

## О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ НА МАКРОСКОПИЧЕСКУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов

(Ленинград)

В работе [1] была предложена квазистатистическая теория пластичности поликристаллических тел, приближенно учитывающая неоднородность пластической деформации и сопутствующие ей упругие микродеформации. Ниже эта теория распространяется на случай, когда в теле, помимо микронапряжений, вызываемых неоднородностью пластической деформации, имеются еще и начальные упругие микронапряжения, не нарушающие статистической изотропии и однородности тела в исходном его состоянии. Такое обобщение теории представляет несомненный интерес, так как начальные микронапряжения неизбежно возникают при образовании поликристаллов путем охлаждения жидкого металла. В литературе (например, [2]) встречается указание на существенность роли этих начальных напряжений в процессе пластического деформирования, однако, насколько авторам известно, еще не было попыток теоретически описать эту роль (т. е. влияние начальных микронапряжений на связь между макроскопическими напряжениями и пластическими деформациями). Как будет видно из дальнейшего, учет начальных упругих микродеформаций и соответствующих им напряжений вносит заметные количественные и качественные поправки в теорию пластичности поликристаллов.

1. Некоторые дополнения к работе [1]. В пункте 1 указанной работы предложен вариант теории пластичности, основанный на представлении, что макроскопическая пластическая деформация может быть приближенно выражена как среднеарифметическое от конечного числа элементарных пластических деформаций, которым соответствуют различные значения локального предела текучести. В этом варианте осреднение всех случайных величин — предела текучести, напряжений и пластических деформаций — проводится по объему, заключающему в себе достаточно большое количество кристаллических зерен.

В п. 2 этой же работы указанный вариант теории обобщается на модель поликристалла, состоящую из бесконечного числа элементов, в соответствии с чем суммы заменяются интегралами. При этом предел текучести, напряжения и пластические деформации рассматриваются как функции некоторого скалярного случайного параметра  $x$ , по существу же основным случайным скалярным параметром задачи будет интенсивность тензора сил сухого трения  $T$ , реализации которой будем обозначать через  $\tau$ . Плотность распределения  $T, p(\tau)$  должна быть известна и считается одинаковой во всех точках поликристалла ввиду предположения о статистической однородности последнего. Однако в [1] вместо  $T$  и  $\tau$  введены однозначно с ними связанные параметры  $x$  и  $\xi$ , выбираемые так, чтобы интегрирование

выполнялось в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$ . Взаимосвязь между  $\tau$  и  $\xi$  определяется выражением

$$\xi = \int_0^{\tau} p(\tau) d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (1.1)$$

т. е.  $\xi$  есть интегральная функция распределения вероятностей  $T$ .

Соотношения (2.4) работы [1], если в них ввести вместо  $x$  и  $\xi$ ,  $T$  и  $\tau$ , принимают вид

$$\langle E_{ij}^p \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon_{ij}^p(\tau) p(\tau) d\tau, \quad \langle \Sigma_{ij} \rangle = \int_0^{\infty} \sigma_{ij}(\tau) p(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$\langle \Sigma_{ij} \rangle - \sigma_{ij} = m(\varepsilon_{ij}^p - \langle E_{ij}^p \rangle) \quad (1.3)$$

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \int_0^{\infty} c(\tau, \tau') \varepsilon_{ij}^p(\tau') p(\tau') d\tau' \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \tau_{ij} d\lambda, \quad \sqrt{\tau_{ij}\tau_{ij}} = \tau \quad (1.5)$$

Здесь  $E_{ij}^p$ ,  $(\varepsilon_{ij}^p)$  — случайный тензор пластической деформации;  $\Sigma_{ij}$ ,  $(\sigma_{ij})$  — случайный тензор напряжения;  $T_{ij}$ ,  $(\tau_{ij})$  — случайный тензор диссипативных сил сопротивления пластическим деформациям.

В скобках указаны обозначения реализаций этих случайных тензоров.

Интегрирование в этих формулах выполняется в пределах  $0 \leq \tau \leq \infty$  в соответствии с тем, что случайная скалярная величина  $\tau$  всегда положительна. Ее плотность вероятности есть физическая характеристика поликристалла, являющаяся мерой разброса локальных пределов текучести.

Обратим внимание на то, что последние два уравнения (1.4) и (1.5) написаны для реализаций. Они выражают локальный закон течения поликристалла. При интегрировании дифференциальных соотношений (1.5) величина  $\tau$  будет константой. Отметим, кроме того, что интегрирование по  $\xi$  в [1] (так же как и интегрирование по  $\tau$  в (1.2)—(1.4)) означает осреднение не по объему, а по множеству реализаций. Между тем вариант теории, приведенный в п. 1 работы [1], основывается на осреднении по объему. Поэтому обобщение этой теории на модель с бесконечным числом элементов по существу основано на эргодической гипотезе; это обстоятельство в работе [1] не было оговорено.

**2. Введение в теорию начальных микронапряжений.** Предположим, что в поликристалле имеется случайное поле начальных упругих микродеформаций  $E_{ij}^{\circ}$ ,  $(\varepsilon_{ij}^{\circ})$ , не нарушающее макроскопической однородности и изотропности тела в исходном его состоянии. Ввиду требования статистической однородности тела этот случайный тензор должен быть стационарной функцией координат, а ввиду требования статистической изотропии все его главные направления должны быть равновероятны, из чего следует, что плотность вероятности шестимерной случайной величины  $E_{ij}^{\circ}$  может быть функцией только инвариантов  $\varepsilon_{ij}^{\circ}$ . При этом для дальнейшего представляет интерес лишь девиаторная часть тензора  $E_{ij}^{\circ}$ , так как именно она оказывает влияние на развитие пластических деформаций. Ввиду этого, а также считая, что шаровая и девиаторная части  $E_{ij}^{\circ}$  суть незави-

симые случайные величины будем в дальнейшем полагать, что  $E_{ij}^\circ$  будет девиатором (чтобы не вводить специально обозначения для его девиаторной части). Плотность распределения  $E_{ij}^\circ$ , со сделанными оговорками, может быть функцией только второго и третьего инвариантов  $\varepsilon_{ij}^\circ$ , а его математическое ожидание  $\langle E_{ij}^\circ \rangle$  должно быть равно нулю. Однако естественно сделать дополнительное предположение, что не только все главные направления  $E_{ij}^\circ$  равновероятны, но и равновероятны все виды начальных микродеформаций, так как нет оснований ожидать, что имеется предпочтение для какого-либо из них (например, хотя бы для чистого сдвига или для растяжения). Тогда остается единственная возможность, что плотность вероятности  $E_{ij}^\circ$  есть функция его второго инварианта (его интенсивности)

$$F(\varepsilon_{ij}^\circ) = F(\varepsilon^\circ), \quad \varepsilon^\circ = \sqrt{\varepsilon_{ij}^\circ \varepsilon_{ij}^\circ} \quad (2.1)$$

Заметим, что положительная случайная величина  $\varepsilon^\circ$  ограничена сверху неравенством

$$\varepsilon^\circ \leq \tau / 2G \quad (2.2)$$

в котором  $G$  модуль упругого сдвига (строго говоря, локальный модуль упругого сдвига. Однако в духе рассматриваемой приближенной теории, в которой осреднение по ориентациям кристаллитов предполагается выполненным заранее,  $G$  следует отождествить с эффективным модулем сдвига поликристалла).

Смысл неравенства (2.2) состоит в том, что при остывании металла в нем не могут возникнуть начальные микронапряжения с интенсивностью, превосходящей локальный предел текучести. При этом в зависимости от локальной ситуации  $\varepsilon^\circ$  может оказаться равным  $\tau / 2G$ , так и меньше этого значения. Однако для упрощения теории представляется допустимым заменить неравенство (2.2) равенством

$$\varepsilon^\circ = \tau / 2G \quad (2.3)$$

Такое предположение, как очевидно, направлено в сторону преувеличения влияния начальных микронапряжений на макроскопическую картину пластического деформирования, так как интенсивность упругих начальных микродеформаций оценивается при этом по верхнему ее пределу. Нетрудно заметить, что в такой теории упругая область деформаций должна отсутствовать: любое сколь угодно малое изменение нагрузки, произведенное в любом направлении, должно вызывать пластические деформации, так как сила сухого трения согласно (2.3) оказывается уравновешана начальными микронапряжениями.

Тем самым, в такой теории будет отсутствовать понятие границы текучести в том смысле, как оно понимается, обыкновенно в курсах теории пластичности. Однако, как известно, понятие границы текучести (предела текучести) будет результатом идеализации экспериментально наблюдаемой картины пластического деформирования.

В действительности пластические деформации наблюдаются при любых изменениях нагрузки и чем точнее постановка опыта, тем скорее они обнаруживаются. Известно что технический предел текучести при растяжении определяется как такое напряжение, при котором пластическое удлинение достигает величины 0.2%.

То обстоятельство, что на практике предел текучести приходится определять, задаваясь величиной пластической деформации, подчеркивает условность этого понятия. Таким образом, отсутствие в теории, основанной на равенстве (2.3), понятия предела текучести не будет ее пороком, а скорее свидетельствует о сближении теории с экспериментом.

Следует подчеркнуть, что и в этом варианте теории могут быть введены понятия предела текучести и границы текучести, если задаться порогом интенсивности пластической деформации, т. е. такой интенсивности, начиная с которой пластические деформации учитываются, а ниже — пренебрегаются. Естественно, что размеры и форма получаемых при этом границ текучести будут зависеть от величины этого условного порога, как это и наблюдается экспериментально [3].

Наряду с вариантом теории, основывающимся на равенстве (2.3), ниже рассматриваются и некоторые другие упрощенные варианты теории. В частности, будет исследован вариант, основывающийся на предположении, что  $\varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const}$ , причем  $\varepsilon_0 < \tau / 2G$ .

Оказывается, что в такой теории имеется понятие границы текучести в обычном понимании, причем на этой границе в процессе пластического деформирования образуются угловые точки.

Принятие допущения (2.3) устанавливает однозначную взаимосвязь между двумя случайными скалярными параметрами — интенсивностью сил сухого трения  $\tau$  и интенсивностью начальных упругих деформаций, причем плотность распределения  $E^\circ$  должна быть тождественна плотности распределения  $T/2G$ . Формально, введение в теорию, выражаемую совокупностью уравнений (1.2) — (1.5), тензора начальных микродеформаций не представляет труда, однако при этом задача оказывается зависящей не только от случайного скаляра  $T$ , но и от случайного тензора  $E_{ij}^\circ$ , что весьма усложняет решение уравнений для конкретных видов нагружения.

Поэтому целесообразно использовать в дальнейшем уравнения (1.2) — (1.5) в несколько упрощенном виде, заменив (1.4) одним из двух соотношений

$$T_{ij} = \langle \Sigma_{ij} \rangle - \alpha E_{ij}^p \quad (2.4)$$

$$T_{ij} = 2G [\langle E_{ij} \rangle - \beta E_{ij}^p], \quad E_{ij} = E_{ij}^p + E_{ij}^e \quad (2.5)$$

Эти соотношения имеют перед (1.3) то существенное преимущество, что не содержат  $\varepsilon_{ij}^p$  под знаком интеграла.

Как уже было отмечено в [1], применение формул (2.5) соответствует теории Бесселинга [4], обобщенной на модель с бесконечным числом элементов. Этот вариант теории достаточно правильно описывает картину макроскопических пластических деформаций, хотя и не позволяет учесть некоторых тонких эффектов, наблюдаемых при циклических нагружениях. Что касается формулы (2.4), то она по своим возможностям примерно равноценна (2.5).

Дальнейшее изложение будет ориентировано, в основном, на использование варианта теории с уравнением (2.4) вместо (1.4). С учетом начальных микродеформаций это уравнение записывается следующим образом:

$$T_{ij} = \langle \Sigma_{ij} \rangle - \alpha E_{ij}^p - 2GE_{ij}^\circ \quad (2.6)$$

Здесь учитывается, что начальные упругие микродеформации могут способствовать или, наоборот, препятствовать преодолению локального сухого трения — в зависимости от направления действующих напряжений. Скалярный коэффициент  $\alpha$  в (2.6) предполагается в дальнейшем константой. Уравнение (2.6) может быть приведено к виду идентичному (2.4)

$$T_{ij} = \langle \Sigma_{ij} \rangle - \alpha E_{ij}^{*p}, \quad E_{ij}^{*p} = E_{ij}^p + \frac{2G}{\alpha} E_{ij}^\circ \quad (2.7)$$

Из этого следует, что в указанной выше постановке задачи учет начальных упругих микродеформаций может быть формально подменен введением поля начальных пластических деформаций

$$E_{ij}^{op} = \frac{2G}{\alpha} E_{ij}^\circ \quad (2.8)$$

Совокупность формул (2.7), (1.5), (2.3) образует вариант квазистатической теории пластичности микронеоднородных тел, учитывающий начальные упругие микродеформации. Для возможности применения этих формул, в частности для вывода из них соотношений между макроскопическими напряжениями  $\langle \Sigma_{ij} \rangle$  и макроскопическими пластическими деформациями  $\langle E_{ij}^p \rangle$  надо, однако, еще знать закон распределения случайного тензора  $E_{ij}^\circ$ .

**3. О плотности распределения  $E_{ij}^\circ$  и  $T$ .** Как было отмечено, случайный тензор начальных микродеформаций в силу требования начальной изотропии и однородности поликристалла должен обладать сферической симметрией — его плотность вероятности будет функцией только его интенсивности. Последнее, в совокупности с тензорной линейностью уравнений рассматриваемой теории, делает возможным и удобным использование в дальнейшем векторной интерпретации А. А. Ильюшина [5], так как все приводимые ниже формулы инвариантны в пятимерном векторном пространстве.

Введем вместо шести компонент девиатора  $E_{ij}^\circ$ , связанных между собой линейной зависимостью  $E_{kk}^p = 0$  пять независимых величин

$$\begin{aligned} E_1^\circ &= \sqrt{3/2} E_{11}^\circ, \quad E_2^\circ = \sqrt{2} (E_{22}^\circ + 1/2 E_{11}^\circ) \\ E_3^\circ &= \sqrt{2} E_{12}^\circ, \quad E_4^\circ = \sqrt{2} E_{33}^\circ, \quad E_5^\circ = \sqrt{2} E_{13}^\circ \end{aligned} \quad (3.1)$$

рассматривая их как компоненты пятимерного вектора, длина которого

$$\sqrt{E_1^{\circ 2} + E_2^{\circ 2} + \dots + E_5^{\circ 2}} = \sqrt{E_{ij}^\circ E_{ij}^\circ} = E_0 \quad (3.2)$$

Величину  $\varepsilon_k^\circ$  будем трактовать как реализации случайного пятимерного вектора  $E_k^\circ$ . В силу описанных ранее свойств случайного тензора  $E_{ij}^\circ$  математическое ожидание этого пятимерного вектора равно нулю, а его плотность вероятности будет функцией только длины вектора его реализаций  $\varepsilon_0$  (3.2). Следовательно [6], вектор  $E_{ij}^\circ$  распределен по нормальному

закону, т. е. его плотность вероятности определится выражением

$$p(\varepsilon_k) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{1}{a^5} \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} \quad (3.3)$$

в котором  $a^2$  — дисперсия, одинаковая для всех  $E_k^0$ .

Задаваясь законом распределения компонент пятимерного вектора  $E_k^0$ , можно вычислить и закон распределения его длины

$$E^0 = \sqrt{E_1^{02} + E_2^{02} + \dots + E_5^{02}} \quad (3.4)$$

Воспользуемся для этого известным выражением для плотности распределения случайной величины  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы ([7] стр. 192). Положив в нем  $k = 5$  и перейдя от случая единичной дисперсии к дисперсии  $a^2$ , получаем

$$p(\varepsilon_0^2) = \frac{1}{2^{5/2} \Gamma(5/2) a^5} \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} \quad (3.5)$$

Из этой формулы, дающей плотность распределения  $\varepsilon_0^2$ , вытекает следующее выражение для плотности распределения  $\varepsilon_0$ .

$$p(\varepsilon_0) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon_0^4}{a^5} \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} \quad (3.6)$$

обобщающее на пятимерные векторы известный закон Рэля, определяющий плотность распределения длины случайного плоского вектора, компоненты которого суть независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения. Подробное изложение теории случайных многомерных векторов со сферической симметрией можно найти в [6].

Для теории, основывающейся на предположении (2.3), плотность распределения интенсивности сил сухого трения  $p(\tau)$  определяется той же формулой (3.6), при замене в ней  $a^2$  на

$$b^2 = (2G)^2 a^2 \quad (3.7)$$

т. е.

$$p(\tau) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tau^4}{b^5} \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} \quad (3.8)$$

Приведенные выше сведения позволяют вычислять математические ожидания и дисперсии любых случайных величин, являющихся функциями случайного тензора  $E_{ij}^0$  и случайного скаляра  $T$ . При этом, хотя формула (3.8) была получена в тесной связи с предположением (2.3), следует пользоваться ею и в других вариантах теории, считая тем самым, что тензор сил сухого трения не имеет ни предпочтительных ориентаций главных осей, ни какого-либо более вероятного, чем другие значения параметра Лоде. В условиях предположения (2.3) инвариант  $\varepsilon_0$  не будет самостоятельным случайным параметром (поскольку он связан с  $\tau$  равенством (2.2)). Последнее надо учитывать при вычислении математических ожиданий или дисперсий случайных величин, зависящих от  $T$  и  $E_{ij}^0$ . В общем случае  $\varepsilon_0$  следует считать независимой случайной величиной, в области ограниченной неравенством (2.2).

Из (3.8) следует, что математическое ожидание интенсивности сил сухого трения (которое может быть истолковано как макроскопический пре-

дел текучести поликристалла, свободного от начальных микронапряжений) определяется выражением

$$\langle T \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b^5} \int_0^{\infty} \tau^5 \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} d\tau = \frac{16}{3\sqrt{2\pi}} b \approx 2.11b \quad (3.9)$$

т. е. оказывается пропорциональным среднеквадратическому отклонению случайного скаляра  $T$  (интенсивности диссипативных сил, сопротивляющихся пластической деформации).

Это обстоятельство постоянно практически используется металловедами, осуществляющими повышение предела текучести сплавов, путем введения в их кристаллические решетки легирующих включений, назначение которых — увеличить разброс локальных пределов текучести относительно их среднего значения, т. е. увеличить дисперсию  $b^2$ .

4. Макроскопически одномерное нагружение тела с начальными микродоформациями. Применим рассматриваемую теорию к случаю одномерной деформации, воспользовавшись при этом уравнениями

$$d\varepsilon_{ij}^p = \tau_{ij} d\lambda, \quad \tau_{ij} = \langle \Sigma_{ij} \rangle - \alpha \varepsilon_{ij}^p, \quad \sqrt{\tau_{ij} \tau_{ij}} = \tau \quad (4.1)$$

и считая, что имеются начальные пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^{p0}$ . Систему (4.1) целесообразно заменить эквивалентной ей системой с пятью независимыми неизвестными  $\varepsilon_k^p$

$$d\varepsilon_k^p = \tau_k d\lambda, \quad \tau_k = \langle \Sigma_k \rangle - \alpha \varepsilon_k^p \quad (4.2)$$

Здесь, следуя А. А. Ильюшину [5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p &= \sqrt{3/2} \varepsilon_{11}^p, & \varepsilon_2^p &= \sqrt{2} (\varepsilon_{22}^p + 1/2 \varepsilon_{11}^p) \\ \varepsilon_3^p &= \sqrt{2} \varepsilon_{12}^p, & \varepsilon_4^p &= \sqrt{2} \varepsilon_{23}^p, & \varepsilon_5^p &= \sqrt{2} \varepsilon_{13}^p \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величина  $\langle \Sigma_k \rangle$  выражается через  $\langle \Sigma_{ij} \rangle$  по формулам, аналогичным (4.3). Нетрудно проверить (если учесть при этом равенство  $\varepsilon_{jj}^p = 0$   $\langle \Sigma_{jj} \rangle = 0$ ), что система (4.1) действительно будет следствием (4.2).

Введем далее еще одну замену переменных

$$\rho_k = \frac{\alpha \varepsilon_k^p}{\tau}, \quad s_k = \frac{\langle \Sigma_k \rangle}{\tau}, \quad t_k = \frac{\tau_k}{\tau} \quad (4.4)$$

Тогда уравнения (4.2) приведутся к следующему, наиболее простому виду:

$$d\rho_k = t_k d\gamma, \quad t_k = s_k - \rho_k \quad (t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_5^2}) \quad (4.5)$$

причем

$$\gamma = \frac{\alpha}{\tau} \lambda \quad (4.6)$$

Применим (4.5) к случаю макроскопически однородного нагружения. При этом

$$s_k = 0 \quad \text{при } k \neq l, \quad s_l = s \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в (4.5), получаем

$$d\rho_l = (s - \rho_l) d\gamma, \quad d\rho_k = -\rho_k d\gamma \quad (k \neq l), \quad t = \sqrt{(s - \rho_l)^2 + \rho_*^2} \quad (4.8)$$

В последней формуле

$$\rho_*^2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_5^2} - \rho_l^2 = \rho^2 - \rho_l^2 \quad (4.9)$$

Из второй формулы (4.8) вытекает, что

$$\rho_k = \rho_{k0} e^{-\gamma} \quad (4.10)$$

где  $\rho_{k0}$  — значения  $\rho_k$  при  $\gamma = 0$ , т. е. в момент начала одноосного пластического нагружения. Из (4.10) следует, что

$$\rho_* = e^{-\gamma} \sqrt{(\rho_{10}^2 + \rho_{20}^2 + \dots + \rho_{50}^2) - \rho_l^2} = \rho_{*0} e^{-\gamma} \quad (4.11)$$

Отсюда

$$d\rho_* = -\rho_* d\gamma \quad (4.12)$$

Теперь интегрирование системы (4.8) сводится к интегрированию системы из двух уравнений

$$d\rho_l = (s - \rho_l) d\gamma, \quad d\rho_* = -\rho_* d\gamma \quad (4.13)$$

при дополнительном условии

$$(s - \rho_l)^2 + \rho_*^2 = 1 \quad (4.14)$$

Полагая в нем  $\rho_l = \rho_{l0}$ ,  $\rho_* = \rho_{*0}$ , получаем два значения

$$s_{10} = \sqrt{1 - \rho_{*0}^2} + \rho_{l0}, \quad s_{20} = -\sqrt{1 - \rho_{*0}^2} + \rho_{l0} \quad (4.15)$$

ограничивающие область значений  $s$

$$s_{10} > s > s_{20} \quad (4.16)$$

в пределах которой деформации упруги, т. е.  $\rho_k = \rho_{k0}$

Система (4.13) легко интегрируется. Ее решение с учетом (4.15) имеет вид:

$$\rho_e = \{s - \rho_{l0} - \text{th} [s - s_0 + \text{arth} (s_0 - \rho_{l0})]\} \times \\ \times \chi [(s - s_0) \text{sign } s_0] + \rho_{l0} \quad (4.17)$$

$$\rho_* = \left\{ \frac{1}{\text{ch} [s - s_0 + \text{arth} (s_0 - \rho_{l0})]} - \rho_{*0} \right\} \times \chi [(s - s_0) \text{sign } s_0] + \rho_{*0}$$

где  $\chi(x)$  — функция Хевисайда

$$\chi(x) = 1(x > 0), \quad \chi(0) = 0 \quad (x < 0)$$

Из второй формулы (4.17), (4.10) и (4.11) следует, что

$$\rho_k = \left\{ \frac{\rho_{k0}}{\rho_{*0} \text{ch} [s - s_0 + \text{arth} (s_0 - \rho_{l0})]} - \rho_{k0} \right\} \times \chi [(s - s_0) \text{sign } s_0] + \rho_{k0} \quad (k \neq l) \quad (4.18)$$

Решение (4.17), (4.18) объединяет оба случая:  $s_0 = s_{01}$  и  $s_0 = s_{0,2}$  при условии, что ни одно из граничных значений не равно нулю. Последний случай возможен и для дальнейшего будет существенным. Напомним, что ранее (в предыдущем пункте) было предположено, что интенсивность начальных случайных микронапряжений в каждой точке тела равна локальному пределу текучести. Этому соответствует равенство  $\rho_0^2 = 1$ , при котором

$$s_{01} = |\rho_{l0}| + \rho_{l0}, s_{02} = -|\rho_{l0}| + \rho_{l0} \quad (4.19)$$

Отсюда,  $s_{02}$  при  $\rho_{l0} > 0$  и  $s_{01} = 0$  при  $\rho_{l0} < 0$ .

Нетрудно, однако, заметить, что в этом случае формулы (4.17) (4.18) должны быть изменены следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \{s - \rho_{l0} - \text{th}[s - \text{arth} \rho_{l0}] \times \chi - s \text{sign} \rho_{l0}\} + \rho_{l0} \\ \rho_k &= \left\{ \frac{\rho_{k0}}{\rho_{*0} \text{ch}[s - \text{arth} \rho_{l0}]} - \rho_{k0} \right\} \times \chi [-s \text{sign} \rho_{l0}] + \rho_{k0} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Полученные выше формулы решают первую часть задачи об одномерном нагружении тела с начальными упругими микродеформациями, а именно, они выражают локальные пластические деформации через макроскопические напряжения и локальное значение упругих микродеформаций, т. е. определяют одну из возможных реализаций пластической деформации в поликристалле. Для того чтобы найти макроскопическую пластическую деформацию, надо решить и вторую часть задачи, а именно, зная закон распределения начальных микродеформаций (3.2) и зависимость от них локальных пластических деформаций, выражаемую формулами (4.17), (4.18), (4.20), вычислить математическое ожидание пластической деформации.

Воспользуемся известным выражением для математического ожидания величин, зависящих от компонент случайного вектора

$$\langle E_j^p \rangle = \iiint \varepsilon_j^p p(\varepsilon_k^0) d\varepsilon_1^0 d\varepsilon_2^0 \dots d\varepsilon_5^0 \quad (4.21)$$

Подставив сюда вместо  $p(\varepsilon_k^0)$  выражение (3.3), а вместо  $\varepsilon_k^0$  и  $\varepsilon_j^p$

$$\varepsilon_k^0 = \frac{\tau}{2G} \rho_k^0, \quad \varepsilon_j^p = \frac{\tau}{\alpha} \rho_j \quad (4.22)$$

и учитывая, согласно допущению (2.3)

$$\rho_0^2 = \sqrt{\rho_{10}^2 + \rho_{20}^2 + \dots + \rho_{50}^2} = 1 \quad (4.23)$$

получим

$$\langle E_j^p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{1}{b^5} \frac{1}{\alpha} \iiint \tau \rho_j \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} d(\tau \rho_{10}) d(\tau \rho_{20}) \dots d(\tau \rho_{50}) \quad (4.24)$$

Здесь интегрирование выполняется по всем  $\tau \rho_{k0}$  в пределах от 0 до  $\infty$ ;  $b^2$  — дисперсия интенсивности тензора сил сухого трения (3.7).

При фактическом вычислении интегралов (4.24) следует пользоваться сферическими координатами в пятимерном пространстве  $\rho_{k0}$ , полагая

$$\begin{aligned} \rho_{1,0} &= \cos \theta_1, \quad \rho_{2,0} = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \rho_{3,0} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \rho_{4,0} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4, \quad \rho_{5,0} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (4.25)$$

При этом  $\tau$  играет роль радиуса-вектора этой сферической системы координат. Новые координаты имеют следующие диапазоны изменения:

$$0 \leq \tau \leq \infty, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_4 \leq 2\pi \quad (4.26)$$

в пределах которых существует однозначное соответствие между всеми точками пятимерного евклидова пространства и криволинейными координатами. Якобиан данной сферической системы координат

$$J = \tau^4 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 \quad (4.27)$$

и, следовательно, формула (4.24) в координатах  $\tau, \theta_k$  записывается следующим образом:

$$\langle E_j^p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{1}{b^5} \frac{1}{\alpha} \times \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_j \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} \tau^5 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\tau d\theta_1 \dots d\theta_4 \quad (4.28)$$

Это выражение может быть использовано для вычисления математических ожиданий пластических деформаций как в рассмотренном выше частном случае одномерного нагружения, так и для других видов нагружения. Остановимся в заключение на определении математического ожидания  $E_{ij}^p$  в общем случае, когда вместо равенства  $\rho_0 = 1$  принимается неравенство  $\rho_0 \leq 1$ .

Тогда  $E_0$  оказывается независимым от  $T$  случайным параметром, ограниченным сверху неравенством  $E_0 \leq T/2G$ . Последнее ограничение математически эквивалентно требованию, чтобы в области  $E_0 > T/2G$  совместная плотность распределения  $E_k$  и  $T$  равнялась нулю. Введя опять сферические координаты в пятимерном пространстве  $E_k^0$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle E_k^p \rangle &= \frac{2}{9\pi} \frac{1}{a^5 b^5} \int_0^\infty \tau^4 \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} d\tau \int_0^{\tau/2G} \varepsilon_0^4 \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} d\varepsilon_0 \times \\ &\times \int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} \varepsilon_k^p d\theta_4 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Формально для получения (4.28) из (4.29) надо положить

$$p(\varepsilon_0) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon_0^4}{a^5} \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} \div \delta \left( \frac{\tau}{2G} - \varepsilon_0 \right) \quad (4.30)$$

Здесь  $\delta$  — функция Дирака

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0), \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.31)$$

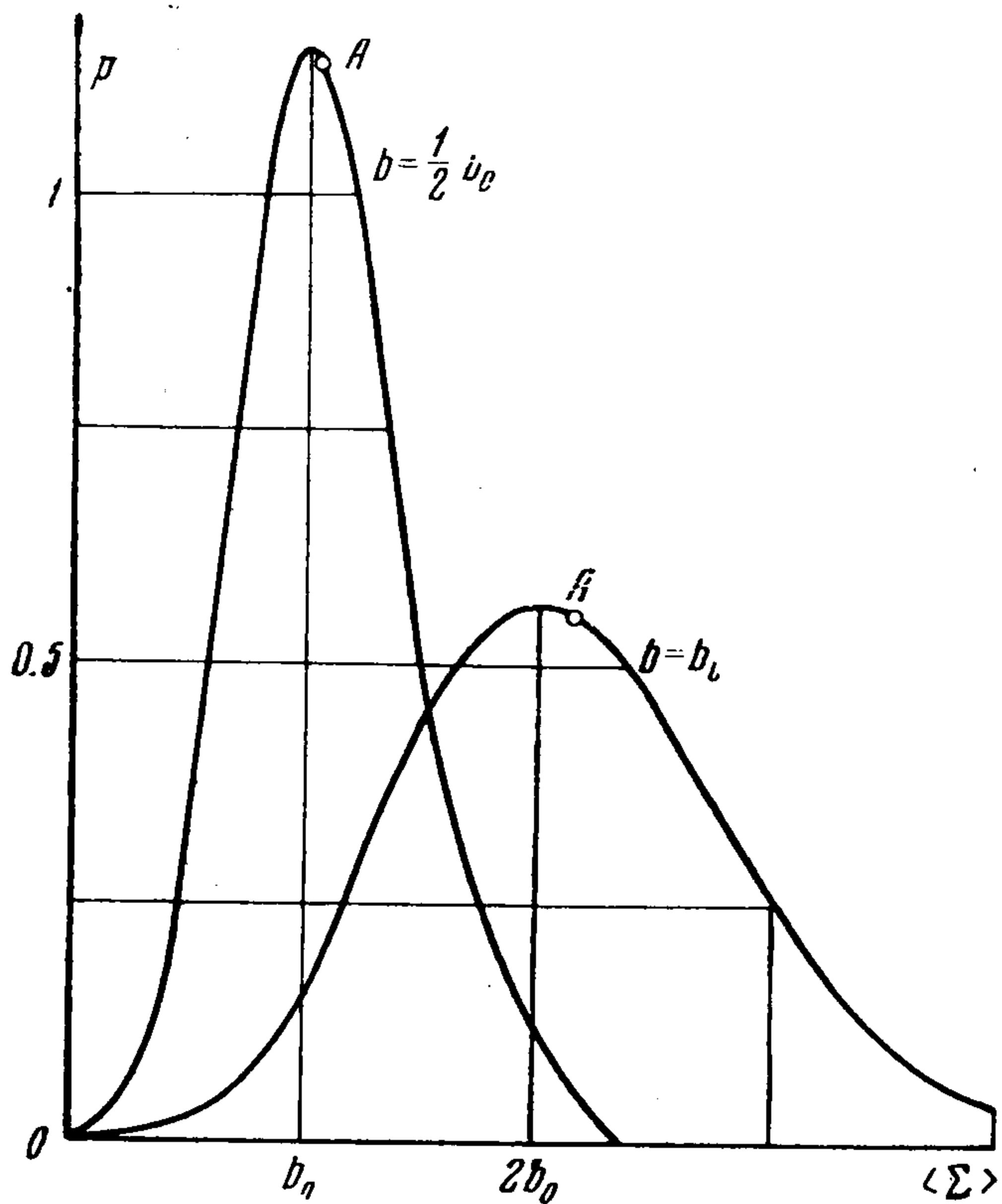
так как именно такая замена означает, что вероятно только значение  $\varepsilon_0$ , совпадающее с  $\tau/2G$ .

5. Математическое ожидание пластической деформации поликристалла свободного от начальных микронапряжений. Начнем исследование результатов теории с наиболее простого частного случая, а именно предположим, что начальных микронапряжений нет. В таком случае  $\varepsilon_l^p$

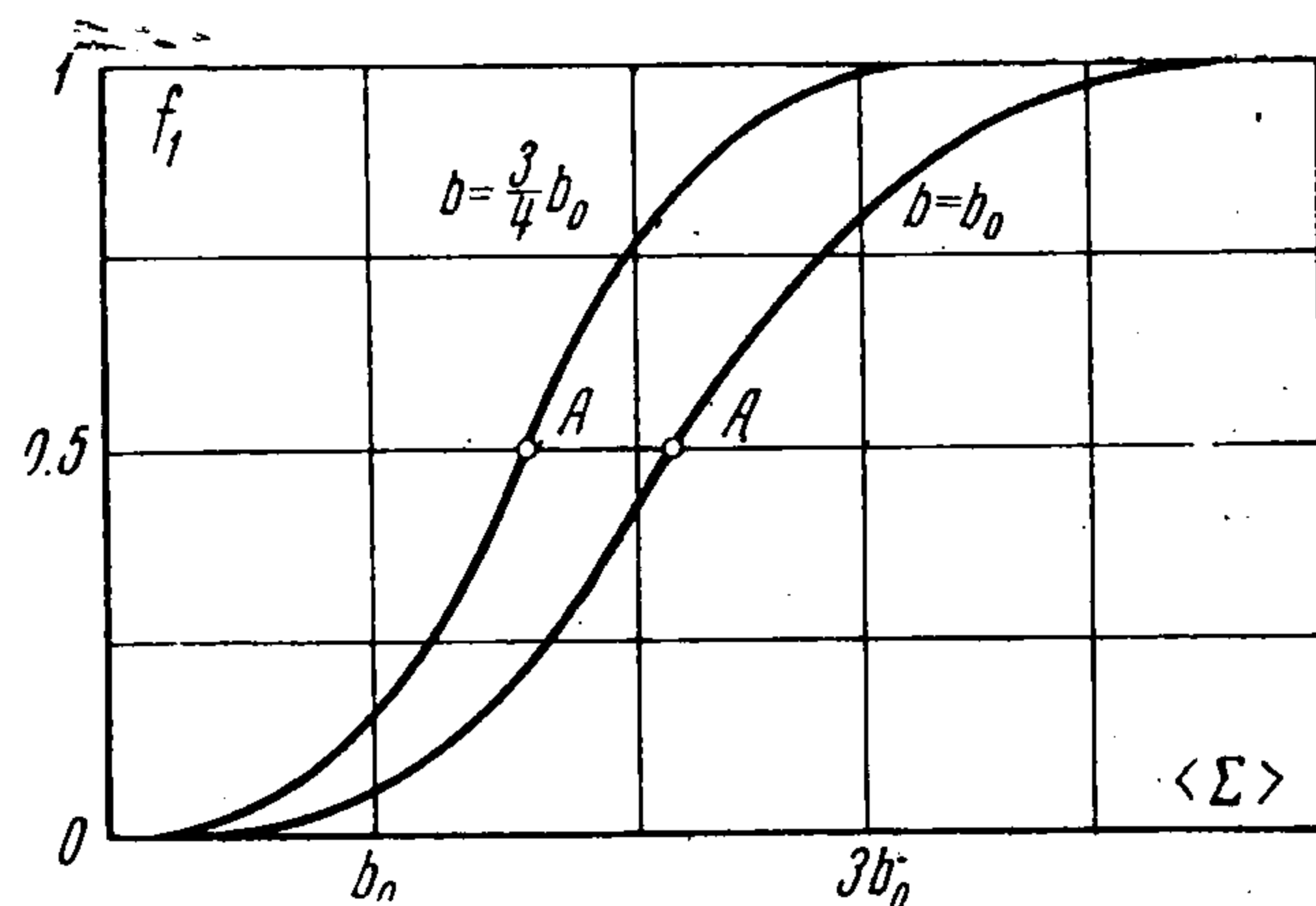
будут функциями только скалярного параметра  $\tau$ , в соответствии с чем

$$\langle E_l^p \rangle = \int_0^\infty \varepsilon_l^p(\tau) p(\tau) d\tau \quad (5.1)$$

где  $p(\tau)$  определяется формулой (3.9).



Фиг. 1



Фиг. 2

Полученное в предыдущем параграфе решение остается справедливым и при  $\rho_{k0} = 0$ , при этом  $s_{10} = +1$ ,  $s_{20} = -1$ . Отсюда

$$\rho_l = (s - \text{sign } s_0) \chi [(s - s_0) \text{sign } s_0], \quad \rho_k = 0 \quad (k \neq l) \quad (5.2)$$

Возвращаясь здесь к первоначальным обозначениям и полагая, для определенности  $s_0 = +1$ , т. е. считая  $s > 0$ , получаем

$$\varepsilon^p = \frac{1}{\alpha} (\langle \Sigma \rangle - \tau) \chi (\langle \Sigma \rangle - \tau) \quad (5.3)$$

Здесь, для простоты написания дальнейших формул, опущены индексы  $l$  у  $\varepsilon_l^p$  и  $\langle \Sigma_l \rangle$ .

Подставив (5.3) в (5.1), приходим к следующей формуле, выражающей зависимость между математическими ожиданиями напряжений и пластических деформаций в случае одномерного нагружения

$$\langle E^p \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\langle \Sigma \rangle} (\langle \Sigma \rangle - \tau) p(\tau) \alpha \tau \quad (5.4)$$

Продифференцировав (5.4) по  $\langle \Sigma \rangle$ , имеем

$$\frac{d \langle E^p \rangle}{d \langle \Sigma \rangle} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\langle \Sigma \rangle} p(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что

$$\langle E^p \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\langle \Sigma \rangle} d\tau \int_0^\tau p(\xi) d\xi \quad (5.6)$$

т. е. математическое ожидание пластической деформации при отсутствии начальных микронапряжений оказывается пропорциональным двукратному интегралу от плотности распределения предела текучести. На фиг. 1—3 показаны кривые, изображающие

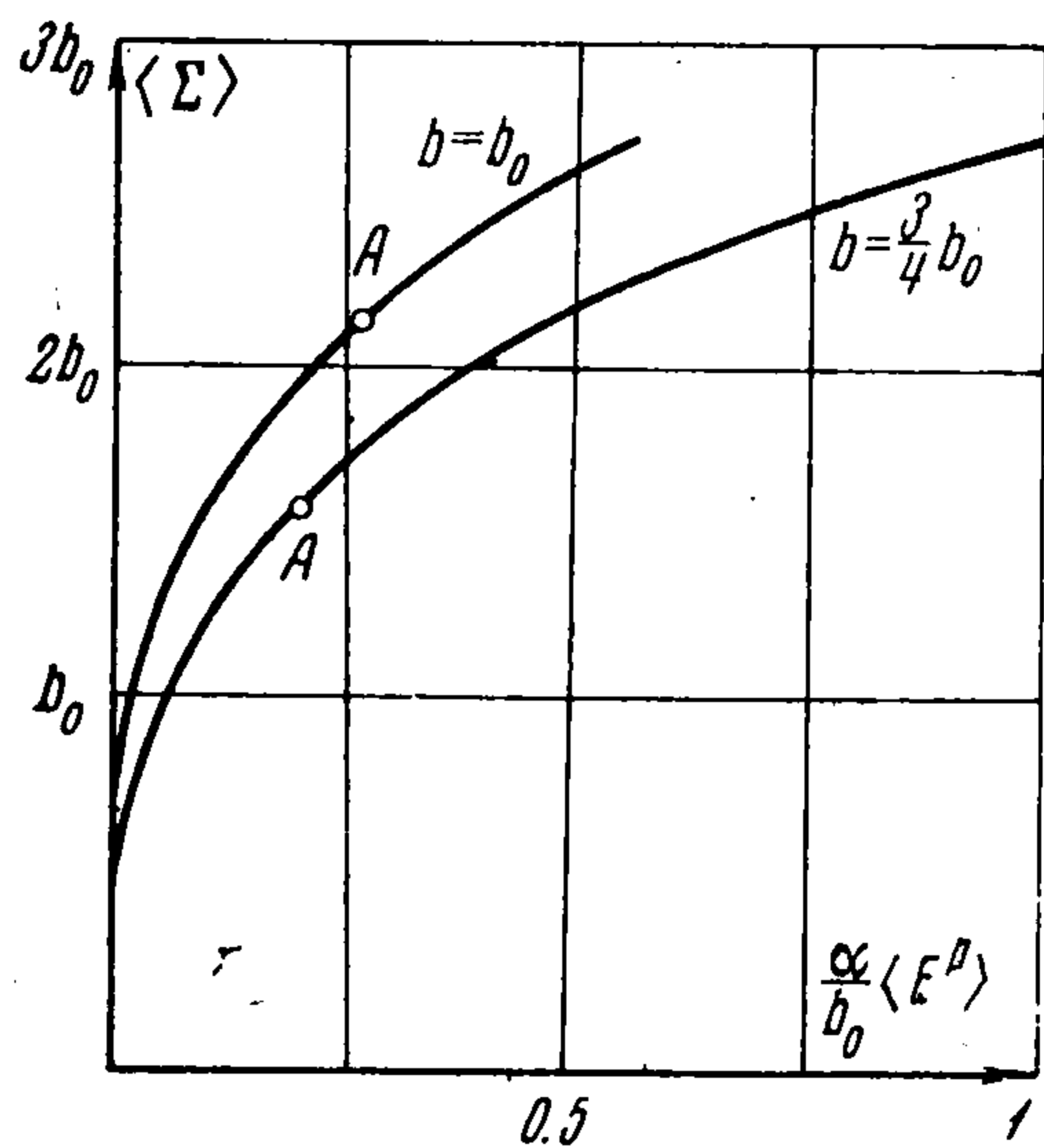
$$p(\langle \Sigma \rangle) = \frac{d^2 \langle E^p \rangle}{d \langle \Sigma \rangle^2} \alpha, \quad f_1(\langle \Sigma \rangle) = \alpha \frac{d \langle E^p \rangle}{d \langle \Sigma \rangle}$$

$$\langle \Sigma \rangle = f_2(\alpha \langle E^p \rangle)$$

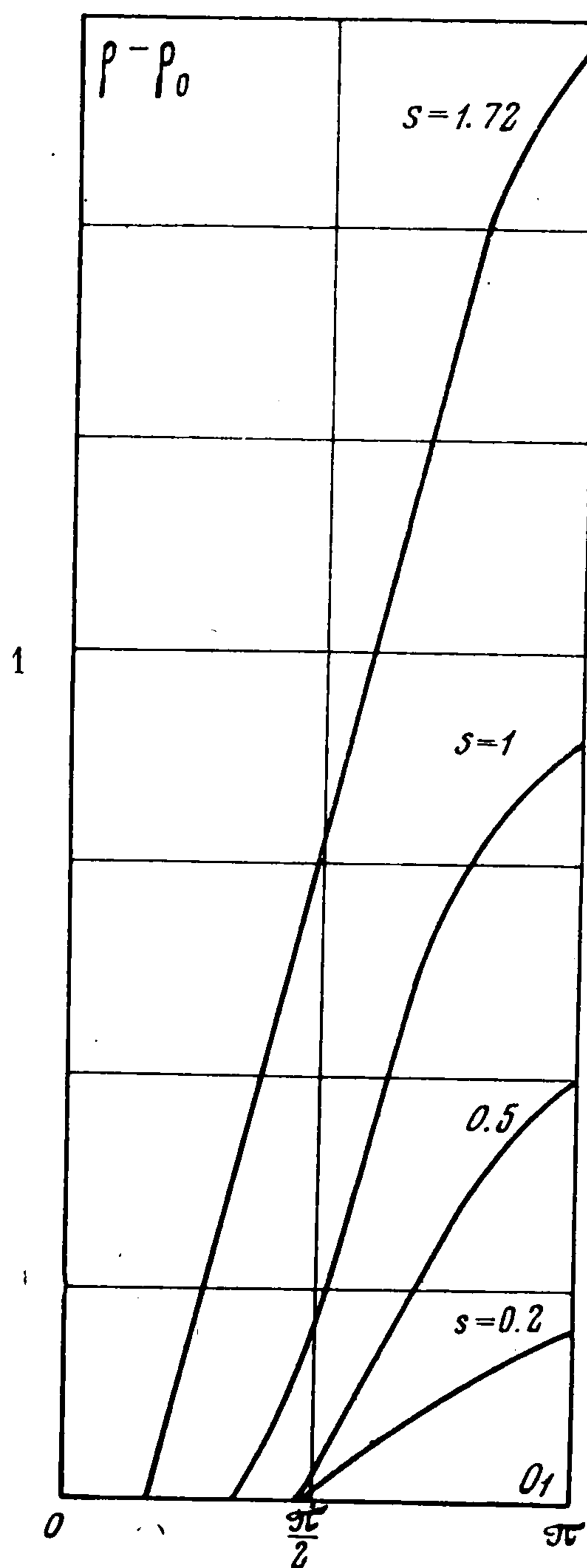
при двух различных значениях дисперсии  $b^2$ . Точками *A* на этих кривых отмечены значения, соответствующие  $\langle \Sigma \rangle = \langle T \rangle$ , т. е. математическому ожиданию предела текучести, которое, как уже было отмечено ранее для микронеоднородных тел, следует рассматривать как эффективный предел текучести материала. Из формул (5.5), (5.4) вытекает, что кривая  $\langle \Sigma \rangle = f_2(\alpha \langle E^p \rangle)$  имеет асимптоту

$$\langle \Sigma \rangle = \alpha \langle E^p \rangle + \langle T \rangle$$

Наклон этой прямой определяется параметром  $\alpha$ , играющим роль модуля упрочнения, а ее начальная ордината равна математическому ожиданию предела текучести. Кривые фиг. 3 достаточно хорошо похо-



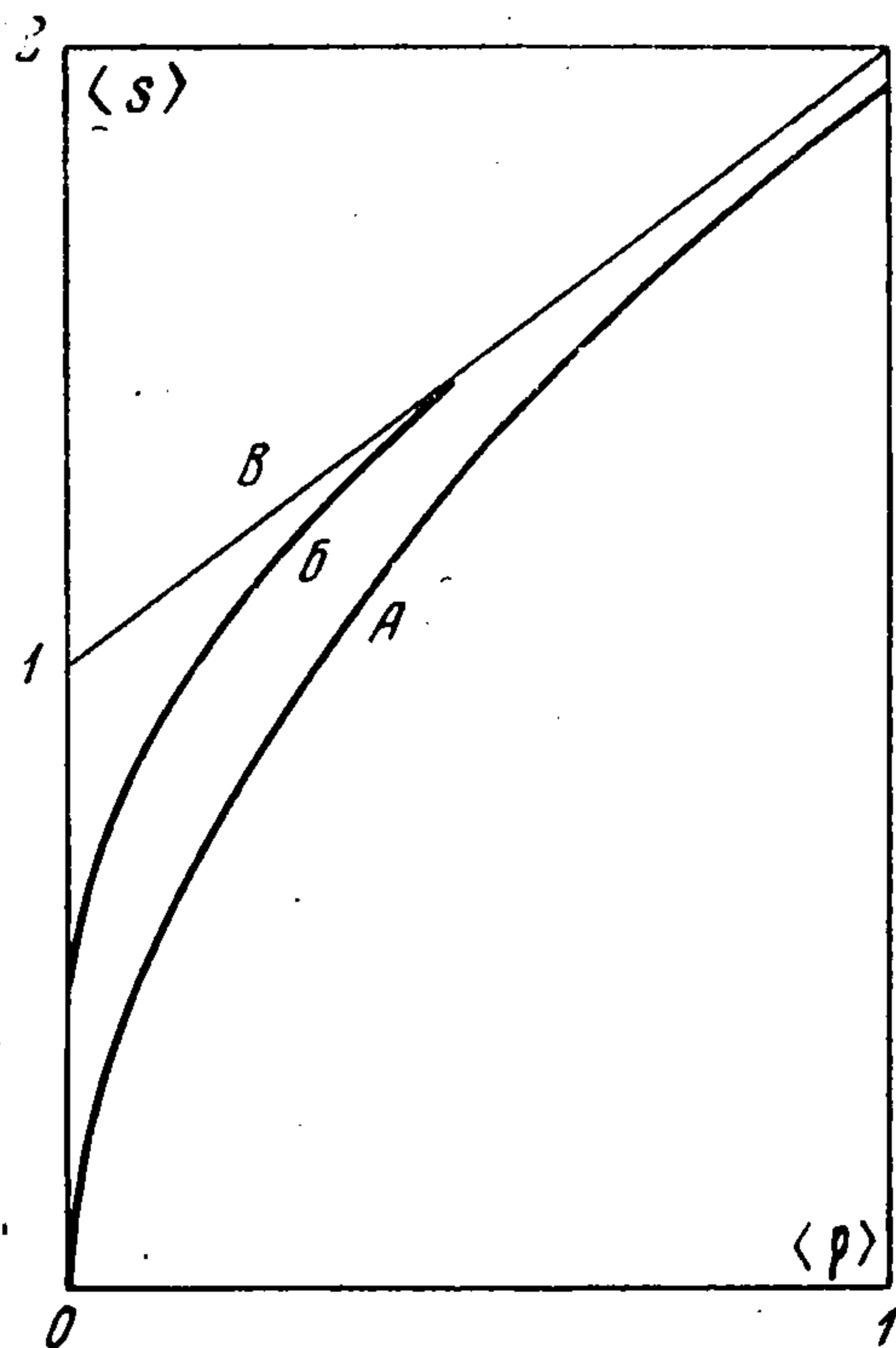
Фиг. 3



Фиг. 4

жи на экспериментальные кривые  $\langle \Sigma \rangle = f(\langle E^p \rangle)$  для материалов, не имеющих площадки текучести, что свидетельствует о том, что закон распределения (3.8) будет удовлетворительной аппроксимацией к истинному закону распределения локальных пределов текучести в реальных поликристаллических материалах указанного типа.

6. Математическое ожидание пластической деформации поликристалла с начальными микронапряжениями (упрощенный вариант теории). В основу предшествующих рассуждений было положено предположение, что компоненты начальных микродеформаций  $E_k^0$  суть независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения. После



Фиг. 5

ряда рассуждений и выкладок это привело к формулам (4.28) и (4.29), определяющим осредненные пластические деформации при условии (2.3) или (2.2). Рассмотрим упрощенный вариант этой теории, основывающийся на приближенной замене плотности распределения интенсивности сухого трения  $p(\tau)$  (3.8) и плотности интенсивности упругих начальных микродеформаций  $p(\varepsilon_0)$  (4.30) выражениями

$$p(\tau) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tau^4}{b^5} \exp \frac{-\tau^2}{2b^2} \approx \delta(\tau - \langle T \rangle) \quad (6.1)$$

$$p(\varepsilon_0) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon_0^4}{a^5} \exp \frac{-\varepsilon_0^2}{2a^2} \approx \delta(\varepsilon_0 - \langle E_0 \rangle)$$

Использование приближенных формул (6.1) означает, что при вычислении случайных величин, зависящих от  $\tau$  и  $\varepsilon_0$ , все реализации этих последних величин в первом приближении отождествляются с их математическими ожиданиями. Подставив (6.1) взамен соответствующих членов подынтегрального выражения (4.29) или (4.28), получаем:

лизации этих последних величин в первом приближении отождествляются с их математическими ожиданиями. Подставив (6.1) взамен соответствующих членов подынтегрального выражения (4.29) или (4.28), получаем:

$$\langle E_k^p \rangle = \iiint \varepsilon_k^p \delta(\tau - \langle T \rangle) \delta(\varepsilon_0 - \langle E_0 \rangle) \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\tau d\varepsilon_0 d\theta_1 \dots d\theta_4 \quad (6.2)$$

Эта формула существенно проще общих соотношений (4.29). Тем не менее она позволяет выявить ряд интересных черт предлагаемой теории.

Воспользуемся результатами, полученными ранее для случая одномерного нагружения и, подставив их в (6.2), получим:

$$\langle E_k^p \rangle = 0 \quad \text{при } k \neq l, \quad \langle E_l^p \rangle = \frac{3}{4} \int_0^\pi \varepsilon_e^p \sin^3 \theta_1 d\theta_1$$

где  $\varepsilon_l^p$  определяется формулами (4.4) и (4.7).

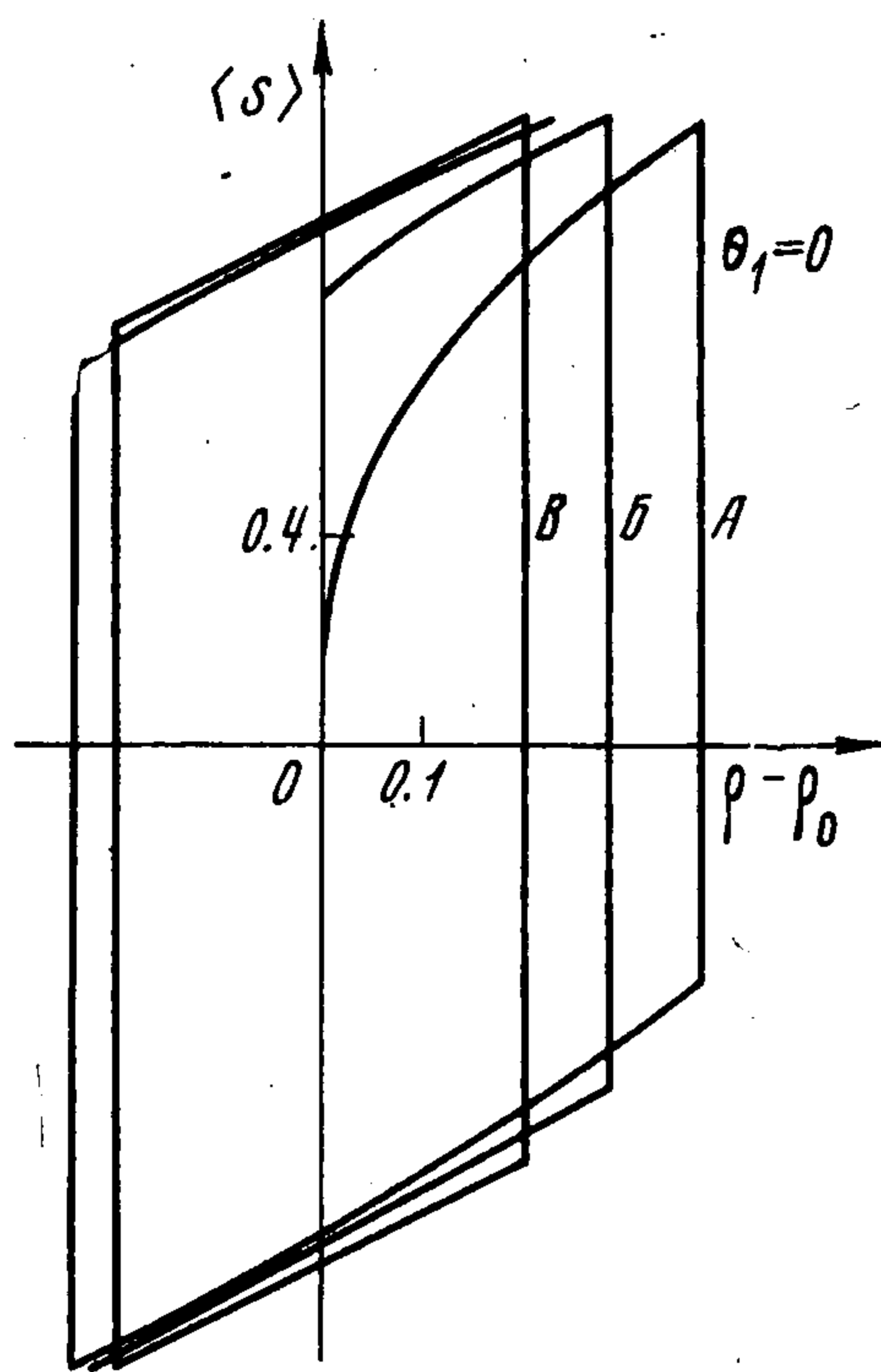
На фиг. 4 приведены типичные кривые развития локальных пластических деформаций (графики построены в зависимости от угла  $\theta_1$  при  $2G\varepsilon_0 / \tau = 1$ ). Следует обратить внимание на то, что зависимость  $\varepsilon_l^p$  от  $\theta_1$  оказывается близкой к линейной, что значительно упрощает вычисление  $\langle E_l^p \rangle$ .

На фиг. 5 показаны графики  $\langle \Sigma \rangle = f(\langle E^p \rangle)$  для трех случаев

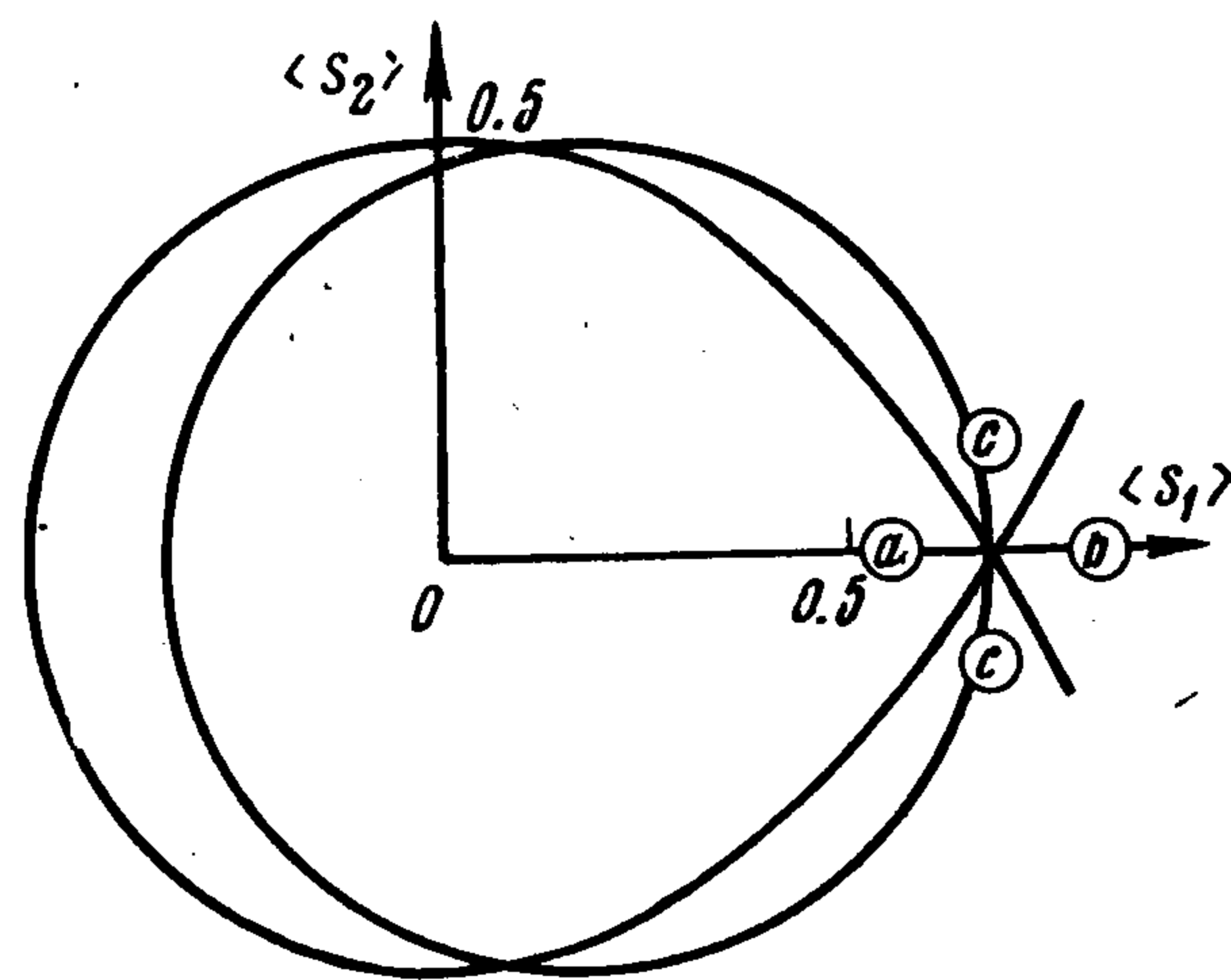
$$(A) \frac{2G \langle E_0 \rangle}{\langle T \rangle} = 1, \quad (B) \frac{2G \langle E_0 \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{1}{2}, \quad (B) \frac{2G \langle E_0 \rangle}{\langle T \rangle} = 0$$

Из этих кривых видно, что величина  $\langle E_0 \rangle$  (математическое ожидание интенсивности начальных микродеформаций) существенно влияет на характер упрочнения. Возрастание  $\langle E_0 \rangle$  (при фиксированном значении  $\langle T \rangle$ ) приводит к более раннему появлению пластических деформаций и более медленному их стремлению к асимптоте. Соответственно, чем больше  $\langle E_0 \rangle$ , тем длительнее оказывается процесс стабилизации петли гистерезиса при циклическом деформировании (фиг. 6).

На фиг. 7 изображены поверхности текучести, соответствующие случаям (Б) и (В). При отсутствии начальных микродеформаций и принятых выше упрощающих предположениях поверхность текучести смещается как твердое целое согласно основному варианту трансляционной теории течения [8]. При наличии же начальных упругих микродеформаций форма и размеры границы текучести оказываются зависящими от предшествующей пластической деформации, причем в процессе пластического деформирования на границе текучести образуются угловые точки. Эти заострения не носят, однако, столь резкого характера, как в теории скольжения [9]. Кроме того, анализ расчетов, выполненных для рассматриваемого варианта теории, показал, что в окрестности угловых точек надо различать три зоны *a*, *b* и *c* (фиг. 7). Зона *a* является областью упругих деформаций. В зоне *b* направление приращения пластической деформации не зависит от приращений напряжений аналогично тому, как это принимается в теории течения. Последнее, однако, не имеет места в зонах *c*, где направление вектора  $d \langle E_k^p \rangle$  зависит не только от  $\langle \Sigma_k \rangle$ , но и от  $d \langle \Sigma_k \rangle$ . Зоны *c* оказываются, таким образом, переходными: в них закономерности пластического деформирования постепенно изменяются от тех, какие принимаются в теории течения до закономерностей теории упругости (в зависимости от направления вектора  $d \langle \Sigma_1 \rangle$ ,  $d \langle \Sigma_2 \rangle$ ). Последнее весьма затрудняет экспериментальное обнаружение угловых точек рассматриваемого типа. В случае (А), когда имеем  $2G \langle E_0 \rangle / \langle T \rangle = 1$ , пластические деформации изменяются при любых изменениях напряжений и понятие поверхности текучести, в точном смысле этого слова, как уже отмечалось ранее, исчезает.



Фиг. 6



Фиг. 7

**7. Заключение.** Приведенные выше кривые, выражающие зависимость  $\langle E^p \rangle$  от  $\langle \Sigma_1 \rangle$ , были построены для трех различных соотношений между  $2G \langle E_0 \rangle$  и  $\langle T \rangle$ , исходя из упрощенной теории, основанной на замене всех реализаций случайных величин  $E_0$  и  $T$  их математическими ожиданиями. Упомянутые кривые дают качественное представление о влиянии начальных упругих микродеформаций на связь между макроскопическими напряжениями и пластическими деформациями. Более точное суждение об этом влиянии можно было бы получить не прибегая к указанному упрощению, а непосредственно пользуясь общими формулами (4.28), (4.29), что, однако, связано с более громоздкими вычислениями. Соответствующие сведения будут

приведены в подготавливаемой к печати работе авторов, посвященной применению рассмотренной теории к циклическим нагружениям. Нетрудно предвидеть, что для монотонного одномерного нагружения общая теория будет давать результаты, отличающиеся от приведенных выше приближенных результатов следующим образом.

1. Граница текучести в точном смысле этого слова будет отсутствовать при любых соотношениях  $\langle E_0 \rangle$  и  $\langle T \rangle$ , а не только при  $2G \langle E_0 \rangle = \langle T \rangle$ , как это было получено выше.

Понятие границы текучести может быть введено в общую теорию только путем задания некоторого допуска  $\Delta$  на величину  $\langle E^p \rangle$ , начиная с которого макроскопические пластические деформации принимаются во внимание, как это и делается на практике.

2. С возрастанием отношения  $2G \langle E_0 \rangle : \langle T \rangle$  условный предел текучести  $\langle \Sigma \rangle$  (т. е. значение макроскопических напряжений, при котором  $\langle E^p \rangle$  достигает величины  $\Delta$ ) понижается, а кривая  $\langle \Sigma \rangle = f(\langle E^p \rangle)$  медленнее стремится к своей асимптоте. Оба эти эффекта качественно сохранились и в изложенной выше приближенной теории, однако в более резкой форме.

По мнению авторов, предлагаемая квазистатическая теория пластичности представляет наибольший интерес для анализа картины деформирования при циклических нагрузках, где она позволяет дать истолкование ряда тонких эффектов, наблюдаемых при опытах и может быть использована для классификации материалов (с точки зрения их реакции на циклические нагрузки). Кроме того, эта теория может оказаться полезной и для приближенной оценки влияния начальных и деформационных микронапряжений на прочность материалов, так как она открывает возможность судить о математическом ожидании и о дисперсии интенсивности начальных микронапряжений и об изменении этих величин в процессе пластического деформирования (на основании экспериментально наблюдаемых кривых, связывающих макроскопические напряжения и деформации).

Поступила 10 VI 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К а д а ш е в и ч Ю. И., Н о в о ж и л о в В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
2. L i n T. N., I t o M. Latent elastic strain energy due to the residual stresses in a plastically deformed polycrystal. J. Appl. Mech. Trans. ASME, ser. E, 1967, vol. 34, No. 3.
3. Я г н Ю. И., Ш и ш м а р е в О. А. Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 1.
4. B e s s e l i n g J. F. A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material. Nat. Lucht. Lab. Amsterdam Rep. S-410, 1953.
5. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963.
6. Б л о х Э. Л. Случайный вектор со сферической симметрией. Изв. АН СССР, ОТН Энергетика и автоматика, 1960, № 1.
7. Х у д с о н Д. Статистика для физиков. М., «Мир», 1967.
8. И ш л и н с к и й А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3.
9. B a t d o r f S. B., B u d i a n s k y В. А. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. NASA. T. N. 1871, 1949.