

## ТОРМОЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩИХ СГУСТКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО КАНАЛАМ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин

(Москва)

Движение плазменных сгустков в магнитных полях интенсивно изучается уже значительное время. Большой круг исследований в этом направлении был выполнен в связи с задачами инжекции плазмы в магнитном поле и удержания ее этим полем (см., например, [1,2]). В этих приложениях проводимость сгустков будет большой величиной, так что магнитные числа Рейнольдса  $R_m$  намного превышают единицу, и скорость диффузии магнитного поля достаточно мала.

Большое число проведенных работ по изучению нестационарных движений плазменных сгустков связано с проблемой создания движительных устройств (см., например, [3-7]). В этих исследованиях рассматривались вопросы преобразования электрической энергии, запасенной в разрядном контуре, в кинетическую энергию сгустка. В используемых теоретических моделях, как правило, предполагалось, что протекающий по сгустку ток распределяется либо равномерно, либо распадается на отдельные пинчи. Однако в большинстве случаев считалось, что ток по сгустку протекает прямолинейно.

В последнее время повышается интерес к другому аспекту проблемы движения плазменных сгустков, связанному с течением проводящего газа в ударных и электро-разрядных трубах, а также в каналах при генерировании электроэнергии в импульсном процессе. Для указанных движений характерно наличие перемещающихся фронтов, взаимодействующих с полем, и поэтому важное значение имеет изучение диффузии магнитного поля в сгусток и его торможения вследствие образования вихревых токов.

Диффузия магнитного поля в движущийся с постоянной скоростью недеформируемый сгусток исследовалась в [8]. В этой работе предполагалось, что магнитное поле — плоское, а движущееся тело представляет собой бесконечный цилиндр квадратного сечения, так что электрические токи протекают параллельно образующей цилиндра. В одномерной постановке движения проводящего поршня с постоянной скоростью между электродами рассматривались в работе [9].

Предлагаемая работа в отличие от указанных выше исследований посвящена изучению торможения сгустков в каналах, стенки которых либо всюду непроводящие, либо содержат два идеально проводящих участка (электрода), соединенных внешней нагрузкой. При таких условиях кинетическая энергия сгустка преобразуется в выделяемую внутри него джоулеву теплоту и электроэнергию, поступающую на внешнюю нагрузку. Существенным моментом в рассматриваемом процессе является образование замкнутых вихревых электрических токов в сгустке при его входе и выходе из магнитного поля. Именно возникновением вихревых токов объясняется торможение сгустка в канале с непроводящими стенками, когда полная энергия сгустка (сумма кинетической энергии и джоулева тепла) остается постоянной.

Заметим, что пространственные эффекты образования вихревых замкнутых токов подробно рассматривались при стационарном магнитогидродинамическом течении в каналах<sup>1</sup>. Нестационарные электрические поля при движении среды с проводимостью, зависящей от времени, изучались в [12]. В указанных работах распределение скорости газа предполагалось известным и не зависящим от взаимодействия с магнитным полем.

<sup>1</sup> См. обзорные работы [10,11].

В настоящем исследовании основной акцент переносится на вопросы динамики среды (ее торможения) в условиях, близких к тем, которые реализуются в электроразрядных установках и устройствах с импульсным генерированием электроэнергии при не очень (большой проводимости газа. Моделью среды будет недеформируемый сгусток проводящего газа, тормозящийся в канале в результате взаимодействия с магнитным полем.

1. Рассмотрим движение сгустка плазмы в цилиндрическом канале, помещенном во внешнее магнитное поле  $B_e$ . Предположим, что изменением величины и формы объема сгустка можно пренебречь (справедлива модель твердого тела)<sup>1</sup>. Будем также считать, что сгусток соприкасается со стенками канала, и его торцовые поверхности перпендикулярны к оси канала.

Уравнение движения сгустка имеет следующий вид:

$$M \frac{dV}{dt} = f_{\Sigma}, \quad f_{\Sigma} = \int_{X-l}^{X(t)} \int_F f_x dF dx \quad (1.1)$$

Здесь  $M$  и  $l$  — масса и длина сгустка;  $V(t)$  — его скорость вдоль  $x$ ;  $f_{\Sigma}(t)$  — суммарная осевая сила, действующая на сгусток;  $f_x(x, t)$  — объемная плотность сил;  $X(t)$  — положение передней торцовой поверхности и  $F = \text{const}$  — площадь поперечного сечения канала.

Предположим, что сила трения сгустка о стенки канала и сопротивление внешней среды значительно меньше электромагнитных сил. В этом случае

$$f_x = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  — векторы магнитного поля и плотности электрического тока,  $c$  — скорость света в вакууме.

Умножая уравнение (1.1) на величину  $V$ , получаем

$$MV \frac{dV}{dt} = -A, \quad A = - \int_{X-l}^X \int_F f_x V dF dx \quad (1.3)$$

Величина  $A$  представляет собой работу сгустка (за единицу времени) по преодолению сопротивления магнитного поля.

Интегрируя (1.3) по времени от  $t = t_1$ , при котором сгусток находился вне зоны магнитного поля и обладал скоростью  $V_*$ , до текущего момента  $t > t_1$ , находим

$$\frac{1}{2} MV^2 + \int_{t_1}^t A(t) dt = \frac{1}{2} MV_*^2$$

Таким образом, сумма кинетической энергии сгустка и выполненной им работы по преодолению сопротивления магнитного поля остается постоянно

<sup>1</sup> В случае, когда время взаимодействия сгустка с полем имеет порядок  $l/V$  ( $l$  и  $V$  — длина и скорость сгустка), модель твердого тела применима, если скорость распространения возмущений в плазме намного меньше  $V$ .

Для того, чтобы определить скорость сгустка  $V(t)$ , необходимо в каждый момент времени знать распределение  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$  в области  $X - l < x < X$ . Для нахождения последних служат уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B}_i &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B}_i &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t}, & \mathbf{j} &= \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_e &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B}_e &= 0, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_e(x, y, z) + \mathbf{B}_i(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

В этих уравнениях  $\mathbf{B}_i$  и  $\mathbf{B}_e$  — индуцированное и приложенное (стационарное) магнитное поле,  $\mathbf{E}$  — вектор электрического поля. При записи уравнений (1.4) предполагалось, что диэлектрическая постоянная среды  $\varepsilon = \text{const}$ ; магнитная проницаемость принята равной единице.

Используя закон Ома (четвертое соотношение в (1.4)), выражение (1.3) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= - \int_{X-l}^X \int_F f_x V dF dx = - \int_{X-l}^X \int_F \left( \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) \mathbf{v} dF dx = \\ &= \int_{X-l}^X \int_F \left( \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{E} \right) \mathbf{j} dF dx = Q + N \\ Q &= \int_{X-l}^X \int_F \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dF dx, & N &= - \int_{X-l}^X \int_F \mathbf{j} \mathbf{E} dF dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины  $Q$  и  $N$ , соответственно, представляют джоулеву диссипацию (в единицу времени) в сгустке и отводимую от него электрическую мощность.

После введения векторного потенциала  $\Omega$  по формуле  $\mathbf{B}_i = \operatorname{rot} \Omega$  выражение для мощности  $N$  преобразуется к следующему виду

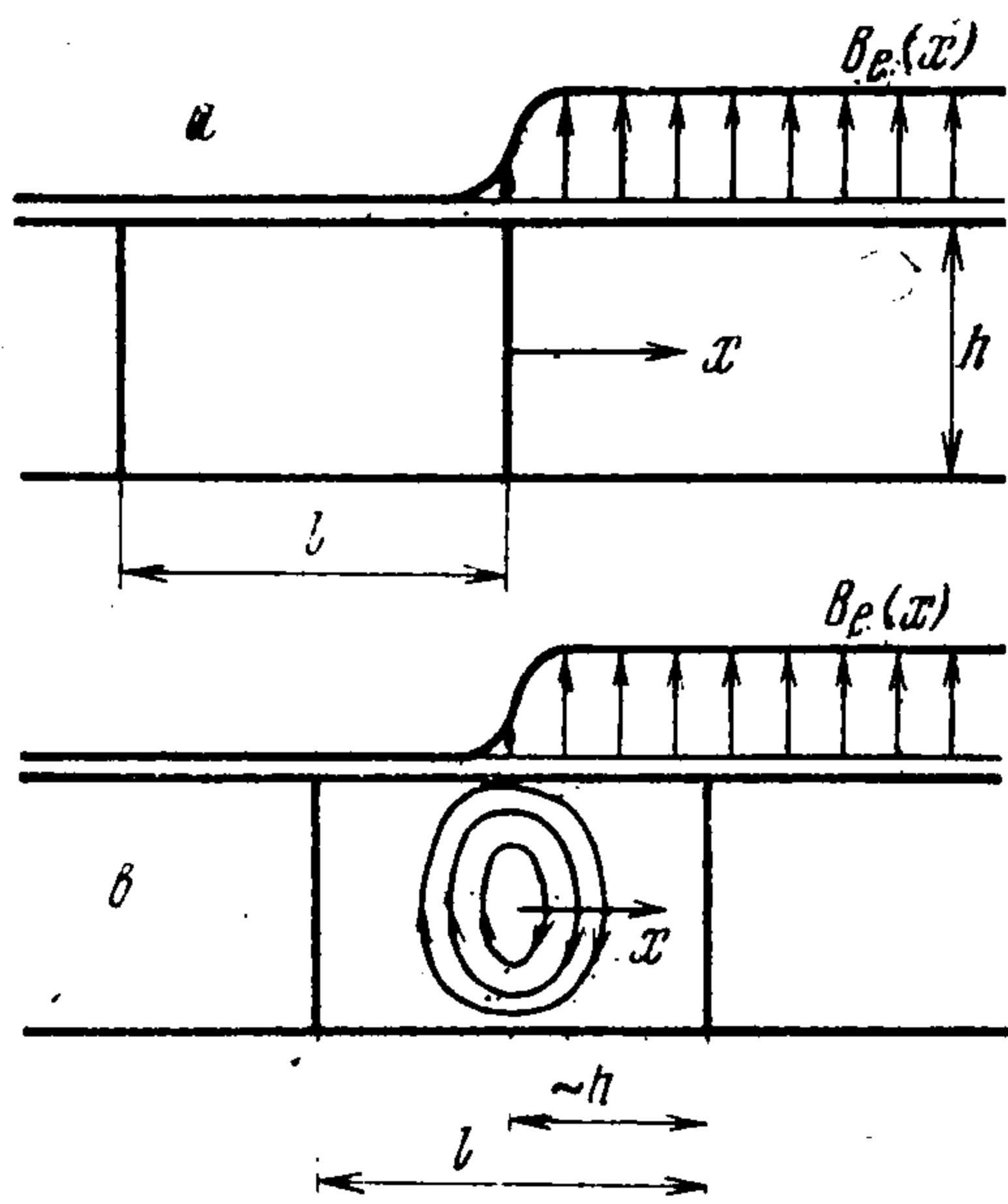
$$\begin{aligned} N &= \int_{X-l}^X \int_F \mathbf{j} \left( \nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) dF dx = \\ &= \int_{X-l}^X \int_F \left( \operatorname{div} \varphi \mathbf{j} - \varphi \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \mathbf{j} \right) dF dx = N_c + N_i \\ N_c &= \int_{\Sigma} \varphi j_n d\Sigma, & N_i &= \int_{X-l}^X \int_F \left( \frac{\varepsilon \varphi}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \mathbf{j} \right) dF dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\varphi$  — электрический потенциал. При получении этих формул использовалось первое соотношение в (1.4). Величины  $N_i$  и  $N_c$  представляют собой энергии, которые сгусток теряет в единицу времени индуктивным путем ( $N_i$ ) и в результате отвода энергии через стенки канала ( $N_c$ ).

Оценим порядок величины членов, входящих в формулы (1.4) — (1.6). Нетрудно заметить, что отношение членов, содержащих и не содержащих производную  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , имеет порядок  $\varepsilon_1 = \varepsilon / 4\pi \sigma_* t_*$  (нижним индексом —

звездочка — здесь и в дальнейшем отмечаются характерные значения параметров). В изучаемых задачах, характеризующихся условиями  $\sigma_* \approx 10^{-1} \div 10^2$  мо/см и  $t_* \geq 10^{-9}$  сек, величина  $\varepsilon_1$  намного меньше единицы, и, таким образом, в уравнениях электродинамики можно пренебречь токами смещения.

Перейдем к оценке нестационарного члена в третьем уравнении системы (1.4). Обратим внимание, что в рассматриваемом случае он связан с двумя процессами. Первый — это диффузия магнитного поля в движущееся



Фиг. 1

через него проводящее тело. Будем считать, что время диффузии намного меньше характерного пролетного времени  $l/V_*$ . При этом условии (а оно, как легко видеть, эквивалентно неравенству  $R_m(l) = 4\pi\sigma_*V_*l/c^2 \ll 1$ ) можно считать, что эффектами, связанными с образованием скин-слоя, можно пренебречь.

Второй процесс состоит в появлении индуцированного магнитного поля (в результате перемещения сгустка во внешнем магнитном поле, которое, по предположению, «сразу» просачивается в сгусток) и вызванного изменением  $B_i$  по  $t$  вихревого электрического поля  $E_v$ . Рассмотрим, например,

движение сгустка в канале с непроводящими стенками при наличии поперечного магнитного поля, геометрия которого показана на фиг. 1. В положении *a* (фиг. 1) поле  $B_i$  в сечении  $x = 0$  близко к нулю. Однако, когда передний фронт сгустка пройдет расстояние  $h$  (по порядку величины равное поперечному размеру канала), сформировавшийся вихревой электрический ток создаст максимальное индуцированное магнитное поле. Отношение  $E_v$  к характерной величине  $V_*B_*/c$  определяется параметром

$$\varepsilon_2 = R_m(h) h/V_*t_*, \quad R_m(h) = 4\pi\sigma_*V_*h/c^2$$

Нетрудно видеть, что характерное время этого процесса имеет порядок  $h/v_*$  и поэтому  $\varepsilon_2 \approx R_m(h)$ .

В дальнейшем будет предполагаться, что  $R_m(h) \ll 1$ , и, следовательно, в уравнениях электродинамики можно пренебречь членами, содержащими производные по времени от  $B$  и  $\Omega$ . Вектор электрического тока при этом становится потенциальным ( $E = -\nabla\phi$ ), а в законе Ома величина  $B$  заменяется на  $B_e$ . Между интегральными характеристиками имеет место соотношение

$$A = Q + N_c \quad (1.7)$$

Формула (1.7) показывает, что если к сгустку извне не подводится энергия ( $N_c \geq 0$ ), то величина  $A$  всегда положительна и сгусток тормозится магнитным полем. При движении сгустка в канале с непроводящими стенками  $A = Q$ .

Упрощенная система уравнений электродинамики является квазистационарной. После применения операции  $\text{div}$  к четвертому соотношению в (1.4) она сводится к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, & \mathbf{j} &= \sigma \left( -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_e \right) \\ j_x &= 0 & \text{при } x &= X-l, \quad x = X \end{aligned} \quad (1.8)$$

К указанным условиям в торцевых сечениях необходимо добавить условия на границе сгустка со стенками канала.

Уравнения (1.8) совпадают с системой уравнений, которая описывает стационарное распределение электрического поля в каналах МГД устройств и уже изучалась во многих работах [10,11]. Это дает возможность при получении решения уравнений (1.8) в ряде случаев использовать уже имеющиеся результаты.

Предположим, что граничные условия (которые в зависимости от типа задачи могут записываться как в дифференциальной, так и в интегральной форме) содержат только одну новую (не входящую в систему (1.8)) величину — внешнее сопротивление  $R$ . Согласно (1.8), интегральные электрические характеристики  $A$ ,  $Q$  и  $N_c$  при фиксированной геометрии магнитного поля в этом случае будут функциями величин:  $\sigma$ ,  $1/cVB_*$ ,  $h$ ,  $X$ ,  $l$ ,  $2a$ ,  $R$  ( $h$  и  $2a$  — характерные размеры канала в направлениях  $y$  и  $z$ ). Поэтому на основании теории подобия и размерностей [13] имеем

$$A = \frac{2a\sigma V^2 B_*^2 h^2}{c^2} S\left(\eta, \frac{l}{h}, \frac{2a}{h}, 2aR\sigma\right) \quad \left(\eta = \frac{X}{h}\right) \quad (1.9)$$

Подставляя это выражение в (1.3) и замечая, что  $dV/dt = VdV/dX$ , после перехода к безразмерным переменным получаем

$$\frac{du}{d\eta} = -\delta S\left(\eta, \frac{l}{h}, \frac{2a}{h}, 2aR\sigma\right) \left(u = \frac{V}{V_*}, \eta = \frac{X(t)}{h}, \delta = \frac{\sigma B_*^2 h^3 2a}{c^2 M V_*}\right) \quad (1.10)$$

Входящая в это уравнение величина  $\delta$  представляет собой параметр МГД взаимодействия;  $\eta$  — безразмерная координата передней торцевой поверхности сгустка.

Интегрируя уравнение (1.10) с использованием граничного условия  $u(-\infty) = 1$ , согласно которому слева на бесконечности отсутствует взаимодействие сгустка с магнитным полем, находим

$$u = 1 - \delta T(\eta), \quad u^* = \frac{1-u}{\delta}, \quad T(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} S(\eta) d\eta \quad (1.11)$$

Если сгусток движется по каналу с непроводящими стенками ( $A = Q$ ), то величина  $S$  представляет собой безразмерную джоулеву диссипацию в сгустке, занимающем положение  $X-l < x < X$ . Сгусток тормозится только вследствие джоулева тепловыделения.

Если на стенке канала в некоторой области установлены электроды, соединенные внешней нагрузкой  $R$ , то торможение сгустка происходит как вследствие джоулева тепловыделения, так и выделения электроэнергии во внешнем контуре.

2. Будем предполагать, что движение сгустка происходит в канале  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < h = \text{const}$ ,  $|z| < 2a = \text{const}$  с непроводящими стенками в случае внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_e = (B_x(x, z), 0, B_z(x, z))$ . Такое поле может, например, создаваться электромагнитом, размеры полюсов которого в направлении  $y$  превосходят высоту канала  $h$ .

После усреднения системы (1.8) по координате  $z$  получаются двумерные уравнения относительно усредненных токов и потенциала [10, 11], которые (для облегчения записи средние величины будем обозначать прежними буквами) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad j_x = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad j_y = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{c} VB \quad (2.1)$$

$$j_x = 0 \quad \text{при } x = X, \quad x = X - l \quad (0 < y < h) \quad (2.2)$$

$$j_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = h \quad (X - l < x < X)$$

В этой системе величина  $B = B(x)$  представляет собой усредненную по  $z$  компоненту поля  $B_z(x, z)$ .

Так как  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , то можно ввести безразмерную «функцию тока»  $\Phi$ , определяемую соотношениями

$$j_x = \frac{cB_*}{4\pi h} \frac{\partial \Phi}{\partial (y/h)}, \quad j_y = -\frac{cB_*}{4\pi n} \frac{\partial \Phi}{\partial (x/n)} \quad (2.3)$$

Величина  $B_*\Phi$  представляет собой индуцированное магнитное поле. Перейдем к безразмерным переменным

$$x^\circ = \frac{x}{h}, \quad y^\circ = \frac{y}{h}, \quad \mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} VB_* \mathbf{j}^\circ, \quad \Phi = \frac{h}{c} VB_* \Phi^\circ$$

$$B(x) = f(x^\circ) B_*, \quad X = \eta h, \quad l = hb \quad (2.4)$$

Опуская для простоты записи индекс нуль у безразмерных величин, из (2.1), (2.2) получим следующую краевую задачу для функции  $\Phi$ :

$$\Delta \Phi = R_m \frac{df}{dx} \quad \left( R_m = \frac{4\pi}{c^2} \sigma V h \right) \quad (2.5)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = 1 \quad (\eta - b < x < \eta); \quad x = \eta - b, \quad x = \eta \quad (0 < y < 1)$$

Общее решение системы (2.5) можно построить в виде тригонометрических рядов. Окончательный результат имеет вид

$$\Phi(x, y) = R_m \sum_{v=1}^{\infty} \Phi_v(x) \sin 2r_v y, \quad r_v = \frac{\pi}{2} (2v - 1) \quad (2.6)$$

$$\Phi_v(x) = A_v \text{ch } 2r_v x + B_v \text{sh } 2r_v x + \frac{1}{2r_v^2} \left\{ \exp(2r_v x) \int_{\eta}^x \frac{df}{dx} \exp(-2r_v x) dx - \right.$$

$$\left. - \exp(-2r_v x) \int_{\eta-b}^x \frac{df}{dx} \exp(2r_v x) dx \right\}$$

$$A_v = \frac{1}{\text{sh } 2r_v b} [\alpha_v \text{sh}(2r_v \eta) + \beta_v \text{sh}[2r_v(b - \eta)]],$$

$$B_v = \frac{1}{\text{sh } 2r_v b} [\beta_v \text{ch } [2r_v (b - \eta)] - \alpha_v \text{sh } (2r_v \eta)]$$

$$\alpha_v = \frac{\exp[-2r_v (b - \eta)]}{2r_v^2} \int_{\eta-b}^{\eta} \frac{df}{dx} \exp(-2r_v x) dx, \quad (2.7)$$

$$\beta_v = \frac{\exp(-2r_v \eta)}{2r_v^2} \int_{\eta-b}^{\eta} \frac{df}{dx} \exp(2r_v x) dx$$

Функция  $S(\eta)$  определяется выражением

$$S(\eta) = - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v} \int_{\eta-b}^{\eta} \Phi_v \frac{df}{dx} dx \quad (2.8)$$

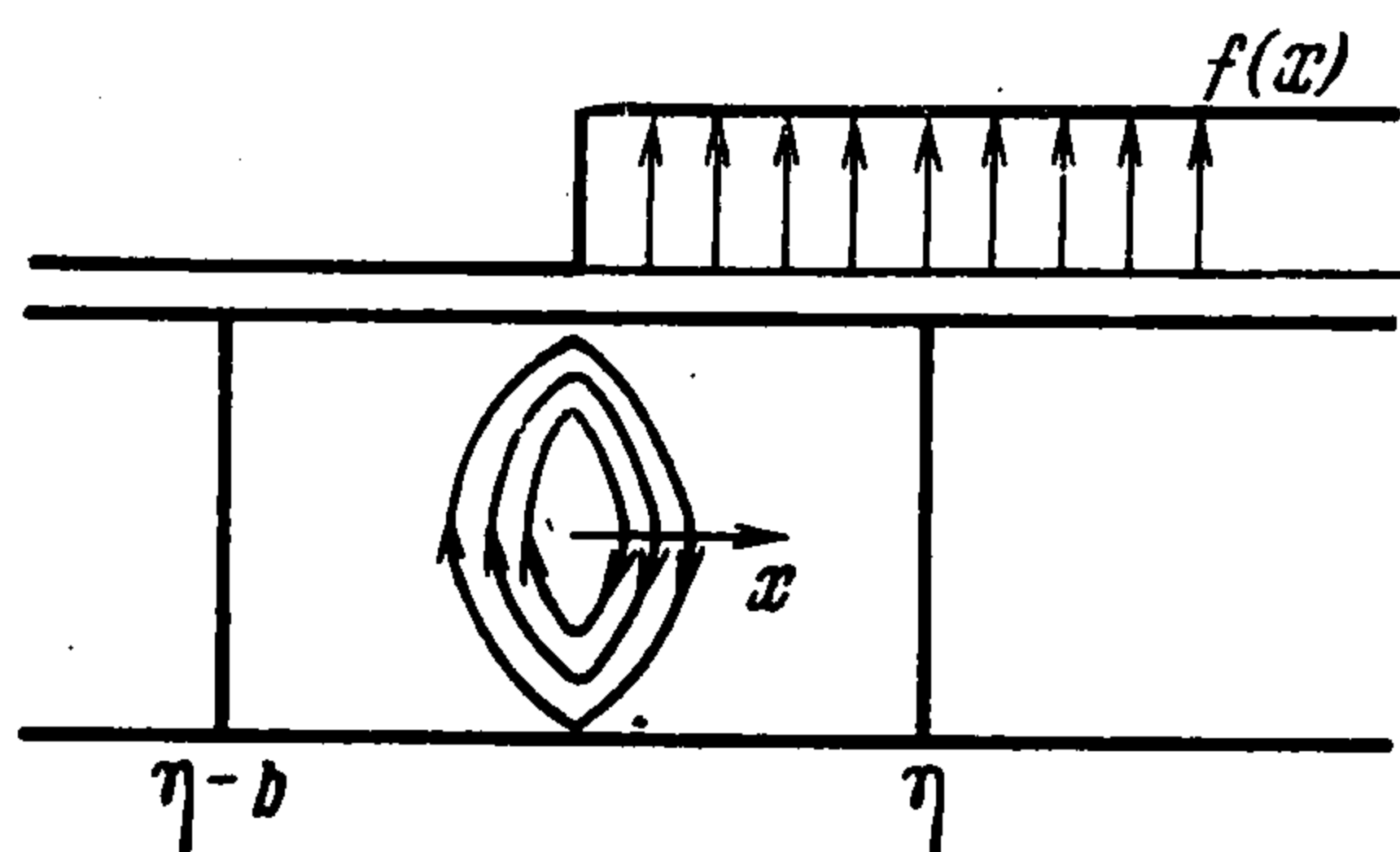
Рассмотрим две конфигурации магнитного поля:

$$f(x) = H(x) \quad (2.9)$$

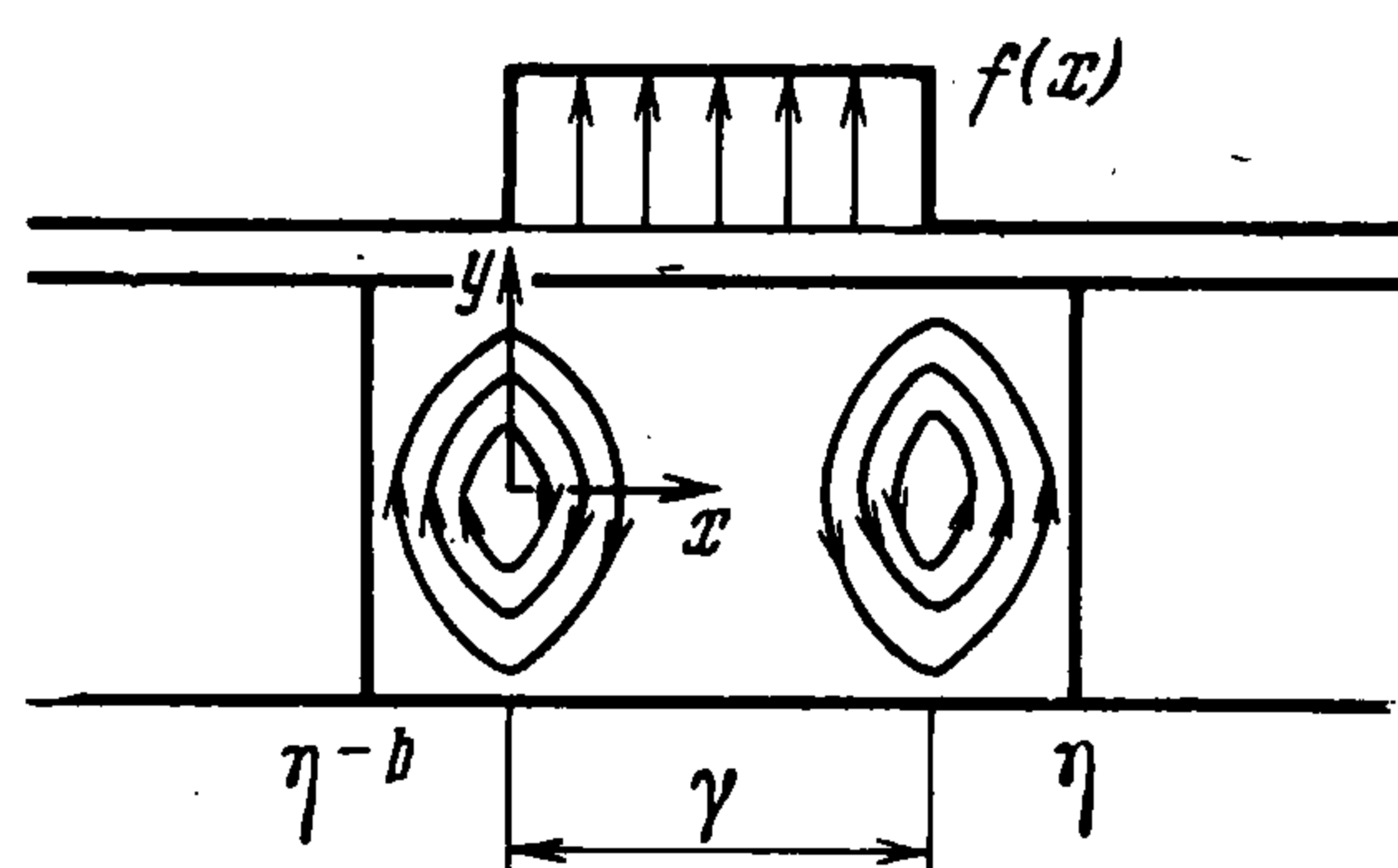
$$f(x) = H(x) - H(x - \gamma) \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь функция  $H(x)$  будет единичной функцией Хэвисайда, а величина  $\gamma$  представляет собой безразмерную длину участка однородного магнитного поля.

Зависимости (2.9) и (2.10) представлены на фиг. 2 и 3.



Фиг. 2



Фиг. 3

Производные функции  $f$  и величина  $S$  в этих случаях представляются формулами

$$f'(x) = \delta(x), \quad S(\eta) = - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\Phi_v(0)}{r_v} \quad (2.11)$$

$$f'(x) = \delta(x) - \delta(x - \gamma), \quad S(\eta) = - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v} [\Phi_v(0) - \Phi_v(\gamma)] \quad (2.12)$$

Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

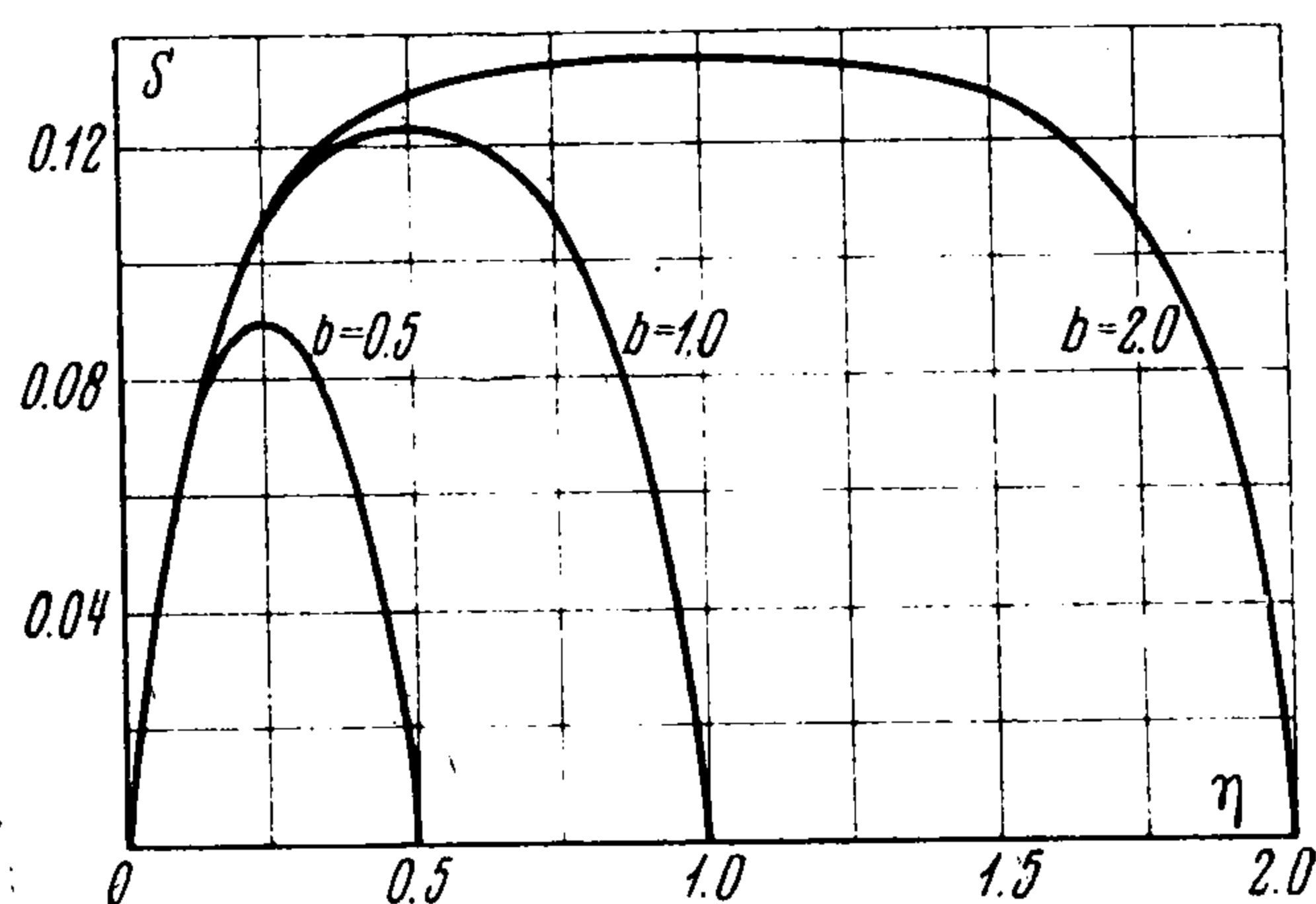
Формулы (2.11) соответствуют зависимости (2.9), а (2.12) — зависимости (2.10).

Исследуем зависимости  $S(\eta)$  в случае магнитного поля (2.9). Если  $\eta < 0$  или  $\eta > b$  (сгусток находится либо вне магнитного поля, либо целиком лежит в магнитном поле), то джоулева диссипация равна нулю ( $S = 0$ ). Когда  $\eta < 0$ , электрическое поле в сгустке равно нулю. Если

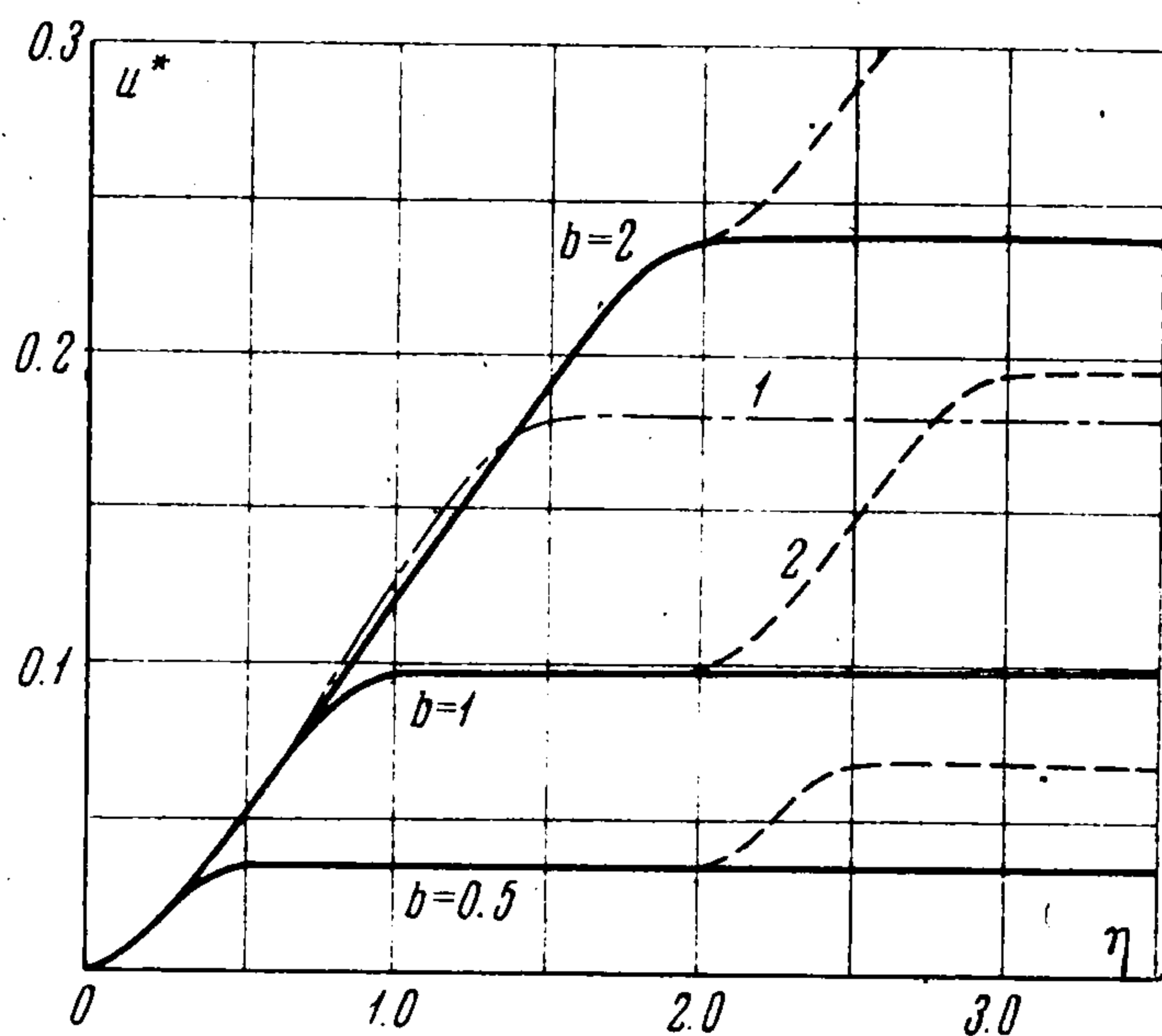
$\eta > b$  и сгусток располагается в зоне однородного поля, в нем происходит разделение электрического заряда и  $\mathbf{j} \equiv 0$ . Джоулева диссипация отлична от нуля, только когда сгусток пересекает сечение  $x = 0$ . Величина  $S$  в этом случае определяется формулой

$$S = S_1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(2r_v \eta) \text{sh}[2r_v(b - \eta)]}{r_v^3 \text{sh} 2r_v b} \quad (0 \leq \eta \leq b) \quad (2.13)$$

Функция  $S(\eta)$  возрастает от  $S(0) = 0$  до  $S = S_{\max}$  при  $\eta = \frac{1}{2} b$  и затем опять убывает до нуля. Зависимости  $S_1(\eta)$  при различных  $b$  приведены на фиг. 4. С увеличением длины сгустка величина джоулевой диссипации возрастает.



Фиг. 4



Фиг. 5

Функция  $T(\eta)$ , определяемая формулой (1.11), имеет вид

$$T = 0 \quad \text{при } \eta < 0$$

$$T = T_1(\eta) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2r_v \eta \text{ch}(2r_v b) - \text{sh}(2r_v \eta) \text{ch}(b - \eta)}{4r_v^4 \text{sh}(2r_v b)} \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq b \quad (2.14)$$

$$T = T_1(b) \quad \text{при } \eta \geq b$$

Рассмотрим теперь электрическое поле в сгустке в случае магнитного поля (2.10). При этом возможны две ситуации:  $\gamma > b$  и  $\gamma < b$ .

Если зона магнитного поля длиннее сгустка ( $\gamma > b$ ), то распределение тока можно найти с помощью ранее рассмотренного случая. Действительно, имеем

$$S = \begin{cases} 0 & (\eta < 0) \\ S_1(\eta) & (0 < \eta < b) \\ 0 & (b < \eta < \gamma) \\ S_1(\gamma - \eta + b) & (\gamma < \eta < \gamma + b) \\ 0 & (\eta > \gamma + b) \end{cases}, \quad T = \begin{cases} 0 & (\eta < 0) \\ T_1(\eta) & (0 < \eta < b) \\ T_1(b) & (b < \eta < \gamma) \\ 2T_1(b) - T_1(\gamma - \eta + b) & (\gamma < \eta < \gamma + b) \\ 2T_1(b) & (\eta > \gamma + b) \end{cases} \quad (2.15)$$

Когда зона магнитного поля меньше длины сгустка, необходимы данные о джоулевой диссипации в положении, указанном на фиг. 3.

На основании общего решения (2.6), (2.7) и формулы (2.12) находим

$$S = S_2(\eta) = 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\text{sh } r_v \gamma}{r_v^3 \text{sh } 2r_v b} [\text{sh } [r_v (2b - \gamma)] - \text{sh } (r_v \gamma) \text{ch } [2r_v (b + \gamma - 2\eta)]]$$

$$(\gamma < \eta < b + \gamma) \quad (2.16)$$

$$T_2(\eta) = \int_{\gamma}^{\eta} S_2(\eta) d\eta = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\text{sh } r_v \gamma}{r_v^4 \text{sh } (2r_v b)} \{(\eta - \gamma) 2r_v \text{sh } [r_v (2b - \gamma)] -$$

$$- \text{sh } (r_v \gamma) \text{sh } [2r_v (\eta - \gamma)] \text{ch } [2r_v (b - \eta)]\} \quad (2.17)$$

$$T(\eta) = \begin{cases} 0 & (\eta < 0) \\ T_1(\eta) & (0 < \eta < \gamma) \\ T_1(\gamma) + T_2(\eta) & (\gamma < \eta < b) \\ 2T_1(\gamma) + T_2(b) - T_1(\gamma - \eta + b) & (b < \eta < b + \gamma) \\ 2T_1(\gamma) + T_2(b) & (\eta > b + \gamma) \end{cases} \quad (2.18)$$

На фиг. 5 изображены зависимости  $u^* = \delta^{-1} (1 - u)$ , рассчитанные по формулам (2.14) для магнитного поля (2.9) при нескольких длинах сгустка  $b$  (сплошные кривые). Все кривые при малых  $\eta$  практически совпадают одна с другой. Таким образом, при  $b \sim 1$  торможение сгустка на первом этапе, когда он входит в зону магнитного поля, слабо зависит от его длины. В дальнейшем торможение длинных сгустков происходит более интенсивно и заканчивается позже (при больших значениях  $\eta$ ) по сравнению с короткими сгустками.

Изменение скорости сгустка при магнитном поле (2.10) и условия  $b < \gamma$  показано на фиг. 5 пунктирными кривыми. Расчеты проводились по формуле (2.15) при  $\gamma = 2$ . В диапазоне  $0 < \eta < 2$  сплошные и пунктирные кривые совпадают одна с другой. Торможение возрастает с увеличением длины сгустка. При  $b = 2$  сгусток в области  $0 < \eta < 4$  тормозится непрерывно. Если  $b < 2$ , то определенный участок пути сгусток проходит с постоянной скоростью.

На фиг. 5 приведена также зависимость  $u^*(\eta)$  для магнитного поля (2.10), рассчитанная при  $\gamma = 0.5$ ,  $b = 1$  (штрих-пунктирная кривая 1). Так как сгусток длиннее зоны магнитного поля, его торможение происходит непрерывно, и при  $0.5 < \eta < 1$  в сгустке возникают две области вихревых токов — на входе и выходе из поля.

Сопоставим кривые 1 и 2 (кривая 2 соответствует движению сгустка длины  $b = 1$  в магнитном поле с протяженностью  $\gamma = 2$ ). При  $\eta < 0.5$  эти кривые совпадают. Далее при  $0.5 < \eta < 1$  кривая 1 проходит выше кривой 2, что объясняется образованием второй вихревой зоны в сгустке при  $\gamma = 0.5$ . Когда  $\eta$  лежит в диапазоне (1, 1.5), расхождение кривых еще более возрастает, так как, если  $\gamma = 2$ , сгусток целиком попадает в зону однородного магнитного поля и движется равномерно. Однако, если  $\gamma = 0.5$ , то при  $\eta > 1.5$  сгусток полностью выходит из зоны магнитного поля и далее не тормозится, в то время как при  $\gamma = 2$  и  $2 < \eta < 3$  сгусток опять начинает тормозиться магнитным полем. Поэтому суммарное уменьшение скорости в случае длинного магнитного поля оказывается больше.

3. Рассмотрим движение сгустка в канале прямоугольного сечения  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < h$ ,  $|z| < 2a$  с непроводящими стенками, за исключением участков  $0 < x < \gamma h$ ,  $y=0$ ,  $|z| < 2a$  и  $0 < x < \gamma h$ ,  $y=h$ ,  $|z| < 2a$ , которые будут электродами, соединенными нагрузкой  $R$ . Предположим, что внешнее магнитное поле имеет такую же структуру, как в п.2, и после усреднения по координате  $z$  безразмерная компонента поля  $B_z(x, z)$  определяется формулой (2.10). Таким образом, рассматривается случай, когда электродная зона совпадает с областью магнитного поля (фиг. 6).

Распределение усредненных по  $z$  параметров в плоскости  $x, y$  описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\sigma}{c} V B_* f \quad (3.1)$$

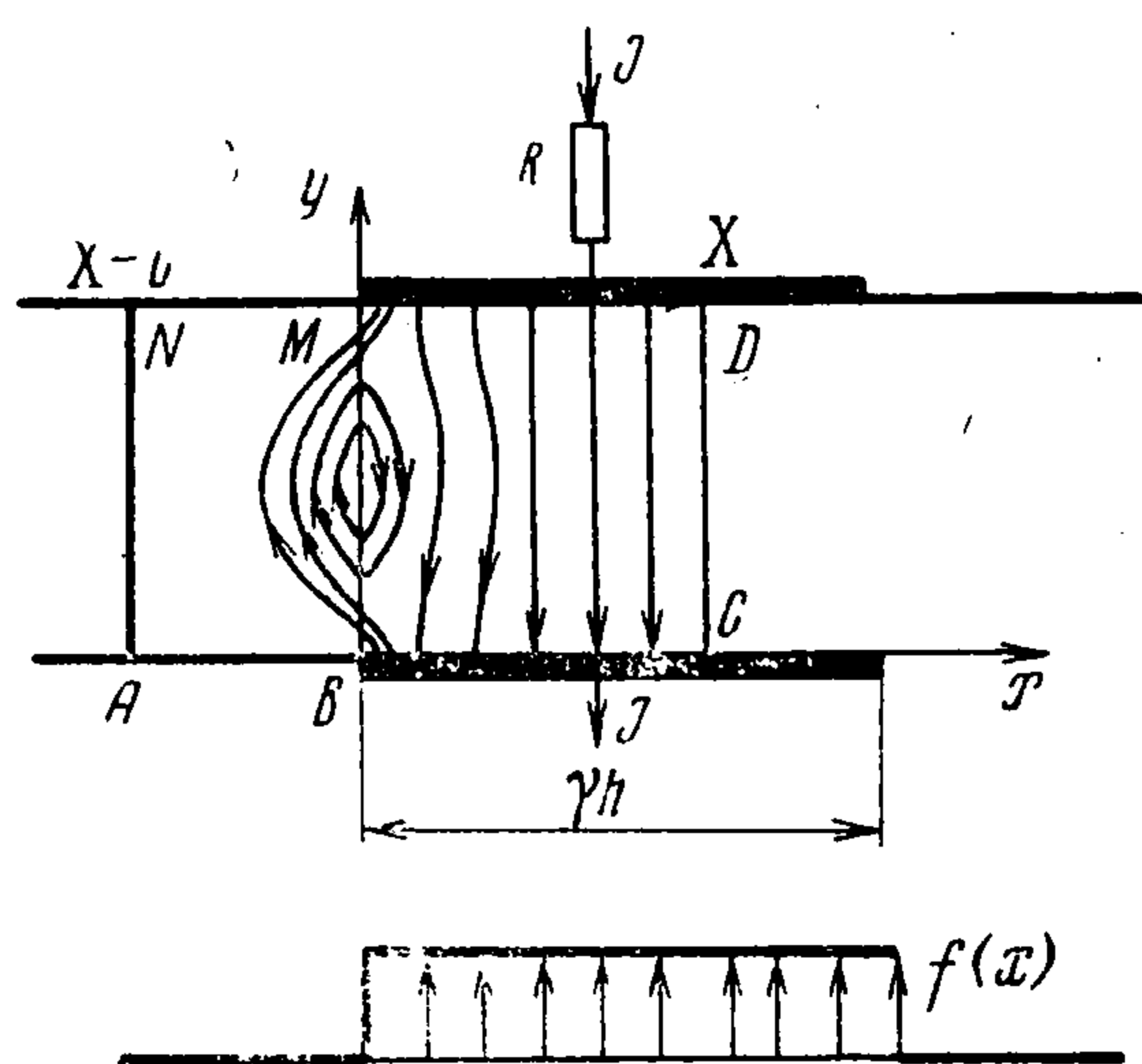
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = X, \quad x = X - l$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на } AB, NM; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{на } BC, MD$$

$$\varphi_{BC} - \varphi_{MD} = JR \quad \left( J = -2a \int_{BC} j_y(x, 0) dx \right) \quad (3.2)$$

В соотношениях (3.2) величины  $\varphi_{BC}$  и  $\varphi_{MD}$  будут потенциалами нижнего и верхнего электродов.

Кроме указанной на фиг. 6 ситуации, возможна другая, когда сгусток



Фиг. 6

граничит только со стенками — электродами (при  $l < \gamma h$  и  $l < X < \gamma h$ ). В этом случае распределение тока в сгустке однородно.

Аналогичным образом формулируется краевая задача о распределении электрического поля в сгустке, когда он выходит из электродной зоны (совпадающей с зоной магнитного поля).

В работах [14-10] было показано, что краевую задачу (3.1) можно свести к более простой, которая состоит в определении эффективного внутреннего сопротивления

$R_i$  участка  $ABCDMN$  при пропускании через электроды  $BC$  и  $MD$  электрического тока в отсутствие магнитного поля. Величина  $R_i$  представляется в виде

$$R_i = (2a\sigma\Phi)^{-1} \quad (3.3)$$

где  $\Phi$  — функция, зависящая от геометрических параметров  $q$  и  $b=l/h$  ( $q$  — безразмерная длина участка электрода, соприкасающегося со сгустком). При входе сгустка в область поля будем иметь  $q=\eta$ . Для значений  $l < \gamma h$  и  $l < X < \gamma h$  имеем  $q=b=\text{const}$ .

Используя методы, развитые в [14], можно показать, что протекающий через сгусток электрический ток  $J$  определяется формулой:

$$J = (2a/c)\sigma q V B_* - 2a\sigma U \Phi, \quad U = \varphi_{BC} - \varphi_{MD} \quad (3.4)$$

При условии (3.2) находим

$$K = \frac{Uc}{VB_*h} = \frac{qr}{1+r\Phi}, \quad r = 2aR\sigma \quad (3.5)$$

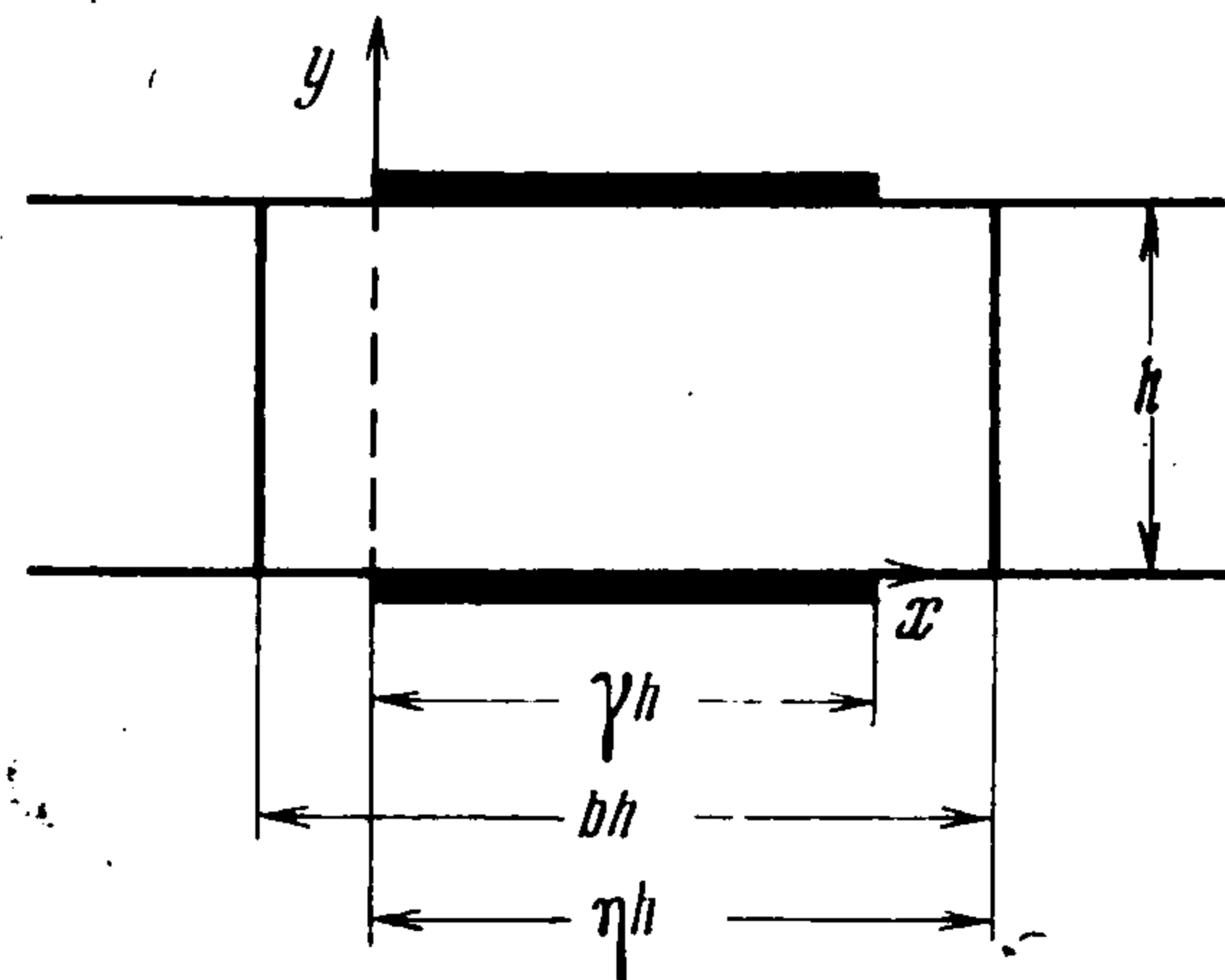
Функция  $K$  зависит от аргумента  $q$ , который меняется при перемещении сгустка, и постоянных параметров  $r$  и  $b$ . Параметр  $r$  характеризует величину внешней нагрузки.

Величина  $A$ , определяемая формулой (1.7), представляется в виде

$$A = \frac{2a}{c^2} \sigma B_*^2 V^2 h^2 q (1 - K) \quad (3.6)$$

Таким образом, функция  $S$ , которая входит в соотношения (1.9) — (1.11), имеет вид

$$S = \frac{q [1 + r(\Phi - q)]}{1 + r\Phi} \quad (3.7)$$



Фиг. 7

Приведем формулы для определения величины  $\Phi$ . Когда сгусток занимает положение, показанное на фиг. 6, то, используя результаты работы [15], находим

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{K'(\mu)}{K(\mu)}, \quad \mu = \left( \frac{1-k^2}{1-p^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{1}{2b} = \frac{K'(k)}{K(k)} \quad (3.8)$$

$$F(\alpha, k) = \frac{\eta}{b} K(k) \quad \left( \alpha = \arccos \left[ \frac{p}{k} \left( \frac{1-k^2}{1-p^2} \right)^{1/2} \right] \right)$$

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) \quad (3.9)$$

В этих формулах  $F(\theta, k)$  и  $K(k)$  — неполный и полный эллиптические интегралы первого рода соответственно.

Третье соотношение в (3.8) представляет собой уравнение для определения величины  $k = k(b)$ , а из четвертого — находится  $p = p(b, \eta)$ .

Если же сгусток находится в электродной зоне, то  $\Phi = q$ .

Когда сгусток выходит из электродной зоны ( $\eta > \gamma$ ,  $0 < \eta - b < \gamma$ ), то  $\Phi$  выражается формулами (3.8), (3.9), в которых величина  $\eta$  заменяется на  $\gamma + b - \eta$ ; и наконец, если сгусток длиннее электродной зоны, то возможно его положение, показанное на фиг. 7, для которого

$$\Phi = \frac{F(\theta_1, d) + F(\theta_2, d)}{2K(\tau)}, \quad \sin \theta_1 = \sqrt{1/2(1+p)}, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{1/2(1+\kappa)}$$

$$d = \sqrt{\frac{2(\kappa+p)}{(1+p)(1+\kappa)}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{(1-p)(1-\kappa)}{(1+p)(1+\kappa)}} \quad (3.10)$$

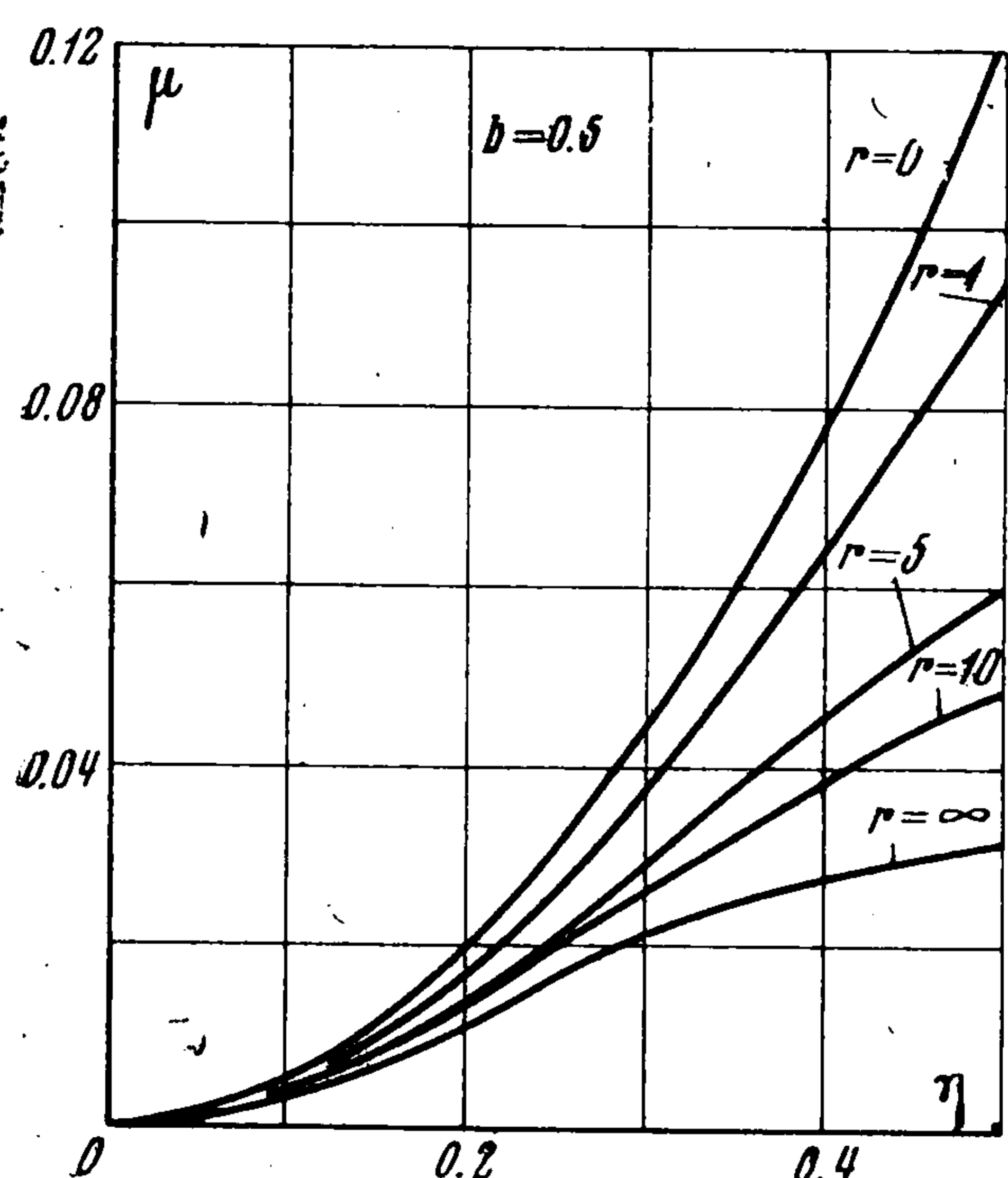
$$\frac{1}{b} = \frac{K'(k)}{K(k)}, \quad F\left\{\arccos \frac{p}{k} \left( \frac{1-k^2}{1-p^2} \right)^{1/2}, k\right\} = \frac{2}{b} K(k) (b - \eta) \quad (3.11)$$

$$F\left\{\arccos \frac{\kappa}{k} \left( \frac{1-k^2}{1-\kappa^2} \right)^{1/2}, k\right\} = \frac{2}{b} K(k) (\eta - \gamma)$$

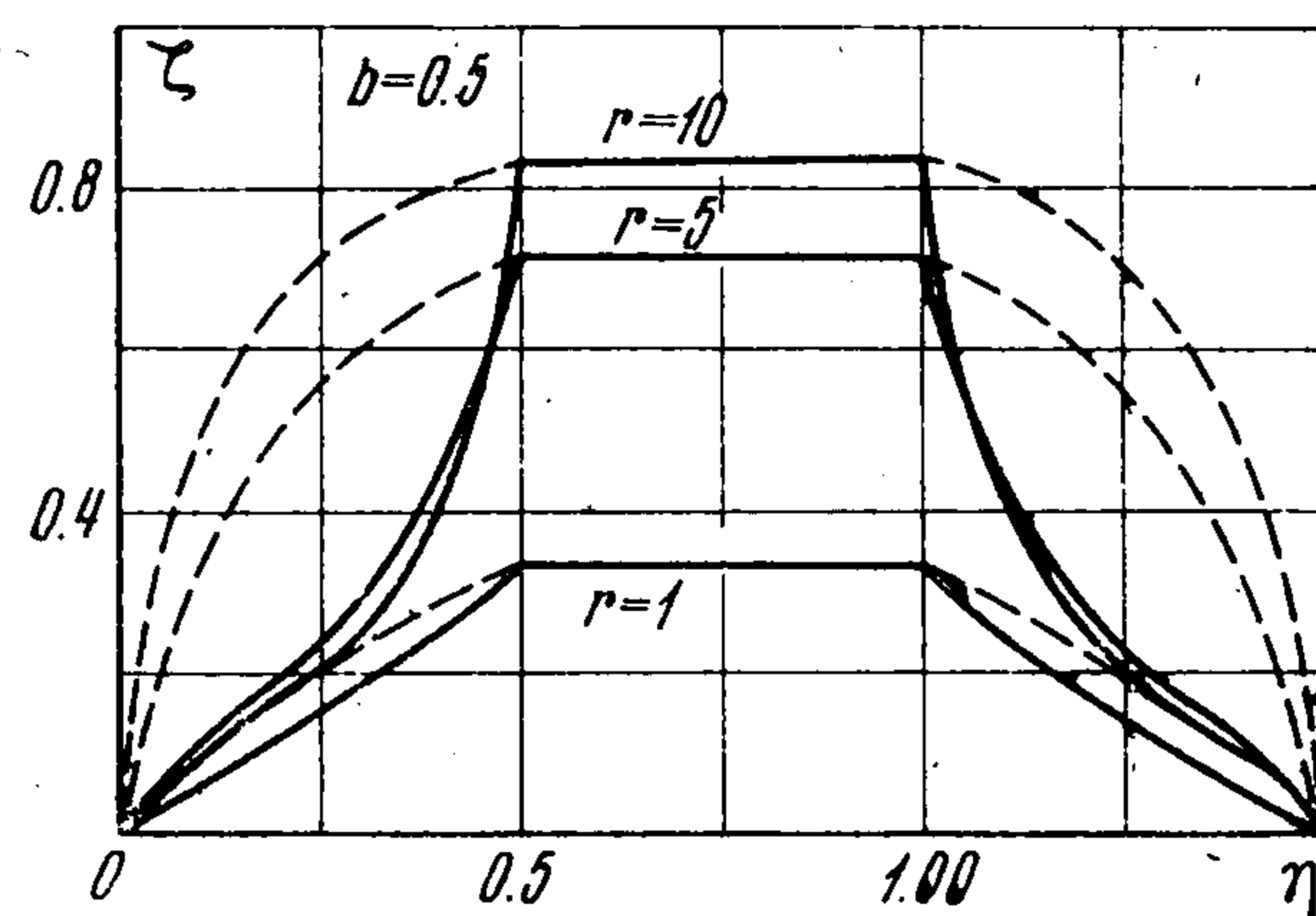
Здесь уравнения (3.11) позволяют последовательно определить <sup>1</sup> величины  $k$ ,  $p$  и  $\kappa$ .

Нетрудно заметить, что  $\partial S / \partial r < 0$ , т. е. с уменьшением внешнего сопротивления от  $R = \infty$  до  $R = 0$  величина  $S$  монотонно возрастает от  $S = q [1 - (q/\Phi)]$  до  $S = q$ .

Следовательно, максимальное торможение сгустка наблюдается в режиме короткого замыкания ( $R = 0$ ), а минимальное — при  $R = \infty$  (в режиме холостого хода). Однако даже в режиме холостого хода величина  $S$  больше, чем при том же положении сгустка в канале с непроводящими стенками. Это объясняется тем, что наличие проводящих участков стенок облегчает протекание циркуляционных токов в концевых зонах магнитного поля.



Фиг. 8



Фиг. 9

Рассмотрим случай, когда длина сгустка меньше зоны магнитного поля ( $b < \gamma$ ). Функция  $u^* = T(\eta)$ , определенная в (1.11), имеет вид

$$u^* = \frac{1}{2} \eta^2 - r \int_0^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{1+r\Phi} = \mu(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq b)$$

$$u^* = \mu(b) + \frac{b}{1+rb} (\eta - b) \quad (b \leq \eta \leq \gamma) \quad (3.12)$$

$$u^* = 2\mu(b) + \frac{b}{1+rb} (\gamma - b) - \mu(\gamma + b - \eta) \quad (\gamma \leq \eta \leq \gamma + b)$$

Функции  $\mu(\eta)$ , характеризующие торможение сгустка при его входе в электродную зону, представлены на фиг. 8. Далее, попадая в зону магнитного поля, сгусток движется с постоянной скоростью, если  $r = \infty$ , и его скорость линейно убывает с увеличением  $\eta$ , если  $r < \infty$ . Торможение сгустка при выходе из электродной зоны, как следует из (3.12), также описывается функцией  $\mu(\eta)$ .

<sup>1</sup> Формулы (3.10), (3.11) независимо были получены И. М. Руткевичем и Е. К. Холщевниковой.

При прохождении сгустка через электродную зону на внешней нагрузке выделяется электрическая мощность  $N$ , определяемая формулой

$$N = \frac{2a}{c^2} \sigma V^2 B_*^2 h^2 q^2 \frac{r}{(1+r\Phi)^2} \quad (3.13)$$

Суммарная электрическая энергия  $W$ , поступающая на внешнюю нагрузку за время прохождения сгустка через магнитное поле, и эффективность  $\xi$  преобразования энергии, представляющая собой отношение  $N/A$ , выражаются формулами

$$W = \frac{2a}{c^2} \sigma V_*^2 B_*^2 h^3 r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\eta) q^2(\eta) d\eta}{(1+r\Phi)^2}, \quad \xi = \frac{rq}{(1+r\Phi)[1+r(\Phi-q)]}$$

Зависимости  $\xi(\eta)$ , соответствующие условиям  $b=1$ ,  $\gamma=1$ , показаны на фиг. 9. Пунктирные кривые на этих графиках определяют эффективность генерирования электроэнергии без учета образования замкнутых вихревых токов.

Поступила 5 V 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование плазменных сгустков. Киев, «Наукова думка», 1965.
2. Исследование плазменных сгустков. Киев, «Наукова думка», 1967.
3. Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М., Чуватин С. А. Электродинамическое ускорение сгустков плазмы. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 1 (7), стр. 3—8.
4. Hart R. J. Plasma acceleration with coaxial electrodes. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 1.
5. Мусин А. К. О движении плазменного сгустка вдоль направляющих электродов. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 3.
6. Хижняк Н. А., Колесников П. М. К теории электродинамического ускорения плазменных сгустков в коаксиале. ЖТФ, 1963, т. 33, вып. 7.
7. Григорьев В. Н. Некоторые условия существования «пинчевой» структуры скин-слоя в плазме. ПМТФ, 1966, № 5.
8. Дегтярев Л. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Расчет магнитных полей в движущейся проводящей среде. Аннотации докл. Всес. III съезда по теорет. и прикл. механ. М., «Наука», 1968, стр. 113.
9. Бертинов А. И., Бут Д. А., Павлова К. Н. Движение проводящего поршня в магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1967, № 4, стр. 149—152.
10. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. Дополнение к книге Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода». М., «Мир», 1965, стр. 205—266.
11. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. М., ВНИИТИ, 1966.
12. Регирер С. А., Руткевич И. М. Электрическое поле в магнитогидродинамическом канале при движении среды с переменной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 29, № 5, стр. 871—878.
13. Седов Л. И. Методы теории подобия и размерностей в механике. Изд. 5., М., «Наука», 1965.
14. Ватажин А. Б., Немкова А. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора с непроводящими перегородками. ПМТФ, 1964, № 2, стр. 40—49.
15. Холщевникова Е. К. Интегральные характеристики магнитогидродинамического генератора с двумя парами электродов конечной длины. ПМТФ, 1964, № 4, стр. 16—22.