Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ОТ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СФЕРЫ В СРЕДЕ С МОЛЕКУЛЯРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

О. В. Воинов, А. М. Головин, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается задача о температуре вокруг излучающей сферы, находящейся в бесконечной однородной среде, в которой, наряду с поглощением излучения, имеет место молекулярный перенос энергии. Решение получено при условии, что радиус сферы a мал по сравнению с длиной пробега фотонов $1/\alpha$ в среде. На расстоянии от сферы, большем по сравнению с $1/\alpha$, решение соответствует приближению лучистой теплопроводности. В задаче об излучении в отсутствие молекулярного переноса получен скачок температуры на поверхности сферы, который сглаживается при конечных значениях коэффициента молекулярной теплопроводности. Если коэффициент молекулярной теплопроводности мал по сравнению с коэффициентом лучистой теплопроводности, но их отношение значительно превышает параметр αa, то поле температуры вблизи сферы определяется исключительно молекулярным переносом. В этом случае основной вклад в поток энергии вблизи сферы вносит молекулярная теплопроводность, а вдали лучистый поток.

1. Основные уравнения. Сфера радиуса a, излучающая как серое тело с эффективной степенью черноты ε, окружена поглощающим лучистую энергию газом с коэффициентом поглощения α и с температурой T_∞ вдали от сферы. Коэффициент α представляет собой усредненный по спектру коэффициент поглощения излучения. Предполагается, что $\alpha = \text{const}$.

Интенсивность излучения $I\,(r, \theta)$ определяется кинетическим уравнением, которое для сферически симметричного случая при наличии локального термодинамического равновесия, как известно [1], имеет вид

$$\cos\theta\frac{\partial I}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial I}{\partial\theta}=\alpha\,(I_p-I) \tag{1.1}$$

Здесь $I_p = (\sigma/\pi)T^4$ — интенсивность равновесного излучения, σ — постоянная Стефана — Больцмана, r — расстояние от точки наблюдения до центра сферы, θ — угол между направлением движения фотонов и направлением радиус-вектора r.

Пусть задана интенсивность излучения, выходящего с поверхности сферы $I_a\,(\theta)$, включающая излучение с поверхности серой сферы с температурой T_a и интенсивность отраженного излучения с коэффициентом отражения $1-\varepsilon$

$$I_a\,(\theta) = \varepsilon\,(\sigma/\pi)T_a^4 + (1-\varepsilon)I\,(a, \pi-\theta) \tag{1.2}$$

Вдали от сферы температура стремится к предельному значению T_∞, а интенсивность излучения к интенсивности термодинамического равновесия излучения

$$I \to (\sigma/\pi)\,T_\infty^4 \quad \text{при } r\to\infty \tag{1.3}$$

Как показано в работе [2], решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) имеет вид

при $0 < \theta < \psi$ ($\psi = \arcsin a / r$)

$$I = I_a(\theta)\exp[-\alpha(r\cos\theta - \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta})] +$$

$$+\frac{\alpha\sigma}{\pi}\int_a^r \exp[-\alpha(r\cos\theta - \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta})]\frac{\rho T^4(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}}$$

при $^1/_2\;\pi < \theta < \pi$

$$I = \frac{\alpha\sigma}{\pi}\int_r^\infty \exp[-\alpha(r\cos\theta + \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta})]\frac{\rho T^4(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}}$$

$$I_c = I\left(r\sin\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha\sigma}{\pi}\int_{r\sin\theta}^\infty \exp(-\alpha\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta})\frac{\rho T^4(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}}$$

при $\psi < \theta < {}^1/_2\,\pi$

$$I = I_c\exp(-\alpha r\cos\theta) + \frac{\alpha\sigma}{\pi}\times$$

$$\times\int_{r\sin\theta}^r \exp[-\alpha(r\cos\theta - \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta})]\frac{\rho T^4(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}} \tag{1.4}$$

Плотность лучистой энергии U и плотность потока лучистой энергии S, направленная по радиусу в силу сферической симметрии задачи, определяются следующим образом

$$U = \frac{2\pi}{c}\int_0^\pi I\sin\theta\,d\theta, \qquad S = 2\pi\int_0^\pi I\cos\theta\sin\theta\,d\theta \tag{1.5}$$

Как известно [1,3], для среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с температурой T, плотность энергии равновесного излучения U_p равна $4(\sigma / c)T^4$.

Интегрируя уравнение переноса излучения (1.1) по телесному углу, можно получить уравнение непрерывности

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)S = \alpha c(U_p - U) \tag{1.6}$$

Если в среде, помимо излучения, осуществляется перенос энергии посредством молекулярной теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$, то закон сохранения энергии означает, что

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left(S - \varkappa\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.6) и (1.7) следует уравнение, позволяющее рассчитать распределение температуры в среде

$$\varkappa\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)T = \alpha c(U_p - U) \tag{1.8}$$

2. Плотность энергии и потока излучения. Выражение для плотности энергии (1.5) можно представить в виде

$$U = (2\pi / c)\;(U_1 + U_2 + U_3)$$

$$\left(U_1 = \int_0^\psi I\sin\theta\,d\theta, \quad U_2 = \int_{^1/_2\pi}^\pi I\sin\theta\,d\theta, \quad U_3 = \int_\psi^{^1/_2\pi} I\sin\theta\,d\theta\right) \tag{2.1}$$

где соответствующие интегралы вычисляются при помощи формул (1.4)

Так же, как и в работе [2], используются подстановки

$$r\cos\theta - \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta} = u, \qquad r\cos\theta + \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta} = v \tag{2.2}$$

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}} = \frac{du}{ru} = -\frac{dv}{rv}, \qquad \cos\theta = \frac{r^2 + u^2 - \rho^2}{2ru} = \frac{r^2 + v^2 - \rho^2}{2rv}$$

Интегралы в формуле (2.1) преобразуются к более простому виду

$$U_1 = \frac{\varepsilon\sigma}{2\pi r} T_a^4 \int_{r-a}^{q} \left(\frac{r^2 - a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\alpha u}\, du +$$

$$+ (1-\varepsilon)\frac{\alpha\sigma}{\pi}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_0^\psi E(r,\rho,\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}} + \frac{\alpha\sigma}{\pi r}\int_a^r \rho T^4(\rho)\int_{r-\rho}^{q-p} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\, d\rho \tag{2.3}$$

$$(E(r,\rho,\theta) = \exp\left[-\alpha\left(r\cos\theta - 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta} + \sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}\right)\right].$$

$$U_2 = -\frac{\alpha\sigma}{\pi r}\int_r^\infty \rho T^4(\rho)\int_t^{\rho - r} e^{-\alpha v}\frac{dv}{v}\, d\rho \tag{2.4}$$

$$U_3 = -\frac{\alpha\sigma}{\pi r}\int_a^r \rho T^4(\rho)\int_{q+p}^{t} e^{-\alpha v}\frac{dv}{v}\, d\rho +$$

$$+ \frac{\alpha\sigma}{\pi r}\int_a^r \rho T^4(\rho)\int_{q-p}^{t} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\, d\rho - \frac{\alpha\sigma}{\pi r}\int_r^\infty \rho T^4(\rho)\int_{q+p}^{t} e^{-\alpha v}\frac{dv}{v}\, d\rho \tag{2.5}$$

$$\left(q = \sqrt{r^2 - a^2}, \qquad p = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad t = \sqrt{|r^2 - \rho^2|}\right)$$

Плотность энергии излучения имеет вид

$$U = \frac{\varepsilon\sigma}{cr} T_a^4 \int_{r-a}^{q} \left(\frac{r^2 - a^2}{u^2} - 1\right) e^{-\alpha u}\, du + \tag{2.6}$$

$$+ 2(1-\varepsilon)\frac{\alpha\sigma}{c}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_0^\psi E(r,\rho,\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}} + \frac{2\alpha\sigma}{cr}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_{|r-\rho|}^{p+q} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\, d\rho$$

Плотность энергии излучения (2.6) отличается от приведенной в работе [2] учетом излучения, отраженного от поверхности сферы. Для абсолютно черной сферы ($\varepsilon = 1$) оба выражения эквивалентны. Аналогичные вычисления для радиальной составляющей плотности потока приводятся к следующему результату:

$$S = \frac{\varepsilon\sigma}{2r^2} T_a^4 \int_{r-a}^{q} \left[\left(\frac{r^2 - a^2}{u}\right)^2 - u^2\right] e^{-\alpha u}\frac{du}{u} +$$

$$+ 2(1-\varepsilon)\alpha\sigma\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_0^\psi E(r,\rho,\theta)\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\theta}} +$$

$$+ \frac{\alpha\sigma}{r^2}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_{|r-\rho|}^{p+q}\left(1 + \frac{r^2 - \rho^2}{u^2}\right) e^{-\alpha u}\, du\, d\rho \tag{2.7}$$

По условию задачи $\alpha a \ll 1$, поэтому в (2.6) и (2.7) можно заменить $e^{-\alpha u}$ на $e^{-\alpha r}$ в первых интегралах, а $\exp(-2\alpha\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta})$ заменить на единицу, кроме того, можно сгруппировать члены не зависящие от ε, и во вторых интегралах, учитывая условие $\alpha a \ll 1$, можно $e^{-\alpha u}$ заменить на $e^{-\alpha(r+\rho)}$

$$U = \frac{2\varepsilon\sigma}{c} e^{-\alpha r}\left[T_a^4\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\right) - \frac{\alpha}{r}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho} \ln\frac{r+\rho}{p+q}\, d\rho\right] + \frac{2\alpha\sigma}{cr}\int_a^\infty \rho T^4(\rho) \int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\, d\rho \tag{2.8}$$

$$S = \frac{\varepsilon\sigma a^2}{r^2} e^{-\alpha r}\left[T_a^4 - \frac{2\alpha}{a^2}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 - a^2}\right) d\rho\right] + \frac{\alpha\sigma}{r^2}\int_a^\infty \rho T^4(\rho) \int_{|r-\rho|}^{r+\rho}\left(1 + \frac{r^2-\rho^2}{u^2}\right) e^{-\alpha u}\, du\, d\rho \tag{2.9}$$

Второй интеграл в (2.8) существенно упрощается, если рассматривать область $r \gg a$, когда в интеграл вклад дают величины $\rho \sim 1/\alpha$. Поэтому выражение в квадратных скобках в формуле (2.8) можно представить в виде

$$\frac{a^2}{2r^2}\left(T_a^4 - \alpha\int_a^\infty T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho}\, d\rho\right)$$

Заметим, что в точке $r = a$ то же самое выражение равно

$$T_a^4 - \alpha\int_0^\infty T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho}\, d\rho$$

Это позволяет представить рассматриваемое выражение в виде

$$\left[T_a^4 - \alpha\int_0^\infty T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho}\, d\rho\right]\left(1 - \sqrt{1 - a^2/r^2}\right)$$

Такая замена оправдана при $r \gg a$ и при $r = a$. Можно полагать, что и в промежуточной области $r \sim a$ отличия не будут существенными.

Таким образом, выражение для плотности энергии излучения принимает вид

$$U = \frac{2\varepsilon\sigma}{c} e^{-\alpha r}\left[T_a^4 - \alpha\int_a^\infty T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho} d\rho\right]\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\right) + \frac{2\alpha\sigma}{cr}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\, d\rho \tag{2.10}$$

Аналогичные преобразования выражения плотности потока лучистой энергии приводят к следующему результату:

$$S = \frac{\varepsilon\sigma a^2}{r^2} e^{-\alpha r}\left[T_a^4 - \alpha\int_a^\infty T^4(\rho)\, e^{-\alpha\rho} d\rho\right] + \frac{\alpha\sigma}{r^2}\int_a^\infty \rho T^4(\rho)\int_{|r-\rho|}^{r+\rho}\left(1 + \frac{r^2-\rho^2}{u^2}\right) e^{-\alpha u} du\, d\rho \tag{2.11}$$

В области $\alpha r \gg 1$ температура $T(\rho)$ будет медленно меняющейся функцией координат, следовательно, при вычислении плотности потока и энергии можно ограничиться первыми членами разложения $T^4(\rho)$ в ряд Тейлора

$$T^4(\rho) = T^4(r) + (\rho - r)(d/dr)\,T^4(r)$$

и, учитывая, что подынтегральная функция отлична от нуля лишь в области $\alpha\,|r - \rho| \lesssim 1$ можно при $\alpha r \gg 1$ заменить нижний предел при интегрировании по ρ на $-\infty$.

Таким образом, плотность лучистой энергии и потока лучистой энергии принимают вид

$$U = \frac{4\sigma}{c}T^4(r) + \frac{8\sigma}{3c\alpha^2 r}\frac{d}{dr}T^4(r), \qquad S = -\frac{4\sigma}{3\alpha}\frac{d}{dr}T^4(r) \tag{2.12}$$

как видно из (2.12) при $r \to \infty$ плотность энергии излучения стремится к плотности энергии термодинамически равновесного излучения, а плотность потока излучения к известному выражению потока в приближении лучистой теплопроводности [3].

Если задан полный поток энергии $4\pi a^2 S_a$ через поверхность сферы радиуса a, то согласно формуле (2.12) уравнение (1.12) в области $\alpha r \gg 1$ переходит в уравнение

$$-\left(\varkappa + \frac{16\sigma}{3\alpha}T_\infty^3\right)\frac{dT}{dr} = \frac{a^2}{r^2}S_a \tag{2.13}$$

Решение этого уравнения

$$T - T_\infty = \frac{3\alpha a^2 S_a}{16\sigma T_\infty^3 r\,(1 + 3\mu^2\alpha^2)} \qquad \left(\mu^2 = \frac{\varkappa}{16\alpha\sigma T_\infty^3}\right) \tag{2.14}$$

будет главной асимптотической частью решения точного уравнения (1.8).

3. Поле температуры вдали от поверхности сферы. Введем новую функцию φ

$$T^4 = T_\infty^4(1 + \varphi), \quad T_a^4 = T_\infty^4(1 + \varphi_a) \tag{3.1}$$

Считая $\varphi_a \ll 1$, можно линеаризовать уравнение (1.8), которое принимает вид

$$\mu^2 \frac{d^2}{dr^2} r\varphi = r(1 + \varphi) - A\left(r - \sqrt{r^2 - a^2}\right)e^{-\alpha r} -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\int_a^\infty \rho(1 + \varphi)\,d\rho \int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u} \qquad \left(A = \frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_a - \alpha\int_a^\infty \varphi e^{-\alpha\rho}\,d\rho\right)\right) \tag{3.2}$$

Интеграл, входящий в (3.2), можно преобразовать следующим образом:

$$\int_a^\infty \rho\,d\rho \int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u} = \int_{-\infty}^\infty \rho\,d\rho \int_{|r-\rho|}^\infty e^{-\alpha u}\frac{du}{u} - \int_0^a \rho\,d\rho \int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u} = \frac{2r}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha a^3}{6r^2}e^{-\alpha r}\right)$$

Отсюда видно, что распространение интегрирования по ρ в уравнении (3.2), на область $0 < \rho < a$ приводит к появлению членов порядка αa, сохранение которых не оправдано, так как исходное уравнение (3.2) получено в пренебрежении членами порядка αa. Это обстоятельство тем более очевидно, что более точное уравнение, аналогичное (3.2), должно иметь решение $\varphi \equiv 0$. Уравнение (3.2) можно формально распространить на всю область $0 < \rho < \infty$ и доопределить $\varphi(r)$ для $r < 0$ четным образом $\varphi(r) = \varphi(-r)$. Тогда в области $-\infty < r < \infty$ можно записать уравнение

$$\mu^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2} = r\varphi - Ar\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\right) e^{-\alpha|r|} \eta(r^2 - a^2) - $$

$$- \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\varphi(\rho) E_1(\alpha|r - \rho|)\, d\rho \qquad (3.3)$$

$$\left(E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{du}{u^n}, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}\right)$$

Для решения уравнения (3.3) применяется преобразование Фурье

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} r\varphi(r) e^{-ikr}\, dr \qquad (3.4)$$

Пусть $r\varphi = aB$ при $r \to +0$ тогда Фурье-образ уравнения (3.3) имеет вид

$$-\mu^2 k^2 \Phi - 2i\mu^2 kaB = \Phi - AF - (\alpha/k)\Phi \operatorname{arc\,tg}(k/\alpha) \qquad (3.5)$$

$$F = \int_a^{\infty} (r - \sqrt{r^2 - a^2}) e^{-\alpha r} (e^{-ikr} - e^{ikr})\, dr =$$

$$= 2i \operatorname{Im}\left\{\left[\frac{1}{(\alpha + ik)^2} + \frac{a}{\alpha + ik}\right] e^{-(\alpha + ik)a} - \frac{a}{\alpha + ik} K_1(\alpha a + ika)\right\} \qquad (3.6)$$

Здесь $K_1(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента (функция Макдональда).

Если $|k| a \ll 1$, то

$$F(k) = -ia^2 \operatorname{arc\,tg}(k/\alpha) \qquad (3.7)$$

Формально этот Фурье-образ соответствует функции $\frac{1}{2}(a^2/r)\exp(-\alpha r)$, являющейся асимптотикой свободного члена уравнения (3.3).

Обратное Фурье-преобразование приводит к следующему результату:

$$r\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(AF - 2i\mu^2 kaB)\exp(ikr)\, dk}{1 + \mu^2 k^2 - (\alpha/k)\operatorname{arctg}(k/\alpha)} \qquad (3.8)$$

Исследование показывает, что на комплексной плоскости подынтегральная функция имеет один полюс первого порядка $k = 0$ и две точки ветвления $k = \pm i\alpha$. Кроме вышеуказанных особенностей, подынтегральная функция в области $|\operatorname{Im} k| > \alpha$ может обладать полюсами, являющимися корнями уравнения

$$1 + \mu^2 k^2 = \frac{\alpha}{2ik} \ln \frac{i\alpha - k}{i\alpha + k} \qquad (3.9)$$

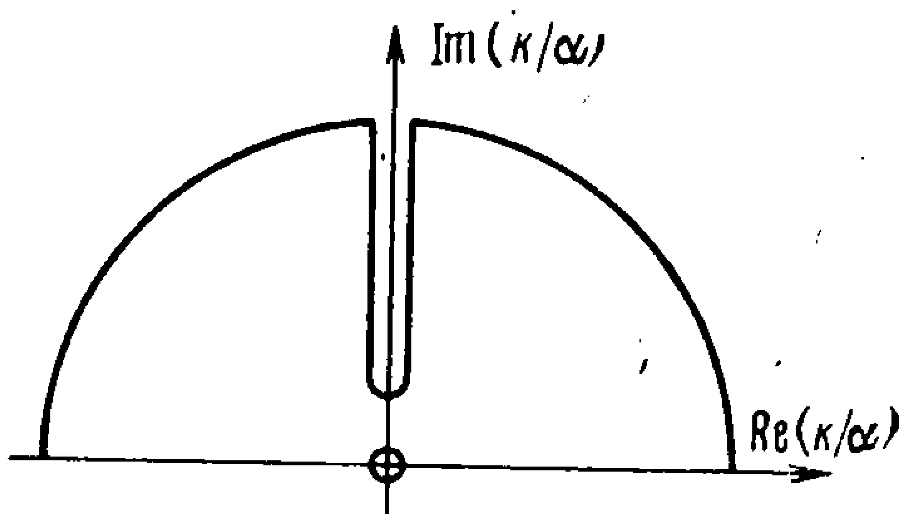
Если $\mu\alpha \ll 1$, то с точностью до членов порядка $\mu^2\alpha^2$ для верхней полуплоскости из (3.9) следует уравнение с очевидным решением

$$1 + \mu^2 k^2 \mp \tfrac{1}{2}\alpha\pi / k = 0, \qquad k = i/\mu \mp \tfrac{1}{4}\alpha\pi \qquad (3.10)$$

где верхний знак соответствует обходу точки ветвления против часовой стрелки, а нижний по часовой стрелке. Как видно из (3.10), эти корни не принадлежат главной ветви логарифма. Особенности уравнения (3.9) располагаются на плоскости k симметрично относительно действительной оси.

Исследуя конформные преобразования, осуществляемые функциями, стоящими в правой и левой частях уравнения (3.9), можно показать, что при любых значениях $\mu\alpha$ уравнение (3.9) не имеет иных особенностей, кроме полюса второго порядка в нуле и точек ветвления $k = \pm i\alpha$.

Путь интегрирования проходит через полюс $k = 0$. Интеграл (3.8) нужно понимать как полусумму интегралов вдоль действительной оси с обходом полюса $k = 0$ сверху и снизу. Вычет относительно полюса определяет поведение функции при $|r| \to \infty$.



Фиг. 1

В силу четности функции $\varphi(r)$ должно выполняться условие

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi(r) = -\lim_{r\to-\infty} r\varphi(r)$$

которое, очевидно, не будет выполнено при всяком ином выборе пути интегрирования в окрестности полюса $k = 0$.

Поскольку подынтегральная функция имеет точки ветвления $k = \mp i\alpha$, то чтобы выделить однозначную аналитическую ветвь подынтегральной функции на плоскости комплексного переменного требуется провести разрезы вдоль мнимой оси от $i\alpha$ до $i\infty$ и от $-i\alpha$ до $-\infty$.

Интеграл вдоль действительной оси при $r > 0$ равен вкладу половины вычета в полюсе $k = 0$ и пределу при $R \to \infty$ интеграла вдоль следующего контура (фигура): от $k = -R$ по дуге $Re^{i\theta}$ до $k = iR$, от $k = iR$ вдоль мнимой оси слева от разреза до $i\alpha$, от $k = i\alpha$ вдоль мнимой оси справа от разреза до $k = iR$, от $k = iR$ по дуге $Re^{i\theta}$ до $k = R$ (R — радиус круга).

Необходимо исследовать поведение $F(k)$ вдоль деформированного контура интегрирования. Очевидно, что при $R \to \infty$ интеграл по дугам круга радиуса R исчезает, и от интеграла вдоль деформированного контура остается интеграл вдоль оси слева и справа от линии разреза.

Для $r \gg a$ основной вклад в интеграл дает область $|k|a \ll 1$. Поэтому, воспользовавшись асимптотическим выражением для (3.7), можно получить

$$r\varphi = \frac{3\alpha a\,(aA + 2\mu^2\alpha B)}{2\,(1 + 3\mu^2\alpha^2)} + \Psi$$

$$\Psi = \frac{\alpha a}{2}\int_1^\infty \frac{[aA\,(1 - \mu^2\alpha^2 s^2) + 2\mu^2\alpha B]\exp(-\alpha r s)\,ds}{[1 - \mu^2\alpha^2 s^2 + {}^1\!/_2\, s^{-1}\ln(s-1)/(s+1)]^2 + {}^1\!/_4\,\pi^2 s^{-2}} \qquad (3.11)$$

Поведение подынтегральной функции, стоящей перед экспонентой, существенно зависит от величины параметра $\mu^2\alpha^2$.

Пусть $\mu^2\alpha^2 \ll 1$. Рассматриваемая функция резко возрастает в области $1 < s < 1.3$ из-за изменения $\ln(s - 1)$. Затем с увеличением s функция медленно возрастает и достигает в точке $s \approx 1/\mu\alpha$ максимального значения, отвечающего наименьшему значению знаменателя, равного ${}^1\!/_4\,\pi^2\mu^2\alpha^2$. После чего следует спад функции в области порядка $1/\mu\alpha$.

Если $\alpha r \gg 1$, то основной вклад в интеграл вносит малая окрестность точки $s = 1$, следовательно

$$\Psi = \frac{a}{2r} e^{-\alpha r} \int_0^\infty \frac{aA(1-\mu^2\alpha^2) + 2\mu^2\alpha B}{[1-\mu^2\alpha^2 + {}^1/_2 \ln(x/2\alpha r)]^2 + {}^1/_4\pi^2} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{a}{2r} e^{-\alpha r} \frac{aA(1-\mu^2\alpha^2) + 2\mu^2\alpha B}{(1-\mu^2\alpha^2 - {}^1/_2 \ln 2\alpha r)^2 + {}^1/_4\pi^2} \tag{3.12}$$

При $\alpha r \gg 1$ в соответствии с (3.11) распределение температуры имеет вид

$$r\varphi = \frac{3\alpha a(aA + 2\mu^2\alpha B)}{2(1+3\mu^2\alpha^2)} \tag{3.13}$$

Сравнивая (3.13) с полем температуры, полученным в приближении лучистой энергии теплопроводности (2.14), легко видеть, что постоянные A и B связаны с полным потоком энергии следующим образом:

$$A + \frac{2\mu^2\alpha}{a} B = \frac{S_a}{2\sigma T_\infty^4} \tag{3.14}$$

Это соотношение может быть использовано для определения температуры на поверхности сферы.

4. **Поле температуры вблизи поверхности сферы.** Распределение температуры во всем пространстве $r > a$ с точностью до членов порядка αa определяется уравнением (3.2).

Оценка показывает, что в области $r \sim a$ интегральный член в уравнении (3.2) будет величиной порядка αa при $\mu \leqslant a$, либо величиной порядка $\alpha a \ln \alpha a$ при $\mu \gg a$. Поэтому в области $r \sim a$ поле температур с точностью до малых величин можно рассчитать, пренебрегая интегральным членом уравнения (3.2)

$$\mu^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2} = r\varphi - A(r - \sqrt{r^2 - a^2}) \tag{4.1}$$

При достаточно малых μ (как показано в п.6, требуется, чтобы выполнялось неравенство $4\mu^2\alpha^2 \ll \varepsilon\alpha a$) решение уравнения (4.1) принимает асимптотический вид еще в области, где можно не учитывать растущую по мере увеличения r погрешность, обусловленную пренебрежением интегральным членом уравнения (3.2). Для этого случая можно потребовать, чтобы при $r \gg \mu$ решение уравнения (4.1) не содержало экспоненциально растущих членов, наличие которых противоречило бы непрерывному переходу решения (4.1) в решение (3.11), справедливое в области $r \gg a$.

Соответствующее решение уравнения (4.1) имеет вид

$$r\varphi = \left[a\varphi_a - \frac{A}{2\mu}\int_a^\infty (x - \sqrt{x^2 - a^2}) \exp\left(-\frac{x-a}{\mu}\right) dx\right] \exp\left(-\frac{r-a}{\mu}\right) +$$

$$+ \frac{A}{2\mu}\int_a^\infty (x - \sqrt{x^2 - a^2}) \exp\left(-\frac{|r-x|}{\mu}\right) dx \tag{4.2}$$

Отсюда следует:

$$r\varphi = {}^1/_2 a^2 A / r \qquad \text{при } r \gg \mu \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{dr\varphi}{dr}\right)_a = -\frac{a}{\mu}\varphi_a + A\left[1 + \frac{a}{\mu} - \frac{a}{\mu}e^{a/\mu}K_1\left(\frac{a}{\mu}\right)\right] \tag{4.4}$$

Если $\mu \ll a$, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_a = -\frac{\varphi_a}{\mu}\left(1 + \frac{\mu}{a}\right) + \frac{A}{\mu}\left(1 + \frac{\mu}{a} - \sqrt{\frac{\pi\mu}{2a}}\right) \tag{4.5}$$

В пределе при $\mu \to 0$ распределение температуры испытывает скачок. В случае конечного значения μ ($\mu \ll a$) распределение температуры резко меняется в области $r - a \sim \mu$. На расстояниях $r - a \gg \mu$ распределение температуры описывается формулой (4.3).

Если $\mu \gg a$, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_a = -\frac{\varphi_a}{a}\left(1 + \frac{a}{\mu}\right) + \frac{Aa}{2\mu^2}\left(\ln\frac{a}{2\mu} - 0.427\right) \tag{4.6}$$

поле температуры при $r \sim a$ мало отличается от поля температуры в отсутствие излучения и в этом случае можно считать $B = \varphi_a$.

5. **Лучистое равновесие.** Уравнение, определяющее температуру вокруг излучающей сферы, для среды с пренебрежимо малым коэффициентом молекулярной теплопроводности $4\mu^2\alpha^2 \ll \varepsilon\alpha a$ получается из общего уравнения (1.8) либо из уравнения (3.2), если считать $\varkappa = 0$

$$r\varphi = A\left(r - \sqrt{r^2 - a^2}\right)e^{-\alpha r} + \frac{\alpha}{2}\int\limits_a^\infty \rho\varphi d\rho \int\limits_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u} \tag{5.1}$$

В отличие от (3.2) справедливость уравнения (5.1) не связана с допущением о малости φ_a. Это уравнение законно при любом значении φ_a, если $\varkappa = 0$.

Полученное ранее для области $r \ll a$ решение (3.11) уравнения (3.2) при $\mu \to 0$ переходит в следующее:

$$r\varphi = \frac{\alpha a^2 A}{2}\left(3 + \int\limits_1^\infty \frac{\exp(-\alpha r s)\, ds}{[1 + {}^1/_2 s^{-1}\ln(s-1)/(s+1)]^2 + {}^1/_4\pi^2 s^{-2}}\right) \tag{5.2}$$

На расстояниях от сферы больших по сравнению с длиной пробега фотонов ($\alpha r \gg 1$), в соответствии с (3.12)

$$r\varphi = {}^1/_2\,\alpha a^2 A\,\{3 + (\alpha r)^{-1}[({}^1/_2\ln 2\alpha r - 1)^2 + {}^1/_4\,\pi^2]^{-1}\exp(-\alpha r)\} \tag{5.3}$$

В области $a \ll r \ll 1/\alpha$ формула (5.2) упрощается, так как стоящая перед экспонентой функция может быть заменена на единицу

$$r\varphi = {}^1/_2\,\alpha a^2 A\,[3 + (\alpha r)^{-1}] = {}^1/_2\,a^2 A / r \tag{5.4}$$

Этот результат согласуется с распределением температуры (4.3) вблизи поверхности сферы, если $r \gg \mu$.

При помощи формулы (5.4) легко получить следующую оценку:

$$\frac{\alpha}{2}\int_a^\infty \rho\varphi d\rho \int_{|r-\rho|}^{r+\rho} e^{-\alpha u}\frac{du}{u} < \frac{\alpha}{2}\int_a^\infty \frac{a^2A}{2\rho}\ln\frac{r+\rho}{|r-\rho|}d\rho < \frac{\pi^2}{8}\alpha a^2 A$$

Таким образом, при $\alpha r \ll 1$ вплоть до самой границы сферы $r = a$ с точностью до αa решение уравнения (5.1) имеет вид

$$r\varphi = A(r - \sqrt{r^2 - a^2}) \tag{5.5}$$

Оба результата (5.5) и (5.4) находятся в полном согласии. Можно построить интерполяционное решение

$$r\varphi = A\,[(r - \sqrt{r^2 - a^2})\exp(-\alpha r) + {}^3/_2\,\alpha a^2] \tag{5.6}$$

которое обосновано для областей $a < r \ll 1/\alpha$, $r \gg 1/\alpha$.

Предельная температура среды при $r \to a$ с точностью до малых порядка αa, как показывает формула (5.5), определяется соотношением

$$\lim_{r\to a} r\varphi = aA \neq a\varphi_a \tag{5.7}$$

что свидетельствует о скачке температуры на поверхности сферы, так как в соответствии с (3.2) и (3.14) с точностью до членов порядка αa

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon\left[\varphi_a - \alpha\int_a^\infty \varphi\exp(-\alpha\rho)\,d\rho\right] \approx \frac{1}{2}\varepsilon\varphi_a = \frac{S_a}{2\sigma T_\infty{}^4} \tag{5.8}$$

Действительно, из формул (5.5) видно, что основной вклад в интеграл, содержащийся в (5.8), дает область $\rho \sim a$.

Таким образом, температура на поверхности сферы испытывает скачок

$$T_a{}^4 - T_{a+0}{}^4 = (1 - {}^1/_2\varepsilon)(T_a{}^4 - T_\infty{}^4) \tag{5.9}$$

6. Поле температуры и поток лучистой энергии при $\mu^2\alpha^2 \ll 1$, $\mu \gg a$. Если $\alpha r \ll 1$ и $r \gg \mu$, то в области, где подынтегральная функция в формуле (3.11) отлична от нуля, выполнено условие $\mu^2\alpha^2 s^2 \ll 1$, а потому

$$\Psi = {}^1/_2\,(a/r)(aA + 2\mu^2\alpha\varphi_a) \tag{6.1}$$

и во всей области $r \gg \mu$ поле температуры описывается следующей интерполяционной формулой:

$$r\varphi = {}^3/_2\,\alpha a\,(aA + 2\mu^2\alpha\varphi_a)\,[1 + {}^1/_3\,(\alpha r)^{-1}\exp(-\alpha r)] \tag{6.2}$$

Если $r \sim \mu$, то основной вклад в Ψ дает малая окрестность точки максимума подынтегральной функции. С точностью до членов порядка $\mu\alpha$

$$\Psi = \frac{\alpha a}{2}\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right)\int_1^\infty \frac{aA(1-\mu^2\alpha^2s^2) + 2\mu^2\alpha\varphi_a}{(1-\mu^2\alpha^2s^2)^2 + {}^1/_4\pi^2\mu^2\alpha^2}\,ds =$$

$$= \frac{a}{4\mu}\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right)\int_{-\infty}^\infty \frac{aA(1-t^2) + 2\mu^2\alpha\varphi_a}{(1-t^2)^2 + {}^1/_4\pi^2\mu^2\alpha^2}\,dt = a\varphi_a\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right) \tag{6.3}$$

Сравнение полученного результата с формулой (4.2), определяющей решение при $r \sim a$, показывает, что формула (6.3) применима и в области $r \sim a$.

Из формул (3.2), (6.2), (6.3) следует, что $A = {}^1/_2\ \varepsilon\varphi_a$ с точностью до членов порядка $\alpha a \ln \alpha a$.

В соответствии с (3.14) плотность полного потока энергии

$$S_0 = \varepsilon\sigma \frac{a^2}{r^2}(T_a{}^4 - T_\infty{}^4) + \frac{\varkappa a}{r^2}(T_a - T_\infty) \tag{6.4}$$

Используя выражение полного потока энергии через потоки, обусловленные лучистым и молекулярным переносом, можно определить поток лучистой энергии. Для этого нужно вычислить градиент температуры, тогда при помощи формулы (6.4) можно получить при $\mu \ll r \ll 1/\alpha$

$$S = S_0\,(1 - 2\mu^2\alpha/r) \tag{6.5}$$

Видно, что $S \approx S_0$, т. е. полный поток энергии, как и в области $\alpha r \gg 1$, определяется в основном излучением. При $r \lesssim \mu$, аналогичные вычисления с использованием (6.3) приводят к следующему результату:

$$S = S_0\left[1 - \frac{1 + r/\mu}{1 + \varepsilon a/4\mu^2\alpha}\exp\left(-\frac{r}{\mu}\right)\right] \tag{6.6}$$

Из последней формулы видно, что всюду в области $r \ll \mu$ вклады лучистого потока и потока, создаваемого молекулярной теплопроводностью не зависят от расстояния. Как видно из (6.6) и (6.5) в области $r \sim \mu$ с ростом r вклад потока энергии, обусловленного молекулярной теплопроводностью в полный поток энергии, уменьшается, и при $r \gg \mu$ полный поток энергии определяется исключительно излучением. Параметром, определяющим сравнительную роль излучения и молекулярного переноса в области $r \ll \mu$, будет $4\mu^2\alpha/\varepsilon a$. При значениях этого параметра, много меньших единицы, всюду можно пренебречь молекулярной теплопроводностью. Если $4\mu^2\alpha/\varepsilon a \gg 1$, то в области $r \ll \mu$ перенос энергии осуществляется исключительно молекулярной теплопроводностью. Однако при $r \gg \mu$ механизм переноса определяется излучением. Изменение потока лучистой энергии на расстояниях $r \sim \mu \ll 1/\alpha$ обусловлено свечением окрестности сферы.

7. Температура и поток лучистой энергии при $\mu^2\alpha^2 \gg 1$. На больших расстояниях от излучающей сферы ($\alpha r \gg 1$) отношение потоков энергий, обусловленных молекулярной теплопроводностью и лучистой, определяется, как видно из (2.13), величиной коэффициента $3\mu^2\alpha^2$.

Если $\mu^2\alpha^2 \gg 1$, то в соответствии с формулой (3.11) для любых значений r, кроме области $\ln \alpha r \gg \mu^2\alpha^2$ с точностью до величины порядка αa интеграл преобразуется к следующему виду:

$$\Psi = (a\varphi_a/\mu^2\alpha^2)E_4\,(\alpha r) \tag{7.1}$$

Распределение температуры во всем пространстве определяется формулой

$$r\varphi = a\varphi_a\,[1 - {}^1/_3\ (\mu\alpha)^{-2} + (\mu\alpha)^{-2}E_4\,(\alpha r)] \tag{7.2}$$

в соответствии с которой

$$r\varphi = a\varphi_a\,(1 - \alpha r/6\mu^2\alpha^2) \qquad \text{при } \alpha r \ll 1 \tag{7.3}$$

$$r\varphi = a\varphi_a\,[1 - {}^1/_3\,(\mu\alpha)^{-2} + \mu^{-2}\alpha^{-3}r^{-1}\exp(-\alpha r)] \quad \text{при } \alpha r \gg 1$$

Плотность потока энергии, переносимой посредством молекулярной теплопроводности, равна

$$S_\varkappa = -\varkappa\frac{dT}{dr} = \frac{\varkappa a}{r^2}(T_a - T_\infty)\left[1 - \frac{1}{3\mu^2\alpha^2} + \frac{E_4(\alpha r) + \alpha r E_3(\alpha r)}{\mu^2\alpha^2}\right] \tag{7.4}$$

Плотность полного потока энергии на больших расстояниях, где справедливо диффузионное приближение при $\mu^2\alpha^2 \gg 1$, можно рассчитать, воспользовавшись выражением $S_\varkappa$ при $\alpha r \gg 1$

$$S_0 = S_\varkappa\left(1 + \frac{1}{3\mu^2\alpha^2}\right) = \frac{\varkappa a}{r^2}(T_a - T_\infty) \tag{7.5}$$

Отсюда следует, что плотность потока лучистой энергии во всем пространстве составляет

$$S = \frac{16\sigma a T_\infty^3}{\alpha r^2}\left[\frac{1}{3} - E_4(\alpha r) - \alpha r E_3(\alpha r)\right](T_a - T_\infty) \tag{7.6}$$

Как видно из полученного результата, поток лучистой энергии в условиях преобладающего влияния молекулярного переноса практически отсутствует в области $\alpha r \ll 1$. При $\alpha r \gg 1$ поток экспоненциально стремится к предельной величине, определяемой приближением лучистой теплопроводности и будет малой величиной порядка $(\mu\alpha)^{-2}S_\varkappa$.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов статьи.

Поступила 9 I 1968

Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. Кузнецов Е. С. Лучистое равновесие газовой оболочки, окружающей абсолютно черную сферу. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1951, № 3.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. 2. М., «Наука», 1966.