Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

БЕСКОНЕЧНЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ И ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА

Г. М. Валов

(Кострома)

Задача о давлении осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство и слой рассматривалась в [1,2]. В этих работах граничная задача теории упругости сведена к линейному интегральному уравнению второго рода с ядром, заданным на множестве бесконечной меры. В работе [3] задача о давлении кольцевого штампа на упругий слой путем приближенной замены ядра интегрального уравнения первого рода сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Нормальные напряжения под штампом выражены через производную решения этого уравнения. В работах [4,5] задача о давлении осесимметричного кольцевого штампа а полупространство решалась приближенными методами.

Решается осесимметричная задача о давлении кольцевого штампа на бесконечный упругий слой и полупространство и задача о кручении упругого слоя и полупространства под действием сцепленного с ним жесткого штампа. Помимо штампа, полупространство и слой находятся под влиянием стационарного температурного поля. Решения граничных задач представлены в виде интегралов, содержащих неизвестную функцию, которая определяется тройными интегральными уравнениями, при этом задачи о давлении штампа сводятся к одному типу тройных интегральных уравнений, а задачи о кручении — к другому типу тройных уравнений. Решения как первого, так и второго типа тройных интегральных уравнений представлены в виде интегралов, содержащих две вспомогательные функции, которые, будучи заданными на смежных промежутках, образуют одну разрывную функцию. Эта функция находится из интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Находится закон распределения напряжений под штампом, при этом указанные напряжения непосредственно выражаются через решение уравнения Фредгольма.

1. Уравнения Дюгамеля — Неймана для случая осесимметричной термоупругой деформации тела имеют вид

$$(1-\sigma)\frac{\partial\theta}{\partial r}+(1-2\sigma)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=\alpha(1+\sigma)\frac{\partial T}{\partial r}$$
$$(1-\sigma)\frac{\partial\theta}{\partial z}-(1-2\sigma)\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right]=\alpha(1+\sigma)\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (1.1)$$

Здесь θ — объемная деформация, σ — коэффициент Пуассона, T — температура тела, α — постоянный коэффициент линейного расширения от температуры, u_r, u_z — проекции вектора перемещения в цилиндрической системе координат r, φ, z. Решение уравнений (1.1) представляется в виде [6]

$$u_r=\frac{-1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial r}(z\delta_3+\delta_1),\qquad u_z=\delta_3-\frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(z\delta_3+\delta_2) \qquad (1.2)$$

где δ_3— произвольная гармоническая функция, δ_1 и δ_2 — гармонические функции, связанные с температурой соотношением

$$\frac{\partial^2 (\delta_2 - \delta_1)}{\partial z^2} = 8\alpha (\sigma^2 - 1) T \tag{1.3}$$

при этом температура T предполагается гармонической функцией. Компоненты тензора напряжения, соответствующие формулам (1.2), таковы:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{-G}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[z\delta_3 + \delta_2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\delta_2 - \delta_1)\right] + \frac{G(2-\sigma)}{1-\sigma}\frac{\partial \delta_3}{\partial z} - \beta T \\
\sigma_r &= \frac{-G}{2(1-\sigma)}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(z\delta_3 + \delta_1) + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial^2(\delta_2-\delta_1)}{\partial z^2} - 2\sigma\frac{\partial \delta_3}{\partial z}\right] - \beta T \\
\sigma_\varphi &= \frac{-G}{2(1-\sigma)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(z\delta_3 + \delta_1) + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial^2(\delta_2-\delta_1)}{\partial z^2} - 2\sigma\frac{\partial \delta_3}{\partial z}\right] - \beta T \\
\tau_{rz} &= \frac{-G}{4(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}(2z\delta_3 + \delta_1 + \delta_2) + G\frac{\partial \delta_3}{\partial r} \qquad \left(\beta = \frac{2\alpha(1+\sigma)G}{1-2\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь G — модуль сдвига.

Формулы (1.2) и (1.4) используются для решения рассматриваемых ниже контактных задач для бесконечного упругого слоя и полупространства. В случае бесконечного слоя гармонические функции, входящие в эти формулы, возьмем в виде

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^{+\infty} [A_3(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda z + A_4(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda z]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \\
\delta_2 &= \int_0^{+\infty} [A_1(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda z + A_2(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda z]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \\
\delta_3 &= \int_0^{+\infty} [A_5(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda z + A_6(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda z]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \ldots, A_6(\lambda)$ — неизвестные функции, которые определяются из условия связи (1.3) и из граничных условий.

Температуру $T(r, z)$, как заданную функцию, будем в дальнейшем предполагать как решение некоторой граничной задачи для уравнения Лапласа для слоя $-l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant r < +\infty$. Поэтому считаем ее представимой несобственным интегралом

$$T(r, z) = \int_0^{+\infty} [C_1(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda z + C_2(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda z]\, J_0(\lambda z)\, d\lambda \tag{1.6}$$

где функции $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из граничных условий, т. е. из условий температурного режима на граничных плоскостях $z = \pm l$. Условие связи (1.3) дает следующую зависимость между неизвестными функциями:

$$A_1(\lambda) = A_3(\lambda) - \frac{\gamma}{\lambda^2} C_1(\lambda), \qquad A_2(\lambda) = A_4(\lambda) - \frac{\gamma}{\lambda^2} C_2(\lambda) \tag{1.7}$$

$$\gamma = \frac{4\beta}{G}(1-2\sigma)(1-\sigma)$$

В случае полупространства гармонические функции, входящие в формулы (1.2), возьмем в виде

$$\delta_1 = \int_0^{+\infty} A_1(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda, \qquad \delta_2 = \int_0^{+\infty} A_2(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$
$$\delta_3 = \int_0^{+\infty} A_3(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{1.8}$$

а температуру считаем представимой несобственным интегралом

$$T(r, z) = \int_0^{+\infty} C(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{1.9}$$

где функция $C(\lambda)$ определяется из условий температурного режима на границе полупространства $z \geqslant 0$. Условие связи (1.3) дает такую зависимость между неизвестными функциями $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$

$$A_1(\lambda) = A_2(\lambda) + \frac{\gamma}{\lambda^2} C(\lambda) \tag{1.10}$$

2. Рассматриваемые ниже граничные задачи приводятся к следующим тройным интегральным уравнениям [1]:

$$\int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = F_1(r) \qquad (0 \leqslant r < a) \tag{2.1}$$

$$\int_0^{+\infty} A(\lambda)[1 - g(\lambda)] J_0(\lambda r)\, d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \tag{2.2}$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (R < r < +\infty) \tag{2.3}$$

Здесь $A(\lambda)$ — неизвестная функция, а $g(\lambda)$, $F_1(r)$ и $F_2(r)$ — заданные функции. Считаем, что функция $g(\lambda)$ непрерывна, а $\lambda^2 g(\lambda)$ абсолютно интегрируема на $[0, +\infty)$; функция $F_1(r)$ такова, что интеграл

$$(a^2 - t^2)^{1/4} \int_0^t \frac{rF_1(r)\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \qquad (0 \leqslant t \leqslant a)$$

обращается в нуль при $t = 0$ и является функцией, суммируемой с квадратом.

Ищем решение тройных интегральных уравнений в виде

$$A(\lambda) = \int_0^a \varphi_1(t) \sin \lambda t\, dt + \int_a^R \varphi_2(t) \cos \lambda t\, dt + \int_R^{+\infty} \varphi_3(t) \cos \lambda t\, dt \tag{2.4}$$

при этом предполагается, что

$$\lim_{t\to a} \varphi_1(t)(t - a) = \lim_{t\to a} \varphi_2(t)(t - a) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_3(+\infty) = 0 \tag{2.5}$$

---

[1] Решаемые здесь интегральные уравнения при $q(\lambda) = 0$ и $F_1(r) = 0$ рассматривались Куком [7] и Трантером [8]. Ядро полученного Куком интегрального уравнения второго рода имеет несуммируемый квадрат. Поэтому вопрос о существовании решения уравнений остался открытым. В работе же Трантера тройные интегральные уравнения сведены к эквивалентной проблеме дуальных рядовых уравнений.

Здесь $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ — неизвестные функции, которые должны быть найдены при подстановке функции (2.4) в уравнения (2.1)— (2.3). Выполнив интегрирование по частям, получим

$$A(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\Big\{\int_0^a \varphi_1'(t)\,[\cos\lambda t-\cos\lambda a]\,dt+\varphi_2(R)\,[\sin\lambda R-\sin\lambda a]-$$

$$-\int_a^R \varphi_2'(t)\,[\sin\lambda t-\sin\lambda a]\,dt-\varphi_3(R)\sin\lambda R-\int_R^{+\infty}\varphi_3'(t)\sin\lambda t\,dt\Big\} \qquad (2.6)$$

Подставляя функцию (2.6) в уравнения (2.1) и (2.3) и используя интегралы

$$\int_0^{+\infty} J_0(\lambda r)\sin\lambda t\,d\lambda=\begin{cases}0 & \text{при } t<r\\ (t^2-r^2)^{-1/2} & \text{при } t>r\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} J_0(\lambda r)\cos\lambda t\,d\lambda=\begin{cases}(r^2-t^2)^{-1/2} & \text{при } t<r\\ 0 & \text{при } t>r\end{cases} \qquad (2.7)$$

получим

$$\int_0^r \frac{\varphi_1'(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}=-\xi(r)+F_1(r) \qquad (0\leqslant r<a)$$

$$\int_r^{+\infty}\frac{\varphi_3'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}=\int_0^a s(r,t)\,\varphi_1'(t)\,dt \qquad (R<t<+\infty)$$

$$\xi(r)=\frac{\varphi_2(R)}{\sqrt{R^2-r^2}}-\frac{\varphi_2(R)}{\sqrt{a^2-r^2}}-\frac{\varphi_3(R)}{\sqrt{R^2-r^2}}- \qquad (2.8)$$

$$-\int_a^R \varphi_2'(t)\left[\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\right]dt-\int_R^{+\infty}\frac{\varphi_3'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

$$s(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

Решения уравнений Абеля (2.8) имеют вид

$$\varphi_1'(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{r\,[F_1(r)-\xi(r)]}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr \qquad (0\leqslant t<a)$$

$$\varphi_3'(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^a N_0(t,\tau)\,\varphi_1'(\tau)\,d\tau \qquad (R<t<+\infty)$$

$$N_0(t,\tau)=\int_t^{+\infty}\frac{rs(r,\tau)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-a^2}{t^2-\tau^2} \qquad \begin{pmatrix}R<t<+\infty\\ 0\leqslant\tau\leqslant a\end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\varphi_1(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{r\,[F_1(r)-\xi(r)]}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr+c_1,\quad \varphi_3(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^a N_0(t,\tau)\,\varphi_1'(\tau)\,d\tau+c_2$$

или, вычисляя интегралы в правых частях, получим

$$\varphi_1(t) = -\frac{2}{\pi}\int_a^R \frac{t\varphi_2(\tau)\,d\tau}{t^2-\tau^2} - \frac{2}{\pi}\int_R^{+\infty} \frac{t\varphi_3(\tau)\,d\tau}{t^2-\tau^2} + \chi_{11}(t) \qquad (0 \leqslant t < a) \tag{2.9}$$

$$\varphi_3(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\tau\varphi_1(\tau)\,d\tau}{\tau^2-t^2} \qquad (R < t < +\infty) \tag{2.10}$$

$$\chi_{11}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{rF_1(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{2.11}$$

при этом постоянные c_1 и c_2 равны нулю в силу условий (2.5).

Уравнение (2.2) перепишем так:

$$\int_0^{+\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda = F_{21}(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \tag{2.12}$$

$$F_{21}(r) = \int_0^{+\infty} g(\lambda) A(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda + F_2(r) \tag{2.13}$$

Подставляя функцию (2.4) в равенства (2.12), (2.13) и используя интегралы (2.7) и выражение (2.10), получим

$$\int_a^R \frac{\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = F_{21}(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \tag{2.14}$$

$$F_{21}(r) = -\int_0^a \varphi_1(\tau) M_1(\tau, r)\,d\tau + \int_a^R \varphi_2(\tau) M_2(\tau, r)\,d\tau + F_2(r) \tag{2.15}$$

Здесь

$$M_1(\tau, r) = \tau\int_0^{+\infty} g(\lambda) N(\lambda, \tau) J_0(\lambda r)\,d\lambda - \int_0^{+\infty} g(\lambda) J_0(\lambda r)\sin\lambda\tau\,d\lambda$$

$$M_2(\tau, r) = \int_0^{+\infty} g(\lambda) J_0(\lambda r)\cos\lambda\tau\,d\lambda, \qquad N(\lambda, \tau) = \frac{2}{\pi}\int_R^{+\infty} \frac{\cos\lambda t\,dt}{\tau^2-t^2} \tag{2.16}$$

Решение уравнения Абеля (2.14) имеет вид

$$\varphi_2(t) = \frac{2tF_{21}(a)}{\pi\sqrt{t^2-a^2}} + \frac{2}{\pi}\int_a^t \frac{tF_{21}'(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \qquad (a \leqslant t \leqslant R) \tag{2.17}$$

Уравнение (2.9) преобразуем, подставив в него выражение $\varphi_2(t)$ из (2.17) и $\varphi_3(t)$ из (2.10).

В результате преобразований указанное уравнение приобретает вид

$$\varphi_1(t) = \int_0^a K_{11}^{(1)}(t, x)\varphi_1(x)\,dx + \frac{4tF_{21}(a)}{\pi^2\sqrt{a^2-t^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-a^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{4t}{\pi^2}\int_a^R \frac{F_{21}'(r)}{\sqrt{r^2-t^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-t^2}\right)^{1/2} dr + \chi_{11}(t) \tag{2.18}$$

$$K_{11}^{(1)}(t, x) = \frac{2}{\pi^2}\left[x\ln\frac{R-t}{R+t} - t\ln\frac{R-x}{R+x}\right](x^2-t^2)^{-1} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 \leqslant x \leqslant a \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

В полученные уравнения (2.18) и (2.17) подставим выражение (2.15) функции $F_{21}(r)$. В результате чего эти уравнения преобразуются к виду

$$\varphi_1(t)=\int_0^a [K_{11}^{(1)}(t,x)+K_{11}^{(2)}(t,x)]\,\varphi_1(x)\,dx+$$

$$+\int_a^R K_{12}^{(1)}(t,x)\,\varphi_2(x)\,dx+\chi_{12}(t)\qquad (0\leqslant t\leqslant a)\tag{2.20}$$

$$\varphi_2(t)=\int_0^a K_{21}^{(1)}(t,x)\,\varphi_1(x)\,dx+\int_a^R K_{22}^{(1)}(t,x)\,\varphi_2(x)\,dx+\chi_{21}(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant R)$$

Здесь

$$K_{11}^{(2)}(t,x)=-\frac{4t}{\pi^2}\left[\frac{M_1(x,a)}{\sqrt{a^2-t^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-a^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\int_a^R (r^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-t^2}\right)^{1/2}\frac{\partial M_1(x,r)}{\partial r}\,dr\right]$$

$$K_{12}^{(1)}(t,x)=\frac{4t}{\pi^2}\left[\frac{M_2(x,a)}{\sqrt{a^2-t^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-a^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\int_a^R (r^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-t^2}\right)^{1/2}\frac{\partial M_2(x,r)}{\partial r}\,dr\right]\tag{2.21}$$

$$K_{21}^{(1)}(t,x)=-\frac{2tM_1(x,a)}{\pi\sqrt{t^2-a^2}}-\frac{2}{\pi}\int_a^t\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{\partial M_1(x,r)}{\partial r}\,dr$$

$$K_{22}^{(1)}(t,x)=\frac{2tM_2(x,a)}{\pi\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{2}{\pi}\int_a^t\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{\partial M_2(x,r)}{\partial r}\,dr$$

$$\chi_{12}(t)=-\frac{2t}{\pi}\int_a^R\frac{\chi_{21}(\tau)\,d\tau}{t^2-\tau^2}+\chi_{11}(t),\qquad \chi_{21}(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t\frac{rF_2(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

Из уравнения (2.20) видно, что функция $\varphi_1(t)$ действительно удовлетворяет условию (2.5).

Вместо функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ введем новые неизвестные функции $\varphi_{11}(t)$ и $\varphi_{21}(t)$, положив

$$\varphi_1(t)=\sqrt{a}\,(a^2-t^2)^{-1/4}\varphi_{11}(t),\quad \varphi_2(t)=\sqrt{a}\,(t^2-a^2)^{-1/4}\varphi_{21}(t)\tag{2.22}$$

Далее положим

$$K_{11}(t,x)=(a^2-t^2)^{1/4}(a^2-x^2)^{-1/4}[K_{11}^{(1)}(t,x)+K_{11}^{(2)}(t,x)]$$

$$K_{12}(t,x)=(a^2-t^2)^{1/4}(x^2-a^2)^{-1/4}K_{12}^{(1)}(t,x)\tag{2.23}$$

$$K_{21}(t,x)=(t^2-a^2)^{1/4}(a^2-x^2)^{-1/4}K_{21}^{(1)}(t,x)$$

$$K_{22}(t,x)=(t^2-a^2)^{1/4}(x^2-a^2)^{-1/4}K_{22}^{(1)}(t,x)$$

Тогда уравнения (2.20) перепишутся так:

$$\varphi_{11}(t) = \int_0^a K_{11}(t, x)\,\varphi_{11}(x)\,dx + \int_a^R K_{12}(t, x)\,\varphi_{21}(x)\,dx + \chi_1(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a) \tag{2.24}$$

$$\varphi_{21}(t) = \int_0^a K_{21}(t, x)\,\varphi_{11}(x)\,dx + \int_a^R K_{22}(t, x)\,\varphi_{21}(x)\,dx + \chi_2(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant R)$$

На сегменте $[0, R]$ введем функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_{11}(t) & (0 \leqslant t < a) \\ \varphi_{21}(t) & (a \leqslant t \leqslant R), \end{cases} \qquad \chi(t) = \begin{cases} \chi_1(t) & (0 \leqslant t < a) \\ \chi_2(t) & (a \leqslant t \leqslant R) \end{cases} \tag{2.25}$$

а на прямоугольнике $0 \leqslant t \leqslant R$, $0 \leqslant x \leqslant R$ — ядро $K(t, x)$, положив

$$K(t, x) = \begin{cases} K_{11}(t, x) & (0 \leqslant t < a, \quad 0 \leqslant x < a) \\ K_{12}(t, x) & (0 \leqslant t < a, \quad a \leqslant x \leqslant R) \\ K_{21}(t, x) & (a \leqslant t \leqslant R, \quad 0 \leqslant x < a) \\ K_{22}(t, x) & (a \leqslant t \leqslant R, \quad a \leqslant x \leqslant R) \end{cases} \tag{2.26}$$

Тогда уравнения (2.24) записываются в виде одного интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \int_0^R K(t, x)\,\varphi(x)\,dx + \chi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant R) \tag{2.27}$$

Легко показать, что при условиях, наложенных выше на функцию $g(\lambda)$ ядро $K(t, x)$ суммируемо с квадратом. Поэтому, если функция $F_1(r)$ удовлетворяет указанным выше условиям, а $F_2(r)$ такова, что функция $\chi(t)$ суммируема с квадратом, то уравнение (2.27) будет интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Подставляя (2.10) в (2.4), получим

$$A(\lambda) = \int_0^a \varphi_1(t)\,[\sin \lambda t - tN(\lambda, t]\,dt + \int_a^R \varphi_2(t) \cos \lambda t\,dt \tag{2.28}$$

$$N(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \int_R^{+\infty} \frac{\cos \lambda\tau\,d\tau}{t^2 - \tau^2} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \lambda < +\infty \\ 0 \leqslant t \leqslant a \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Таким образом, решение тройных интегральных уравнений (2.1) — (2.3) дается формулой (2.28), где функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ при помощи формул (2.22) и (2.25) выражаются через решение интегрального уравнения Фредгольма (2.27). Ядро и свободный член интегрального уравнения (2.27) даются формулами (2.11), (2.19), (2.21), (2.23), (2.25), (2.26).

Теперь рассмотрим тройные интегральные уравнения второго типа

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \lambda^{3/2} A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = F_1(r) \qquad (0 \leqslant r < a) \\
&\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} A(\lambda)\,[1 - g(\lambda)]\, J_1(\lambda r)\, d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \\
&\int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (R < r < +\infty)
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Здесь $A(\lambda)$ — неизвестная функция. Предполагается, что $g(\lambda)$ непрерывна, а функция $\lambda^2 g(\lambda)$ абсолютно интегрируема на $[0, +\infty]$.

Путем анологичных рассуждений устанавливается, что решение этих уравнений дается формулой

$$
A(\lambda) = \int_0^a [t^{1/2} J_{3/2}(\lambda t) + t^2 N_1(\lambda, t)]\, \varphi_1(t)\, dt + \int_a^R \varphi_2(t)\, \eta(\lambda, t)\, dt \tag{2.31}
$$

Здесь

$$
N_1(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \int_R^{+\infty} \frac{\eta(\lambda, \tau)\, d\tau}{t^2 - \tau^2} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \lambda < +\infty \\ 0 \leqslant t \leqslant a \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{gathered}
\eta(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda}\left[-t^{-3/2} J_{-1/2}(\lambda t) - t^{-1/2} \lambda J_{1/2}(\lambda t) + \sqrt{R}\, t^{-2} J_{-1/2}(\lambda R)\right] \\
\varphi_1(t) = a^{3/2} (a^2 - t^2)^{-1/4} \varphi_{11}(t), \qquad \varphi_2(t) = a^{5/2} (t^2 - a^2)^{-1/4} \varphi_{21}(t)
\end{gathered} \tag{2.32}
$$

$$
\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_{11}(t) & (0 \leqslant t < a) \\ \varphi_{21}(t) & (a \leqslant t \leqslant R) \end{cases}
$$

Функция $\varphi(t)$ находится из следующего интегрального уравнения:

$$
\varphi(t) = \int_0^R K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \chi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant R) \tag{2.33}
$$

$$
K(t, \tau) = \begin{cases} K_{11}(t, \tau) & (0 \leqslant t < a, \quad 0 \leqslant \tau < a) \\ K_{12}(t, \tau) & (0 \leqslant t < a, \quad a \leqslant \tau \leqslant R) \\ K_{21}(t, \tau) & (a \leqslant t \leqslant R, \quad 0 \leqslant \tau < a) \\ K_{22}(t, \tau) & (a \leqslant t \leqslant R, \quad a \leqslant \tau \leqslant R) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{11}(t, \tau) = {} & \frac{(a^2 - t^2)^{1/4}}{(a^2 - \tau^2)^{1/4}} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[\sqrt{R^2 - a^2} + (a^2 - t^2)^{-1/2} t^2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{R^2 - a^2}{r^2 - t^2}\right)^{1/2}\right] \times \right. \\
& \times M_3(\tau, a) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int_a^R \left[\sqrt{R^2 - r^2} + t^2 (r^2 - t^2)^{-1/2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{R^2 - r^2}{a^2 - t^2}\right)^{1/2}\right] \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} M_3(\tau, r)\right] dr + \frac{4\tau^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{2(\tau^2 - t^2)} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{R - t}{R + t} - \frac{1}{\tau} \ln \frac{R - \tau}{R + \tau}\right] + \right. \\
& \left.\left. + \frac{R}{2t\tau^2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2\tau} \ln \frac{R + \tau}{R - \tau}\right] \ln \frac{R + t}{R - t} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$K_{12}(t,\tau)=\frac{a(a^2-t^2)^{1/4}}{(\tau^2-a^2)^{1/4}}\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\int_a^R\left[\sqrt{R^2-r^2}+t^2(r^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-t^2}\right)^{1/2}\right]\times\right.$$
$$\times\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}M_4(\tau,r)\right]dr+\frac{R}{\pi t\tau^2}\ln\frac{R+t}{R-t}+\frac{1}{a}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\left[\sqrt{R^2-a^2}+\right.$$
$$\left.\left.+t^2(a^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-a^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}\right]M_4(\tau,a)\right\}$$

$$K_{21}(t,\tau)=-\frac{(t^2-a^2)^{1/4}}{a(a^2-\tau^2)^{1/4}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left\{\frac{t^3M_3(\tau,a)}{a\sqrt{t^2-a^2}}+\right.$$
$$\left.+t^3\int_a^t(t^2-r^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}M_3(\tau,r)\right]dr\right\}$$

$$K_{22}(t,\tau)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}t^3\frac{(t^2-a^2)^{1/4}}{(\tau^2-a^2)^{1/4}}\left\{\frac{M_4(\tau,a)}{a\sqrt{t^2-a^2}}+\right.$$
$$\left.+\int_a^t(t^2-r^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}M_4(\tau,r)\right]dr\right\}$$

$$M_3(\tau,r)=\int_0^{+\infty}[\tau^{1/2}\lambda^{1/2}J_{3/2}(\lambda\tau)+\tau^2\lambda^{1/2}N_1(\lambda,\tau)]\,g(\lambda)\,J_1(\lambda r)\,d\lambda$$

$$M_4(\tau,r)=\int_0^{+\infty}\lambda^{1/2}g(\lambda)\,\eta(\lambda,\tau)\,J_1(\lambda r)\,d\lambda$$

$$\chi(t)=\begin{cases}\chi_1(t) & (0\leqslant t<a)\\ \chi_2(t) & (a\leqslant t\leqslant R)\end{cases}$$

$$\chi_1(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{(a^2-t^2)^{1/4}}{a^{3/2}}\left\{\frac{1}{a}\left[\sqrt{R^2-a^2}+t^2(a^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-a^2}{a^2-t^2}\right)^{1/2}\right]F_2(a)+\right.$$
$$+\int_a^R\left[\sqrt{R^2-r^2}+t^2(r^2-t^2)^{-1/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-t^2}\right)^{1/2}\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}F_2(r)\right]dr+$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}\int_0^t\frac{r^2F_1(r)\,dr}{t\sqrt{t^2-r^2}}\right\}\tag{2.34}$$

$$\chi_2(t)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{t^3(t^2-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}}\left\{\frac{F_2(a)}{a\sqrt{t^2-a^2}}+\int_a^t\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}d\left[\frac{1}{r}F_2(r)\right]\right\}$$

Можно показать, что ядро $K(t,\tau)$ суммируемо с квадратом. Функции $F_1(r)$ и $F_2(r)$ предполагаются такими, что свободный член $\chi(t)$ суммируем с квадратом. Кроме того, предполагается, что интеграл

$$\int_0^t\frac{r^2F_1(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

обращается в нуль при $t=0$. При этих условиях уравнение (2.33) будет интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

3. Рассмотрим бесконечный упругий слой. Область, занятая слоем, в цилиндрических координатах записывается так: $-l\leqslant z\leqslant l$, $0\leqslant r<$ $<+\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Кольцевой в плане штамп, ограниченный поверх-

ностью вращения, вдавливается осевой силой величины P в упругий слой, находящийся в поле температуры (1.6). Слой расположен на жестком гладком основании, трение между штампом и слоем отсутствует. Граничные условия задачи запишутся так:

$$\tau_{rz}(r, l) = 0; \quad \tau_{rz}(r, -l) = 0, \quad u_z(r, -l) = 0 \qquad (0 \leqslant r < +\infty) \tag{3.1}$$

$$\sigma_z(r, l) = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \quad R < r < +\infty) \tag{3.2}$$

$$u_z(r, l) = \psi(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \tag{3.3}$$

Ищем решение задачи в виде формул (1.2), (1.4), (1.5) и (1.6), при этом неизвестные функции $A_1(\lambda), \ldots, A_6(\lambda)$, входящие в формулы (1.5), должны быть найдены из граничных условий и из соотношений (1.7). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (1.2) и (1.4) удовлетворяют граничным условиям (3.1) и выполняются соотношения (1.7), если функции $A_1(\lambda), \ldots, A_6(\lambda)$ имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
A_1(\lambda) &= \lambda^{-1} A_6(\lambda)(1 - 2\sigma - \lambda l \operatorname{th} \lambda l) - \gamma 2^{-1} \lambda^{-2} C_1(\lambda) \\
A_2(\lambda) &= \lambda^{-1} A_5(\lambda)(1 - 2\sigma - \lambda l \operatorname{cth} \lambda l) - \gamma 2^{-1} \lambda^{-2} C_2(\lambda) \\
A_3(\lambda) &= \lambda^{-1} A_6(\lambda)(1 - 2\sigma - \lambda l \operatorname{th} \lambda l) + \gamma 2^{-1} \lambda^{-2} C_1(\lambda) \\
A_4(\lambda) &= \lambda^{-1} A_5(\lambda)(1 - 2\sigma - \lambda l \operatorname{cth} l\lambda) + \gamma 2^{-1} \lambda^{-2} C_2(\lambda)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}
A_5(\lambda) = \frac{[1 - g(\lambda)]}{\operatorname{sh} \lambda l} A(\lambda) - \frac{\gamma L_3(\lambda)}{4(\sigma - 1)\lambda L_1(\lambda) L_2(\lambda)} [C_1(\lambda) - C_2(\lambda) \operatorname{th} \lambda l] \\
A_6(\lambda) = \frac{2 \operatorname{th} \lambda l}{L_1(\lambda) L_2(\lambda)} A(\lambda) + \frac{\gamma}{4(\sigma - 1)\lambda L_1(\lambda)} [C_1(\lambda) - C_2(\lambda) \operatorname{th} \lambda l] \\
L_2(\lambda) = \operatorname{ch} \lambda l + \lambda l / \operatorname{sh} \lambda l, \qquad L_3(\lambda) = \operatorname{sh} \lambda l - \lambda l / \operatorname{ch} \lambda l \\
L_1(\lambda) = 1 + \operatorname{th} \lambda l L_3(\lambda) / L_2(\lambda) \\
g(\lambda) = (\operatorname{ch} 2\lambda l + 2\lambda l / \operatorname{sh} 2\lambda l)^{-1} [(\operatorname{ch} 2\lambda l + \operatorname{sh} 2\lambda l)^{-1} + 2\lambda l / \operatorname{sh} 2\lambda l]
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $A(\lambda)$ — новая неизвестная функция; $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ — известные функции интеграла (1.6); γ определяется формулой (1.7).

Удовлетворяя граничным условиям (3.2) и (3.3), получим тройные интегральные уравнения

$$\begin{gathered}
\int_1^{+\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) \, d\lambda = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \quad R < r < +\infty) \\
\int_0^{+\infty} A(\lambda) [1 - g(\lambda)] J_0(\lambda r) \, d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь $g(\lambda)$ дается формулой (3.5)

$$\begin{aligned}
F_2(r) = \psi(r) &+ \frac{\gamma}{4(\sigma - 1)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda l}{\lambda} \Big\{ C_2(\lambda) + \\
&+ \frac{L_3(\lambda)}{L_1(\lambda) L_2(\lambda)} [C_1(\lambda) - C_2(\lambda) \operatorname{th} \lambda l] \Big\} J_0(\lambda r) \, d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, решение поставленной граничной задачи дается формулами (1.2), (1.4), (1.5) и (1.6). Неизвестные функции $A_1(\lambda), \ldots, A_6(\lambda)$, входящие в интегралы (1.5), выражаются через одну неизвестную функцию

$A(\lambda)$ при помощи формул (3.4). Для нахождения $A(\lambda)$ получены тройные интегральные уравнения (3.6), которые по виду совпадают с уравнениями (2.1)—(2.3). Поэтому их решение дается формулой (2.28), где $N(\lambda, t)$ записана формулой (2.29), а функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ выражаются через решение интегрального уравнения Фредгольма (2.27) при помощи формул (2.22) и (2.25). Подчеркнем, что в данной задаче при записи выражения ядра и свободного члена интегрального уравнения (2.27) следует учесть, что $F_1(r) = 0$, а функции $g(\lambda)$ и $F_2(r)$ даются формулами (3.5) и (3.7).

Используя интегралы (2.7), находим формулу для распределения нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_z(r, l) = \varepsilon(r) \qquad (a < r < R)$$

$$\varepsilon(r) = -\frac{G}{1-\sigma}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^R \frac{t\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\tau\varphi_1(\tau)}{(r^2-\tau^2)}\left[(r^2-\tau^2)^{-1/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{R^2-r^2}{r^2-\tau^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\right]d\tau\right\} \qquad (3.8)$$

4. Теперь рассмотрим осесимметричную задачу о давлении кольцевого в плане штампа на упругое полупространство $z \geqslant 0$, находящееся в поле температуры (1.9). Трение между штампом и полупространством отсутствует. Граничные условия задачи

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant r < +\infty) \qquad (4.1)$$

$$\sigma_z(r, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \quad R < r < +\infty) \qquad (4.2)$$

$$u_z(r, 0) = \psi(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \qquad (4.3)$$

где $\psi(r)$ — заданная функция.

Ищем решение задачи в виде формул (1.2), (1.4), (1.8) и (1.9). Легко убедиться, что граничное условие (4.1) и соотношение (1.10) выполняются, если функции $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ и $A(\lambda)$ связаны соотношениями

$$A_1(\lambda) = -\frac{1-2\sigma}{\lambda}A(\lambda) + \frac{\gamma}{2\lambda^2}C(\lambda), \qquad A_2(\lambda) = -\frac{1-2\sigma}{\lambda}A(\lambda) - \frac{\gamma}{2\lambda^2}C(\lambda)$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.2) и (4.3), получим следующие тройные интегральные уравнения для нахождения функции $A(\lambda)$:

$$\int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \ R < r < +\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R)$$

Здесь

$$F_2(r) = 2\psi(r) + \frac{\gamma}{4(1-\sigma)}\int_0^{+\infty}\frac{C(\lambda)}{\lambda}J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

Эти уравнения являются частным случаем тройных уравнений (2.1), (2,2), (2.3). Поэтому их решение дается формулой (2.28), где $N(\lambda, t)$ записана формулой (2.29), а функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют выражение

$$\varphi_1(t) = \sqrt{a}\,(a^2-t^2)^{-1/4}\varphi_{11}(t), \qquad \varphi_2(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{rF_2(r)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

Здесь функция $\varphi_{11}(t)$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi_{11}(t) = \int_0^a K_{11}(t, x)\,\varphi_{11}(x)\,dx + \chi_1(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a)$$

$$\chi_1(t) = \frac{4t}{\pi^2\sqrt{a}}(a^2 - t^2)^{1/4}\left[F_2(a)(a^2 - t^2)^{-1/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{R^2 - a^2}{a^2 - t^2}\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \int_a^R (r^2 - t^2)^{-1/2} F_2'(r) \operatorname{arctg}\left(\frac{R^2 - r^2}{r^2 - t^2}\right)^{1/2} dr\right]$$

$$K_{11}(t, x) = \frac{2}{\pi^2}\frac{(a^2 - t^2)^{1/4}}{(a^2 - x^2)^{1/4}}\left(x \ln\frac{R - t}{R + t^2} - t\ln\frac{R - x}{R + x}\right)(x^2 - t^2)^{-1} \qquad \left(\begin{matrix}0 \leqslant t \leqslant a\\ 0 \leqslant x \leqslant a\end{matrix}\right)$$

Закон распределения нормальных напряжений под штампом будет

$$\sigma_z(r, 0) = -2^{-1}\varepsilon(r)$$

где $\varepsilon(r)$ дается формулой (3.8).

5. Рассмотрим задачу о кручении упругого слоя под действием сцепленного с ним жесткого кольцевого штампа; требуется найти функцию $v(r, z)$, удовлетворяющую внутри области $-l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant r < +\infty$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right] = 0 \tag{5.1}$$

а на его поверхности условиям

$$v(r, l) = \psi(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R) \tag{5.2}$$

$$\tau_{z\varphi}(r, l) = 0 \qquad (0 \leqslant r < a,\quad R < r < +\infty) \tag{5.3}$$

$$v(r, -l) = 0 \qquad (0 \leqslant r < +\infty) \tag{5.4}$$

Здесь $\psi(r)$ — заданная функция. Плоскость $z = -l$ закреплена, а на участке $a \leqslant r \leqslant R$ плоскости $z = l$ слой подвергается скручиванию, при этом величина момента внешних сил на этом участке равна

$$M_k = 2\pi\int_a^R r^2 \tau_{z\varphi}(r, l)\,dr$$

Легко убедиться, что функция

$$v = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\lambda}A(\lambda)}{\operatorname{cth} 2\lambda l}\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda l} + \frac{\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{ch}\lambda l}\right] J_1(\lambda r)\,d\lambda \tag{5.5}$$

удовлетворяет уравнению (5.1) и граничному условию (5.4), а напряжение $\tau_{z\varphi}$ имеет вид

$$\tau_{z\varphi} = -\frac{G}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{3/2}A(\lambda)}{\operatorname{cth} 2\lambda l}\left[\frac{\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda l} + \frac{\operatorname{sh}\lambda z}{\operatorname{ch}\lambda l}\right] J_1(\lambda r)\,d\lambda \tag{5.6}$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.3) и (5.4), получим тройные интегральные уравнения для нахождения неизвестной функции $A(\lambda)$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \quad R < r < +\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} A(\lambda)\,[1 - g(\lambda)]\, J_1(\lambda r)\, d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R)$$

Здесь

$$F(r) = -\psi(r), \quad g(\lambda) = [\operatorname{ch} 2\lambda l (\operatorname{ch} 2\lambda l + \operatorname{sh} 2\lambda l)]^{-1} \tag{5.7}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (2.30) при $F_1(r) = 0$. Поэтому их решение дается формулами (2.31) — (2.33). При записи ядра и свободного члена интегрального уравнения (2.33) следует учесть, что в данной задаче $F_1(r) = 0$, а функции $F_2(r)$ и $g(\lambda)$ даются формулами (5.7).

Используя интегралы

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} J_{1/2}(\lambda t) J_1(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} (2t/\pi)^{1/2} r^{-1} (r^2 - t^2)^{-1/2} & (t < r) \\ 0 & (t > r) \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} J_{-1/2}(\lambda t) J_1(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} (2/\pi t)^{1/2} r^{-1} & (r > t) \\ (2/\pi t)^{1/2} r^{-1} [1 - t (t^2 - r^2)^{-1/2}] & (r < t) \end{cases}$$

и выражение (5.6), находим распределение напряжений под штампом

$$\tau_{z\varphi}(r, l) = \varepsilon_1(r) \qquad (a < r < R)$$

где

$$\varepsilon_1(r) = G\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\tau^2 \varphi_1(\tau)}{r^2 - \tau^2} \left[(r^2 - \tau^2)^{-1/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{R^2 - r^2}{r^2 - \tau^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] d\tau + \right.$$

$$+ \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_1(\tau) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2\tau} \ln \frac{R - \tau}{R + \tau} \right) d\tau + \int_a^R \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau^2}\, d\tau \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^R \frac{\tau \varphi_2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right\}$$

6. В случае кручения упругого полупространства $z \geqslant 0$ под действием сцепленного с ним жесткого штампа граничные условия задачи записываются так:

$$v(r, 0) = \psi(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R)$$

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant r < a, \quad R < r < +\infty) \tag{6.1}$$

Здесь $\psi(r)$ — заданная функция. На участке $a \leqslant r \leqslant R$ граничной плоскости $z = 0$ полупространство подвергается скручиванию, при этом величина момента внешних сил на этом участке равна

$$M_k = 2\pi \int_a^R r^2 \tau_{z\varphi}(r, 0)\, dr$$

Можно убедиться, что функция

$$v = -\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} A(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\, d\lambda \tag{6.2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.1). Напряжение $\tau_{z\varphi}$, соответствующее перемещению (6.2), имеет вид

$$\tau_{z\varphi} = G \int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} A(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

Удовлетворяя граничным условиям (6.1), получим тройные интегральные уравнения для нахождения неизвестной функции $A(\lambda)$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (0 \leqslant r < a,\ R < r < +\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = F_2(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant R)$$

где

$$F_2(r) = -\psi(r) \tag{6.3}$$

Эти уравнения являются частным случаем уравнений (2.30). Поэтому их решение дается формулой (2.31), в которой функции $N_1(\lambda, t)$ и $\eta(\lambda, t)$ записаны выражениями (2.32), а функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют выражение

$$\varphi_1(t) = a^{3/2}(a^2 - t^2)^{-1/4}\varphi_{11}(t), \qquad \varphi_2(t) = a^{5/2}(t^2 - a^2)^{-1/4}\chi_2(t) \tag{6.4}$$

Здесь $\varphi_{11}(t)$ находится из интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi_{11}(t) = \int_0^a K_{11}(t, \tau)\varphi_{11}(\tau)\, d\tau + b(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a)$$

$$K_{11}(t,\tau) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\tau^2(a^2 - t^2)^{1/4}}{(a^2 - \tau^2)^{1/4}}\left\{\frac{1}{2(\tau^2 - t^2)}\left[\frac{1}{t}\ln\frac{R-t}{R+t} - \frac{1}{\tau}\ln\frac{R-\tau}{R+\tau}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{R}{2t\tau^2}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2\tau}\ln\frac{R+\tau}{R-\tau}\right]\ln\frac{R+t}{R-t}\right\}$$

$$b(t) = \chi_1(t) + \int_a^R K_{12}(t,\tau)\chi_2(\tau)\, d\tau \tag{6.5}$$

$$K_{12}(t,\tau) = \frac{aR}{\pi t\tau^2}\frac{(a^2 - t^2)^{1/4}}{(\tau^2 - a^2)^{1/4}}\ln\frac{R+t}{R-t}$$

Функции $\chi_2(t)$ и $\chi_1(t)$, входящие в формулы (6.4) и (6.5), записаны выражениями (2.34), в которых $F_1(r) = 0$, а $F_2(r)$ дается формулой (6.3).

Распределение напряжений $\tau_{z\varphi}$ под штампом дается формулой

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = -\varepsilon_1(r) \qquad (a < r < R)$$

Здесь $\varepsilon_1(r)$ дается формулой (5.8).

Поступила 25 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Губенко В. С., Моссаковский В. И. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
2. Губенко В. С. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругий слой и упругое полупространство. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1960, №3.
3. Губенко В. С. Об одном типе интегральных преобразований. Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 4.
4. Аркадьева Ю. О. Задача про кільцевий штамп. Доповіді АН УРСР, 1962, № 3, стр. 333—337.
5. Егоров К. Е. Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошвой кольцевой формы. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1963, № 5.
6. Валов Г. М. Об упругой и термоупругой осесимметричной деформации бесконечного слоя. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1964, № 1.
7. Cooke J. C. Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, pt. 2.
8 Tranter C. J. Some Triple integral equations. Proc. Glasgow math. assotiation., 1960. vol. 4, pt. 4.