.5}$$

Наконец, уравнение (2.6) и четвертое уравнение (2.1) дают следующий закон изменения касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \frac{Qc^2}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3} \left[\frac{E_x}{2}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) + \Gamma_x - \left(\frac{1}{2}\,\frac{E_x}{G_x} - \nu_x\right)\Gamma_y\left(1 - \frac{\lambda c \operatorname{ch}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right)\right] \tag{3.6}$$

В уравнениях (3.2), (3.5) и (3.6) можно считать, что x имеет тот же порядок, что и L; при этом

$$c\,/\,L \ll 1$$

4. Случай $\Gamma_y = 0$. Предполагая, что в среде могут возникать моментные напряжения между поперечными элементами, но отсутствуют моментные напряжения между продольными элементами, можно уравнение (3.7) привести к виду

$$\sigma_{xy} = \frac{Q\,[{}^1/_2 E_x\,(c^2 - y^2) + \Gamma_x c^2]}{2\Gamma_x c^3 + {}^2/_3 E_x c^3} \tag{4.1}$$

Уравнения (3.2) при этом не изменяются. Отсюда очевидно, что коль скоро $\Gamma_x \ll E_x$, то $\sigma_{xy} \approx \sigma_{yx}$ и оба эти напряжения малы по сравнению с σ_{xx}.

Если Γ_x имеет тот же порядок, что и E_x, то по-прежнему будем иметь, что σ_{xy} и σ_{yx} малы по сравнению с σ_{xx}, однако разность σ_{xy} и σ_{yx} теперь будет величиной того же порядка, что и сами эти напряжения.

Наконец, если $E_x \ll \Gamma_x$, то σ_{xy} будет практически постоянной по толщине полосы и, кроме того, будет так же велико или даже больше, чем продольное нормальное напряжение σ_{xx}. В то же время, рассмотрев момент Qx в поперечном сечении, увидим, что вклад в него нормальных напряжений σ_{xx} будет теперь мал по сравнению с вкладом моментных напряжений τ_x.

5. Случай $\Gamma_y = O(\Gamma_x)$. В этом случае для нас будет дополнительно представлять интерес отношение τ_y к τ_x, а также относительные величины различных компонентов деформации.

Сначала рассмотрим этот вопрос в рамках предположений, что

$$E_x / G_x = O(1), \qquad \nu_x = O(1)$$

Тогда из (3.5) и третьего уравнения (3.2) легко видеть, что $\tau_y = O(\tau_x c / L)$. Кроме того видно, что если $\Gamma_x / E_x = O(1)$, то σ_{xy} мало по сравнению с σ_{xx}, а в противном случае, σ_{xy} приближенно выражается через Γ_x при помощи (3.6).

Для сравнения деформаций введем величину K из второго уравнения (3.1) и напишем

$$e_{xx} = -Kxy, \qquad e_{yy} = K\nu_x xy, \qquad e_{yx} = K\frac{E_x}{G_y}\frac{c^2 - y^2}{4} \tag{5.1}$$

$$e_{xy} = K\left[\frac{E_x}{G_x}\frac{c^2 - y^2}{4} + \frac{\Gamma_x c^2}{2G_x} - \left(\frac{E}{2G_x} - \nu_x\right)\frac{\Gamma_y c^2}{G_x}\left(1 - \lambda c\frac{\operatorname{ch}\lambda c}{\operatorname{sh}\lambda c}\right)\right] \tag{5.2}$$

$$k_x = -Kx, \qquad k_y = K\left(\frac{E}{2G_x} - \nu_x\right)c\left(\frac{y}{c} - \frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right) \tag{5.3}$$

Отсюда видно, что k_y мало по сравнению с k_x для всех возможных значений λ. Кроме того, если предположить, что $E_x / G_y = O(1)$, то e_{yx} будет мало по сравнению с e_{xx}. Нормальная деформация e_{yy}, как и ожидалось, имеет тот же порядок величины, что e_{xx}, как результат эффекта Пуассона.

Легко установить, оценивая e_{xy}, что в то время как первый член с E_x / G_x мал по сравнению с e_{xx}, член с Γ_x / G_x не обязательно обладает этим свойством. Чтобы выяснить влияние члена с Γ_y / G_x, следует выяснить, какими могут быть величины

$$\lambda = \sqrt{2G_x / \Gamma_y} / c$$

Рассмотрев выражение

$$\frac{\Gamma_y}{G_x}\left(1 - \lambda c\frac{\operatorname{ch}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right) = \frac{2}{(\lambda c)^2}\left(1 - \lambda c\frac{\operatorname{ch}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda c}\right) \tag{5.4}$$

можно увидеть, что вклад этого члена будет, в крайнем случае, того же порядка величины, как вклад первого члена внутри скобок в (5.2) и соответственно он так же мал по сравнению с e_{xx}.

Из всего этого вытекает, что если исключить члены высшего порядка малости, то характер деформированного состояния в полосе будет таким же, как если бы положить

$$e_{xx} = -Kxy, \qquad e_{yy} = K\nu_x xy, \qquad e_{yx} = 0 \tag{5.5}$$

$$e_{xy} = K\frac{\Gamma_x c^2}{2G_x}, \qquad k_x = -Kx, \qquad k_y = 0$$

Отказ от ограничения $E_x / G = O(1)$ обозначает, что деформация поперечного сдвига может оказывать эффект первого порядка на деформированное состояние балки; в противоположность заключениям, вытекающим из уравнений (5.5), теперь, очевидно, что k_y будет величиной того же порядка, что и k_x и что e_{yx} будет величиной того же порядка, что и e_{xx}.

6. Интегро-дифференциальные уравнения задачи. Из уравнений равновесия (1.1) и (1.4) выводим соотношения

$$
\begin{gathered}
\sigma_{yx} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xx,x}\, d\eta, \qquad \sigma_{yy} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xy,x}\, d\eta \\
\tau_y = -\int_{-c}^{y} \left(\tau_{x,x} + \sigma_{xy} + \int_{-c}^{y} \sigma_{xx,x}\, d\zeta\right) d\eta
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\int_{-c}^{c} \sigma_{xx} d\eta\right)_{,x} = 0, \qquad \left(\int_{-c}^{c} \sigma_{xy} d\eta\right)_{,x} = 0 \\
\left[\int_{-c}^{c} (\tau_x - \eta\sigma_{xx})\, d\eta\right]_{,x} + \int_{-c}^{c} \sigma_{xy}\, d\eta = 0
\end{gathered} \tag{6.2}
$$

Из уравнений неразрывности (1.2) получаются соотношения

$$
\begin{gathered}
k_x = K_x + \int_{0}^{y} k_{y,x}\, d\eta, \qquad e_{xy} = \gamma_x - \int_{0}^{y} k_y\, d\eta + \int_{0}^{y} e_{yy,x}\, d\eta \\
e_{xx} = \varepsilon_x - K_x y + \int_{0}^{y} \left(e_{yx} - \int_{0}^{\eta} k_y\, d\zeta\right)_{,x} d\eta
\end{gathered} \tag{6.3}
$$

Здесь K_x, γ_x и ε_x — функции интегрирования, которые не зависят от поперечной координаты y.

Подстановка (6.1) и (6.3) в соотношения упругости (1.3) приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
E_x \left[\varepsilon_x - K_x y + \int_{0}^{y} \left(e_{yx} - \int_{0}^{\eta} k_y\, d\zeta\right)_{,x} d\eta\right] = \sigma_{xx} + \nu_x \int_{-c}^{y} \sigma_{xy,x}\, d\eta \\
E_y e_{yy} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xy,x}\, d\eta - \nu_y \sigma_{xx} \\
2G_x \left[\gamma_x - \int_{0}^{y} k_y\, d\eta + \int_{0}^{y} e_{yy,x}\, d\eta\right] = \sigma_{xy} \\
2G_y e_{yx} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xx,x}\, d\eta, \qquad c^2\Gamma_x \left[K_x + \int_{0}^{y} k_{y,x}\, d\eta\right] = \tau_x \\
c^2\Gamma_y k_y = -\int_{-c}^{y} \left(\tau_{x,x} + \sigma_{xy} + \int_{-c}^{\eta} \sigma_{xx,x} d\zeta\right) d\eta
\end{gathered} \tag{6.4}
$$

Уравнения (6.4) можно рассматривать как систему интегродифференциальных уравнений с частными производными относительно шести искомых переменных σ_{xx}, σ_{xy}, τ_x, e_{yx}, e_{yy}, k_y величины ε_x, K_x и γ_x как параметры, которые должны быть определены с помощью интегральных условий равновесия (6.2).

7. Итерационный процесс. Для того чтобы стало возможным решение системы (6.4) с помощью итерационного процесса, надо ограничиться решениями, в которых наименьшая характеристическая длина L велика по сравнению с толщиной $2c$. Под наименьшей характеристической длиной подразумевается такое наименьшее расстояние, внутри которого происходит заметное изменение искомых переменных, т. е.

$$e_{yx,x} = O\left(\frac{e_{yx}}{L}\right), \qquad \sigma_{xy,x} = O\left(\frac{\sigma_{xy}}{L}\right), \ldots \int_0^y e_{yx,x}\,d\eta = O\left(\frac{c}{L} e_{yx}\right), \ldots \tag{7.1}$$

Применяя понятия такой длины L, предполагаем, что она существует. Из такого предположения выводятся некоторые следствия и в конце проверяется, что получаемое таким образом решение обладает свойствами, оправдывающими первоначальное предположение.

Простейшим типом итерационного решения системы (6.4) будет решение, в котором все производные по x предполагаются малыми высшего порядка. Оно, однако имеет излишком частный характер. Более удовлетворительный выбор первого приближения итерационного процесса заключается в принятии следующих равенств:

$$E_x\,[\varepsilon_x^{(1)} - K_x^{(1)} y] = \sigma_{xx}^{(1)}, \; E_y e_{yy}^{(1)} = -\,\nu_y \sigma_{xx}^{(1)} \tag{7.2}$$

$$2G_x\left[\gamma_x^{(1)} - \int_0^y k_y^{(1)}\,d\eta - \int_0^y e_{yy,\,x}^{(1)}\,d\eta\right] = \sigma_{xy}^{(1)} \tag{7.3}$$

$$2G_y e_{yx}^{(1)} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xx,\,x}^{(1)}\,d\eta, \qquad c^2\Gamma_x K_x^{(1)} = \tau_x^{(1)} \tag{7.4}$$

$$c^2\Gamma_y k_y^{(1)} = -\int_{-1}^{y}\left(\tau_{x,\,x}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(1)} + \int_{-c}^{y} \sigma_{xx,\,x}^{(1)}\,d\zeta\right)d\eta \tag{7.5}$$

в которых величины $\sigma_{xx}^{(1)}$, и т. д. удовлетворяют уравнениям (6.2).

Теперь $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\tau_x^{(1)}$ непосредственно получаются из (7.2) и (7.4), а затем из тех же уравнений определяются $e_{yy}^{(1)}$ и $e_{yx}^{(1)}$.

Для получения $\sigma_{xy}^{(1)}$ и $k_y^{(1)}$ остаются равенства (7.3) и (7.5). Чтобы построить эти величины, сначала из (6.2) и (7.5) выводим для $K_y^{(1)}$ дифференциальное уравнение без частных производных

$$2G_x\left[\gamma_x^{(1)} - \int_0^y k_y^{(1)}\,d\eta + \int_0^y (\nu_y / E_y)\,\sigma_{xx,\,x}^{(1)}\,d\eta\right] =$$

$$= -\,c^2\,(\Gamma_y k_y^{(1)})' - \tau_{x,\,x}^{(1)} - \int_{-c}^{y} \sigma_{xx,\,x}^{(1)}\,d\eta \tag{7.6}$$

в котором $\sigma_{xx}^{(1)}$ и $\tau_a^{(1)}$ определяются как функции y из (7.2) и (7.4).

Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно

$$\int_0^y k_y^{(1)}\, d\eta$$

должно быть решено с учетом граничных условий $\Gamma_y k_y^{(1)} = 0$ при $y = \pm c$, Имея $k_y^{(1)}$, затем выразим $\sigma_{xy}^{(1)}$ из (7.3) или (7.5) через $\gamma_x^{(1)}$, $\varepsilon_x^{(1)}$ и $K_x^{(1)}$.

Наконец, для определения трех последних величин, как функций x, имеются обыкновенные дифференциальные уравнения (6.2). Для рассматриваемой, относительно простой, задачи о балке порядок этих уравнений может быть понижен с помощью интегрирования

$$\int_{-c}^{c} \sigma_{xx}^{(1)} d\eta = N, \qquad \int_{-c}^{c} \sigma_{xy}^{(1)} d\eta = Q, \qquad \int_{-c}^{c} (\tau_x^{(1)} - \eta\sigma_{xx}^{(1)})\, d\eta = M + Qx \qquad (7.7)$$

Чтобы выделить здесь Сен-Венановскую задачу изгиба, надо в соответствии с граничными условиями (1.5) положить $N = 0$ и $M = 0$. Если $N \neq 0$ и $M \neq 0$, то получится задача о чистом изгибе и растяжении.

Имея первое приближение $\sigma_{xx}^{(1)}$ и т. д., можно построить второе приближение $\sigma_{xx}^{(2)}$ и т. д, решая систему

$$E_x \left[\varepsilon_x^{(2)} - K_x^{(2)} y + \int_0^y \left(e_{yx}^{(1)} - \int_0^\eta k_y^{(1)}\, d\eta\right)_{,x} d\zeta\right] = \sigma_{xx}^{(2)} - \nu_x \sigma_{yy}^{(1)}$$

$$E_y e_{yy}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(1)} - \nu_y \sigma_{xx}^{(2)}$$

$$2G_x \left[\gamma_x^{(2)} - \int_0^y k_y^{(2)}\, d\eta + \int_0^y e_{yy,x}^{(2)}\, d\eta\right] = \sigma_{xy}^{(2)} \qquad (7.8)$$

$$2G_y e_{yx}^{(2)} = -\int_{-c}^{y} \sigma_{xx,x}^{(2)} d\eta, \qquad c^2\Gamma_x \left[K_x^{(2)} + \int_0^y k_{y,x}^{(1)} d\eta\right] = \tau_x^{(2)}$$

$$c^2 \Gamma_y k_y^{(2)} = -\int_{-c}^{y} \left(\tau_{x,x}^{(2)} + \sigma_{xy}^{(2)} + \int_{-c}^{\eta} \sigma_{xx,x}^{(2)} d\zeta\right) d\eta$$

вместе с уравнениями (7.7) для $\sigma_{xx}^{(2)}$, $\sigma_{yx}^{(2)}$ и $\tau_x^{(2)}$.

Условия применимости описанного процесса, следующие из рассмотрения систем (6.4) и (7.2) — (7.5), имеют вид

$$\frac{c}{L} e_{yx}^{(1)} = O(\varepsilon_x^{(1)}), \qquad \frac{c}{L} K_y^{(1)} = O(K_x^{(1)}), \qquad \frac{c}{L} \sigma_{xy}^{(1)} = O(\sigma_{xx}^{(1)}) \qquad (7.9)$$

В равенствах (7.9) заключаются некоторые требования, относящиеся к допустимым относительным порядкам величин E, G, Γ и ν. В то же время условия более строгого типа (такие, как, например, требования $E_x = O(G)$) допускают употребление системы первого приближения, не содержащей некоторых из членов, оставленных в (7.2) — (7.5) (при этом сохраняют силу результаты, полученные при помощи уравнений (7.2) — (7.5) в нетронутом виде).

Поступила 15 III 1968