

РАСЧЕТ ВТОРИЧНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

С. Н. Овчинникова, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Исследовано возникновение вторичного стационарного течения — вихря Тейлора в результате потери устойчивости течением Куэтта между вращающимися (в одну сторону) цилиндрами. Применяется метод Ляпунова — Шмидта. Показано, что вторичное решение можно разыскивать в виде ряда по степеням параметра $\varepsilon = (N_{Re} - N_{Re*})^{1/2}$; здесь N_{Re} — число Рейнольдса, N_{Re*} — его критическое значение. Дается расчет первых двух членов ряда для двух случаев. Оказывается, что вихрь Тейлора определен однозначно с точностью до сдвига вдоль оси цилиндров. С помощью теории возмущений показано, что при малых ε течение Тейлора устойчиво относительно вращательно-симметричных возмущений.

В конце статьи приведены результаты расчета вращающего момента.

§ 1. Постановка задачи и результаты. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности 1 с коэффициентом вязкости ν заполняет пространство между двумя концентрическими цилиндрами радиусов R_1, R_2 , которые вращаются с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 ($\Omega_1 \Omega_2 > 0$). Будем искать течения периодические вдоль оси цилиндров z с заданным периодом $2\pi/\alpha$. Потребуем, кроме того, чтобы расход жидкости через поперечное сечение равнялся нулю. Тогда уравнения Навье — Стокса имеют решение v_0 (течение Куэтта) с компонентами в цилиндрических координатах r, θ, z .

$$v_{0r} = v_{0z} = 0, \quad v_{0\theta} = ar + b/r \quad (1.1)$$

$$a = \frac{R^2 \Omega - 1}{R^2 - 1}, \quad b = -\frac{R^2 (\Omega - 1)}{R^2 - 1}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

Течение Куэтта определяется параметрами Ω, R и не зависит от числа Рейнольдса $N_{Re} = \Omega_1 R_1^2 / \nu$.

Будем искать вторичное течение v' в виде $v' = v_0 + v$, а соответствующее ему давление p' в виде $p' = p_0 + p/Re$, где p_0 — давление, соответствующее течению (1.1). Для определения v, p получим (в безразмерных переменных) уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} = N_{Re} \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} - 2 \frac{v_{0\theta}}{r} v_\theta \right] \quad (1.3)$$

$$\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} = N_{Re} \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \left(\frac{dv_{0\theta}}{dr} + \frac{v_{0\theta}}{r} \right) v_r \right] \quad (1.4)$$

$$\Delta v_z - \frac{\partial p}{\partial z} = N_{Re} \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (1.5)$$

Решение v, p системы (1.2) — (1.5) обязано быть $2\pi/\alpha$ -периодическим по z и удовлетворять краевым условиям

$$v = 0 \quad \text{при } r = 1, R \quad (1.6)$$

$$\int_1^R v_z(r, z) r dr = 0 \quad (1.7)$$

Будем предполагать, что $a < 0$. Тогда течение (1.1) при больших N_{Re} неустойчиво.

Строгое доказательство этого факта, известного еще Тейлору (1924 г.), дано в работах [1,2,3]. Пусть N_{Re*} наименьшее собственное число соответствующей линеаризованной задачи. Как показано в работе [2,3], оно для всех α , исключая некоторое счетное множество, двукратно (а в подпространстве векторов с четными по z компонентами v_r, v_θ и нечетной v_z — простое) и является точкой бифуркации нелинейной задачи (1.2) — (1.7) (см. также [4,5]): при N_{Re} , близких к N_{Re*} , последняя имеет ненулевые решения, исчезающие при $N_{Re} \rightarrow N_{Re*}$.

Дальше применяется метод Ляпунова — Шмидта, который позволяет определить число малых ненулевых решений и исследовать расположение спектра нелинейной задачи.

При помощи результатов работы [6] доказываем, что ненулевое решение единственно с точностью до сдвига вдоль оси z (в указанном выше подпространстве получаются два решения) и аналитически зависит от параметра $\varepsilon = (N_{Re} - N_{Re*})^{1/2}$. Оно существует только при $N_{Re} > N_{Re*}$ и устойчиво относительно вращательно-симметричных возмущений, тогда как течение Куэтта (1.1) теряет устойчивость.

Общее доказательство всех этих фактов в настоящее время неизвестно (его можно дать в случае узкого зазора между цилиндрами; см. также аналогичные результаты для близкой задачи о свободной конвекции [6-8]). Дело в том, что для применения результатов работы [6] необходимо уметь доказывать положительность некоторой постоянной g (см. ниже [2.28]). В общем случае этот факт не доказан, но при заданных R, α он может быть установлен численно, одновременно с расчетом вторичного потока. Примеры такого расчета даны в § 3.

Чтобы не создавать у читателя иллюзий, напомним, что «принцип изменения устойчивости» в случае течения Куэтта и возможность ограничиться вращательно-симметричными возмущениями (аналога теоремы Сквайра здесь нет) до сих пор не доказаны строго, хотя и подтверждаются экспериментами.

§ 2. Метод Ляпунова — Шмидта. 1. Ряды Ляпунова — Шмидта. Решение задачи (1.2) — (1.7) ищем в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k, \quad p = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k, \quad \varepsilon = (N_{Re} - N_{Re*})^{1/2} \quad (2.1)$$

При этом векторы v_k должны быть соленоидальны, периодичны по z , исчезать при $r = 1, R$, иметь равным нулю поток сквозь поперечное сечение и удовлетворять уравнениям, вытекающим из (1.3) — (1.5) и (2.1)

$$A v_k - \nabla p_k = N_{Re*} \sum_{m+n=k} L(v_m v_n) + \sum_{m+n=k-2} L(v_m, v_n) + K v_{k-2} \equiv f_k \quad (2.2)$$

где дифференциальные операторы A и L определяются для любых враща-

тельно-симметричных гладких векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} равенствами

$$A = A_0 - N_{\text{Re}} \cdot K$$

$$(A_0 \mathbf{v})_r = \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2}, \quad (A_0 \mathbf{v})_\theta = \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}, \quad (A_0 \mathbf{v})_z = \Delta v_z$$

$$(K \mathbf{v})_r = -2 \frac{v_{0\theta}}{r} v_\theta, \quad (K \mathbf{v})_\theta = \left(\frac{dv_{0\theta}}{dr} + \frac{v_{0\theta}}{r} \right) v_r, \quad (K \mathbf{v})_z = 0 \quad (2.3)$$

$$\{L(\mathbf{u}\mathbf{v})\}_r = -\frac{u_\theta v_\theta}{r} + u_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\{L(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}_\theta = \frac{u_\theta v_r}{r} + u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \quad \{L(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}_z = u_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Будем разыскивать такие решения задачи (1.2) — (1.7), для которых v_r , v_θ — четные, а v_z — нечетная функция z . Тогда тем же условиям надо подчинить и векторы \mathbf{v}_k . В частности для \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 имеем уравнения

$$A \mathbf{v}_1 - \nabla p_1 = 0, \quad A \mathbf{v}_2 - \nabla p_2 = N_{\text{Re}} \cdot L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \quad (2.4)$$

$$A \mathbf{v}_3 - \nabla p_3 = N_{\text{Re}} \cdot [L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)] + K \mathbf{v}_1 \quad (2.5)$$

Правая часть уравнения (2.2) содержит лишь коэффициенты разложения (2.1) с номерами меньшими k . Поэтому вычисление \mathbf{v}_k , p_k сводится к последовательному решению линейных задач. Для \mathbf{v}_1 , p_1 имеем

$$\mathbf{v}_1 = \beta_1 \boldsymbol{\varphi}, \quad p_1 = \beta_1 p_{10} \quad (2.6)$$

Здесь β_1 — неизвестная постоянная, а $\boldsymbol{\varphi}$, p_{10} — собственное решение краевой задачи

$$A \boldsymbol{\varphi} - \nabla p_{10} = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\varphi}|_{r=1, R} = 0, \quad \int_1^R \varphi_z r dr = 0 \quad (2.8)$$

периодическое по z с периодом $2\pi/\alpha$ и такое, что φ_r , φ_θ — четные функции z , а φ_z — нечетная. Для определенности потребуем выполнения условия нормировки

$$\int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int_1^R \varphi_r r dr dz = \frac{2}{\alpha} \quad (2.9)$$

Пусть $\boldsymbol{\psi}$, q — собственное решение сопряженной задачи

$$A^* \boldsymbol{\psi} - \nabla q = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\psi}|_{r=1, R} = 0, \quad \int_1^R \psi_z r dr = 0 \quad (2.11)$$

$$A^* = A_0 - N_{\text{Re}} \cdot K^*, \quad \{K^* \mathbf{v}\}_r = \left(\frac{dv_{0\theta}}{dr} + \frac{v_{0\theta}}{r} \right) v_\theta$$

$$\{K^* \mathbf{v}\}_\theta = -2 \frac{v_{0\theta}}{r} v_r, \quad \{K^* \mathbf{v}\}_z = 0$$

удовлетворяющее прежним условиям периодичности, четности и нормировки. Тогда условие разрешимости краевой задачи (2.2) имеет вид [2]

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \int_1^R \mathbf{f}_k \boldsymbol{\psi} r dr dz = 0 \quad (2.12)$$

2. *Линеаризованная задача.* Решение φ задачи (2.7), (2.8) ищем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_r(r, z) &= \varphi_{1r}(r) \cos \alpha z, & \varphi_\theta(r, z) &= \varphi_{1\theta}(r) \cos \alpha z \\ \varphi_z(r, z) &= \varphi_{1z}(r) \sin \alpha z, & p_{10}(r, z) &= q_1(r) \cos \alpha z\end{aligned}\quad (2.13)$$

Функции φ_{1r} и $\varphi_{1\theta}$ будут решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(L - \alpha^2)^2 \varphi_{1r} = 2\alpha^2 \lambda \omega(r) \varphi_{1\theta}, \quad (L - \alpha^2) \varphi_{1\theta} = 2a\lambda \varphi_{1r} \quad (2.14)$$

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \quad \omega(r) = a + \frac{b}{r^2} \quad (2.15)$$

и удовлетворяют условиям на границе и условию нормировки

$$\varphi_{1r} = \frac{d\varphi_{1r}}{dr} = \varphi_{1\theta} = 0 \quad \text{при } r = 1, R; \quad \int_1^R \varphi_{1r} r dr = 1 \quad (2.16)$$

Функции φ_{1z} и q_1 определяются формулами

$$\varphi_{1z} = -\frac{1}{\alpha r} \frac{d}{dr} (r\varphi_{1r}), \quad q_1 = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \alpha^2 \right) \varphi_{1z} \quad (2.17)$$

В работе [3] показано, что для любого α задача (2.14) — (2.16) имеет последовательность положительных и простых собственных значений $0 < \lambda_1(\alpha) < \lambda_2(\alpha) < \dots$. При этом для всех α за исключением некоторого счетного множества, $N_{\text{Re}^*} = \lambda_1(\alpha)$ есть простое собственное число задачи (2.7), (2.8).

Далее будем считать α не принадлежащим указанному исключительному множеству. Тогда $\lambda_1(\alpha) < \lambda_k(m\alpha)$ для всех натуральных k, m кроме $k = m = 1$.

Аналогично отыскиваем решение сопряженной системы (2.10), (2.11) в виде

$$\begin{aligned}\psi_r(r, z) &= \psi_{1r}(r) \cos \alpha z, & \psi_\theta(r, z) &= \psi_{1\theta}(r) \cos \alpha z \\ \psi_z(r, z) &= \psi_{1r}(r) \sin \alpha z, & q(r, z) &= q_0(r) \cos \alpha z\end{aligned}\quad (2.18)$$

Для определения $\psi_{1z}(r)$ и $\psi_{1\theta}(r)$ получаем краевую задачу

$$(L - \alpha^2)^2 \psi_{1r} = -2\alpha^2 a N_{\text{Re}^*} \psi_{1\theta}, \quad (L - \alpha^2) \psi_{1\theta} = -2N_{\text{Re}^*} \omega \psi_{1r} \quad (2.19)$$

$$\psi_{1r} = \frac{d\psi_{1r}}{dr} = \psi_{1\theta} = 0 \quad \text{при } r = 1, R; \quad \int_1^R \psi_{1\theta} r dr = 1 \quad (2.20)$$

Функции ψ_{1z} и q_0 определяются соотношениями

$$\psi_{1z} = -\frac{1}{\alpha r} \frac{d}{dr} (r\psi_{1r}), \quad q_0 = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \alpha^2 \right) \psi_{1z} \quad (2.21)$$

3. *Определение v_2 .* Из уравнений (2.4) и (2.6) имеем

$$A v_2 - \nabla p_2 = N_{\text{Re}^*} \beta_1^2 L(\psi, \varphi) \quad (2.22)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$v_2 = \beta_2 \varphi + N_{\text{Re}^*} \beta_1^2 w, \quad p_2 = \beta_2 p_1 + N_{\text{Re}^*} \beta_1^2 q_2 \quad (2.23)$$

Здесь β_2 — неизвестная постоянная, а w , q_2 — частное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta w_r - \frac{w_r}{r^2} + 2N_{\text{Re}^*} \omega w_\theta &= \frac{\partial q_2}{\partial r} + \frac{1}{2} F_1(r) + \frac{1}{2} F_2(r) \cos 2\alpha z \\ \Delta w_\theta - \frac{w_\theta}{r^2} - 2aN_{\text{Re}^*} w_r &= \frac{1}{2} F_3(r) + \frac{1}{2} F_4(r) \cos 2\alpha z \\ \Delta w_z &= \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{1}{2} F_5(r) \sin 2\alpha z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{\partial w_z}{\partial z} &= 0, \quad w_r = w_\theta = w_z = 0 \quad \text{при } r = 1, R \end{aligned} \quad (2.24)$$

При этом использованы обозначения

$$\begin{aligned} F_1(r) &= -\frac{\Phi_{1\theta}^2}{r} + \Phi_{1r} \frac{d\Phi_{1r}}{dr} - \alpha \Phi_{1z} \Phi_{1r}, \quad F_2(r) = -\frac{\Phi_{1\theta}^2}{r} + \Phi_{1r} \frac{d\Phi_{1r}}{dr} + \alpha \Phi_{1z} \Phi_{1r} \\ F_3(r) &= \frac{\Phi_{1\theta} \Phi_{1r}}{r} + \Phi_{1r} \frac{d\Phi_{1\theta}}{dr} - \alpha \Phi_{1z} \Phi_{1\theta}, \quad F_4(r) = \frac{\Phi_{1\theta} \Phi_{1r}}{r} + \Phi_{1r} \frac{d\Phi_{1\theta}}{dr} + \alpha \Phi_{1z} \Phi_{1r} \\ F_5(r) &= \Phi_{1r} \frac{d\Phi_{1z}}{dr} + \alpha \Phi_{1z}^2 \end{aligned}$$

Решение системы (2.24) имеет вид

$$\begin{aligned} w_r(r, z) &= w_{1r}(r) \cos 2\alpha z, \quad w_\theta(r, z) = w_{0\theta}(r) + w_{1\theta}(r) \cos 2\alpha z \\ w_z(r, z) &= w_{1z}(r) \sin 2\alpha z, \quad q_2(r, z) = q_{20}(r) + q_{21}(r) \cos 2\alpha z \end{aligned} \quad (2.25)$$

Функции w_{1r} , $w_{1\theta}$ находим, решая краевую задачу

$$\begin{aligned} (L - 4\alpha^2)^2 w_{1r} &= 8N_{\text{Re}^*} \alpha^2 \omega w_{1\theta} - 2\alpha^2 F_2 - \alpha \frac{dF_5}{dr} \\ (L - 4\alpha^2) w_{1\theta} &= 2aN_{\text{Re}^*} w_{1r} + \frac{F_4}{2}, \quad w_{1r} = \frac{dw_{1r}}{dr} = w_{1\theta} = 0 \quad \text{при } r = 1, R \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для $w_{0\theta}$, w_{1z} , q_{20} и q_{21} получаем

$$\begin{aligned} w_{0\theta} &= \frac{r}{2} \int_1^r \frac{\Phi_{1\theta}(\rho) \Phi_{1r}(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{(r^2 - 1) R^2}{2r(R^2 - 1)} \int_1^R \frac{\Phi_{1\theta}(\rho) \Phi_{1r}(\rho)}{\rho} d\rho \\ w_{1z} &= -\frac{1}{2\alpha r} \frac{d}{dr} (r w_{1r}), \quad q_{20} = \int_1^r \left(2N_{\text{Re}^*} \omega w_{0\theta} - \frac{F_1}{2} \right) d\rho + \text{const} \\ q_{21} &= -\frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - 4\alpha^2 \right) w_{1z} - \frac{F_5}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Система (2.26) однозначно разрешима.

Действительно, $N_{\text{Re}^*} = \lambda_1(\alpha)$, как указано выше, не может совпадать ни с одним из ее собственных чисел $\lambda_1(2\alpha)$, $\lambda_2(2\alpha)$... Из условия разрешимости (2.12) при $k = 3$ и $k = 4$ находим

$$\beta_1^2 = \frac{J_1}{J_2} \equiv g, \quad \beta_2 = 0 \quad (2.28)$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_1^R \text{rot } \varphi \text{ rot } \psi \, r dr \, dz \quad (2.29)$$

$$J_2 = N_{\text{Re}^*}^3 \int_0^{2\pi/\alpha} \int_1^R [L(\varphi, w) + L(w, \varphi)] \psi r dr dz \quad (2.30)$$

Заметим, что если v_k искать в виде $v_k = \beta_k \varphi + w_k$, где β_k — неизвестная постоянная, а w_k — частное решение соответствующей неоднородной задачи (2.2), ортогональное к ψ , то из условия разрешимости получаем, что все β_k с четными индексами обращаются в нуль.

4. *Возмущение спектра и устойчивость.* Уравнение малых возмущений для течения Куэтта имеет вид

$$\sigma u - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \Delta u + Ku = -\nabla p \quad (2.31)$$

При $N_{\text{Re}} = N_{\text{Re}^*}$ одно из собственных чисел задачи (2.31) есть $\sigma = 0$.

Для сверхкритических чисел Рейнольдса ($N_{\text{Re}} = N_{\text{Re}^*} + \varepsilon^2$) первое собственное число σ раскладывается в ряд теории возмущений

$$\sigma = \sigma_1 \varepsilon^2 + \sigma_2 \varepsilon^4 + \dots, \quad \sigma_1 = \frac{J_1}{J_3}, \quad J_3 = N_{\text{Re}^*} \int_0^{2\pi/\alpha} \int_1^R \varphi \psi r dr dz \quad (2.32)$$

Здесь J_1 согласно (2.29).

Уравнение малых возмущений для течения Тейлора

$$\begin{aligned} \sigma' u - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \Delta u + Ku + \varepsilon \beta_1 [L(\varphi, u) + L(u, \varphi)] + \\ + \varepsilon \beta_1^2 N_{\text{Re}^*} [L(u, w) + L(w, u)] + \dots = -\nabla q \end{aligned} \quad (2.33)$$

Первое собственное число σ' при сверхкритических числах Рейнольдса разложимо в ряд

$$\sigma' = \sigma_{12} \varepsilon^2 + \sigma_{13} \varepsilon^3 + \dots, \quad \sigma_{12} = -2\sigma_1$$

Теперь, применяя результат работы [6], приходим к следующему утверждению.

Теорема. Пусть величины g, σ_1 , определенные равенствами (2.28), (2.32), положительны. Тогда при переходе числом Рейнольдса критического значения $N_{\text{Re}^*} = \lambda_1(\alpha)$ течение Куэтта теряет устойчивость. При этом возникает новое устойчивое стационарное течение (вихрь Тейлора), представленное в виде ряда Ляпунова — Шмидта (2.1) и определяемое однозначно (с точностью до сдвига вдоль оси z) волновым числом α .

Проверить условия теоремы (положительность чисел g, σ_1) удастся пока только в случае узкого зазора между цилиндрами и для близких задач о свободной конвекции [5-7]. В данной работе справедливость этих условий устанавливается численным расчетом.

§ 3. *Вычисление вихря Тейлора.* Рассмотрим краевую задачу

$$(L - \alpha^2) u = f, \quad u = 0 \quad \text{при } r = 1, R \quad (3.1)$$

Ее функция Грина имеет вид

$$G_{1,\alpha}(r, \rho) = \begin{cases} D^{-1}\psi_1(r)\psi_2(\rho) & \text{при } r \leq \rho \\ D^{-1}\psi_1(\rho)\psi_2(r) & \text{при } r \geq \rho \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь

$$D = -I_1(\alpha)K_1(\alpha R) + I_1(\alpha R)K_1(\alpha)$$

$$\psi_1(r) = I_1(\alpha r)K_1(\alpha) - I_1(\alpha)K_1(\alpha r)$$

$$\psi_2(r) = I_1(\alpha R)K_1(\alpha r) - K_1(\alpha R)I_1(\alpha r)$$

Краевой задаче

$$(L - \alpha^2)^2 u = f, \quad u = \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 1, R$$

соответствует функция Грина $G_{2,\alpha}(r, \rho)$. Ввиду симметрии достаточно привести ее выражение при $r \geq \rho$

$$G_{2,\alpha}(r, \rho) = \{K_1(\alpha r) - D_1^{-1}[\Lambda_3(R)u_1(r) - \Lambda_1(R)u_2(r)]\}u_1(\rho) + \\ + \{-I_1(\alpha r) + D_1^{-1}[\Lambda_1(R)u_1(r) - \Lambda_2(R)u_2(r)]\}u_2(\rho) \quad (3.3)$$

где

$$u_1 = \Lambda_1(r)I_1(\alpha r) - \Lambda_2(r)K_1(\alpha r), \quad u_2 = \Lambda_3(r)I_1(\alpha r) - \Lambda_1(r)K_1(\alpha r)$$

$$\Lambda_1(r) = \int_1^r I_1(\alpha r)K_1(\alpha r) r dr, \quad \Lambda_2(r) = \int_1^r I_1^2(\alpha r) r dr$$

$$\Lambda_3(r) = \int_1^r K_1^2(\alpha r) r dr, \quad D_1 = \Lambda_1^2(R) - \Lambda_2(R)\Lambda_3(R)$$

Интегралы $\Lambda_1(r)$, $\Lambda_2(r)$, $\Lambda_3(r)$ выражаются через функции Бесселя (см., например, [9], стр. 96—99).

Из соотношений (2.14) — (2.16) имеем

$$\varphi_{1r} = 2N_{\text{Re}\alpha^2} \int_1^R G_{2,\alpha}(r, \rho) \omega(\rho) \varphi_{1\theta}(\rho) \rho d\rho \\ \varphi_{1\theta} = 2aN_{\text{Re}\alpha^2} \int_1^R G_{1,\alpha}(r, \rho) \varphi_{1r}(\rho) \rho d\rho \quad (3.4)$$

Отсюда следует уравнение

$$\varphi_{1r} = \lambda \int_1^R G_{3,\alpha}(r, \rho) \varphi_{1r}(\rho) \rho d\rho \quad (3.5)$$

$$\lambda = 4N_{\text{Re}\alpha^2}^2, \quad G_{3,\alpha}(r, \rho) = a \int_1^R G_{2,\alpha}(r, s) G_{1,\alpha}(s, \rho) \omega(s) s ds \quad (3.6)$$

Собственное число и соответствующее ему собственное решение интегрального уравнения (3.5) находим методом последовательных приближений

по схеме

$$\lambda_{(n-1)} = \left(\int_1^R \int_1^R G_{3,\alpha}(r, \rho) \varphi_{1r(n-1)}(\rho) r \rho d\rho dr \right)^{-1} \quad (3.7)$$

$$\varphi_{1r(n)} = \lambda_{(n-1)} \int_1^R G_{3,\alpha}(r, \rho) \varphi_{1r(n-1)}(\rho) \rho d\rho \quad (3.8)$$

Так как ядро $G_{3,\alpha}(r, \rho)$ осцилляционное [3] и для него справедлива теорема о положительном собственном числе (см., например, [10], гл. 2, § 3), последовательности (3.7) и (3.8) сходятся, соответственно, к наименьшему характеристическому числу и собственной функции уравнения (3.5).

Вычисления проводились для такого значения $\alpha = \alpha_*$, при котором $N_{\text{Re}^*} = \lambda_1(\alpha_*) = \min_{\alpha} \lambda_1(\alpha)$, так как физически этот случай наиболее интересен. Однако весь расчет можно провести для любого α .

Ядра $G_{1,\alpha}, G_{2,\alpha}, G_{3,\alpha}$ задавались матрицами значений. Все необходимые интегралы вычислялись численно методами Симпсона, трапеций или прямоугольников, отрезок интегрирования разбивался на 16 равных частей. Точность вычислений обеспечивала не менее 2—3 верных знаков в конечных результатах. Для указанного случая метод сходился очень быстро, потребовалось лишь шесть итераций.

Определив φ_{1r} , находим $\varphi_{1\theta}$ (3.4), а для φ_{1z} из (2.17) получаем

$$\varphi_{1z} = -2N_{\text{Re}^*} \alpha \int_1^R \frac{1}{r} \left(G_{2,\alpha}(r, \rho) + r \frac{\partial G_{2,\alpha}(r, \rho)}{\partial r} \right) \omega(\rho) \varphi_{1\theta}(\rho) \rho d\rho \quad (3.9)$$

Здесь производная $\partial G_{2,\alpha}(r, \rho)/\partial r$ так же, как и другие необходимые производные, вычислялась явно, чтобы исключить ошибки при численном дифференцировании. Результаты вычислений для двух случаев ($R = 2$ и $R = 1,5$) приведены в табл. 1, 2.

Сопряженную систему (2.19), (2.20) заменяем интегральными уравнениями

$$\psi_{1r} = -2N_{\text{Re}^*} \alpha \int_1^R G_{2,\alpha}(r, \rho) \psi_{1\theta}(\rho) \rho d\rho \quad (3.10)$$

$$\psi_{1\theta} = -2N_{\text{Re}^*} \int_1^R G_{1,\alpha}(r, \rho) \omega(\rho) \psi_{1r}(\rho) \rho d\rho \quad (3.11)$$

Отсюда получаем уравнения для определения

$$\psi_{1\theta} = 4N_{\text{Re}^*}^2 \alpha^2 \int_1^R G_{3,\alpha}(\rho, r) \psi_{1\theta}(\rho) \rho d\rho \quad (3.12)$$

Из (2.21) и (3.10) находим

$$\psi_{1z} = 2N_{\text{Re}^*} \alpha \int_1^R \frac{1}{r} \left[G_{2,\alpha}(r, \rho) + r \frac{\partial G_{2,\alpha}(r, \rho)}{\partial r} \right] \psi_{1\theta}(\rho) \rho d\rho \quad (3.13)$$

Таблица 1

Результаты расчета для случая $R=2$, $\alpha=3,163$
 $N_{Re^*}=67.87$, $\beta_1=0.0188$, $\sigma_1=0.349$

r	Φ_{1r}	$\Phi_{1\theta}$	Φ_{1z}	Ψ_{1r}	$\Psi_{1\theta}$	Ψ_{1z}	w_{1r}	$w_{0\theta}$	$w_{1\theta}$	w_{1z}
1.0625	0.1078	0.5638	-1.0195	0.0451	0.3241	-0.4285	0.0083	-0.0811	0.0052	-0.0187
1.125	0.3538	1.0998	-1.5182	0.1501	0.6245	-0.6593	0.0199	-0.1516	0.0107	-0.0327
1.1875	0.6432	1.5912	-1.6281	0.2789	0.8776	-0.7369	0.0340	-0.2027	0.0173	-0.0415
1.25	0.9126	2.0107	-1.4660	0.4050	1.0588	-0.7006	0.0487	-0.2263	0.0250	-0.0438
1.3125	1.1217	2.3332	-1.1344	0.5105	1.1685	-0.5831	0.0612	-0.2195	0.0333	-0.0397
1.375	1.2332	2.5402	-0.7180	0.5739	1.1974	-0.4139	0.0705	-0.1861	0.0417	-0.0305
1.4375	1.2918	2.6259	-0.2806	0.6200	1.1625	-0.2186	0.0750	-0.1341	0.0489	-0.0183
1.5	1.2473	2.5886	0.1302	0.6169	1.0752	-0.1891	0.0745	-0.0743	0.0542	-0.0053
1.5625	1.1141	2.4394	0.4805	0.5661	0.9507	0.1669	0.0697	-0.0192	0.0564	0.0068
1.625	0.9762	2.1991	0.7480	0.5070	0.8057	0.3237	0.0612	0.0237	0.0552	0.0170
1.6875	0.7767	1.8854	0.9186	0.4134	0.6528	0.4387	0.0504	0.0510	0.0503	0.0246
1.75	0.5625	1.5224	0.9335	0.3064	0.5022	0.5010	0.0383	0.0608	0.0425	0.0293
1.8125	0.3549	1.1345	0.9353	0.1975	0.3604	0.5000	0.0259	0.0560	0.0326	0.0308
1.875	0.1758	0.7427	0.7655	0.0998	0.2304	0.4250	0.0143	0.0411	0.0215	0.0274
1.9375	0.0488	0.3624	0.4607	0.0282	0.1112	0.2634	0.0050	0.0212	0.0104	0.0191

Таблица 2

Результаты расчета для случая $R=1.5$, $\alpha=6$
 $N_{Re^*}=152.4$, $\beta_1=0.0060$, $\sigma_1=0.696$

r	Φ_{1r}	$\Phi_{1\theta}$	Φ_{1z}	Ψ_{1r}	$\Psi_{1\theta}$	Ψ_{1z}	w_{1r}	$w_{0\theta}$	$w_{1\theta}$	w_{1z}
1.0313	0.6541	1.9642	-2.1951	0.1262	0.2246	-1.2652	0.0093	-0.2363	-0.0144	-0.0086
1.0625	1.3020	3.7832	-3.3106	0.4327	0.7527	-2.0095	0.0227	-0.4273	-0.0155	-0.0402
1.0938	1.8665	5.3767	-3.6069	0.8267	1.3990	-2.3204	0.0466	-0.5408	0.0027	-0.0772
1.125	2.3144	6.6759	-3.2862	1.2335	2.0274	-2.2760	0.0795	-0.5616	0.0303	-0.1035
1.1563	2.6142	7.6299	-2.5704	1.5948	2.5434	-1.9522	0.1154	-0.4928	0.0714	-0.1107
1.1875	2.7537	8.2117	-1.6290	1.8677	2.8897	-1.4255	0.1481	-0.3546	0.1172	-0.0989
1.2188	2.7393	8.4189	-0.6091	2.0244	3.0400	-0.7735	0.1712	-0.1780	0.1585	-0.0707
1.25	2.5920	8.2716	0.3735	2.0520	2.9935	-0.0724	0.1815	0.0030	0.1871	-0.0321
1.2813	2.3417	7.8079	1.2324	1.9513	2.7695	0.6064	0.1587	0.1591	0.1970	0.0173
1.3125	2.0222	7.0780	1.9034	1.7358	2.4014	1.1959	0.1555	0.2702	0.1931	0.0497
1.3438	1.6662	6.1372	2.3416	1.4300	1.9328	1.6369	0.1282	0.3271	0.1736	0.0703
1.375	1.3005	5.0408	2.5219	1.0680	1.4139	1.8811	0.0741	0.3304	0.1426	0.0783
1.4063	0.9450	3.8395	2.4038	0.6916	0.8997	1.8778	0.0675	0.2874	0.1100	0.0817
1.4375	0.6100	2.5764	1.9729	0.3504	0.4489	1.5921	0.0383	0.2096	0.0726	0.0779
1.4688	0.2969	1.2871	1.1890	0.0990	0.1253	0.9819	0.0138	0.1096	0.0345	0.0427

Расчет для сопряженной задачи совершенно аналогичен описанному выше. Результаты приведены в табл. 1, 2.

Для определения w_{1r} и $w_{1\theta}$ из (2.26) получим (3.14)

$$w_{1r} = 8N_{Re^*} \alpha^2 \int_1^R G_{2,2\alpha}(r, \rho) \omega(\rho) w_{1\theta} \rho d\rho - \int_1^R G_{2,2\alpha}(r, \rho) \left[2\alpha^2 F_2 + \alpha \frac{dF_5}{d\rho} \right] \rho d\rho$$

$$w_{1\theta} = 2aN_{Re^*} \int_1^R G_{1,2\alpha}(r, \rho) w_{1r} \rho d\rho + \int_1^R G_{1,2\alpha}(r, \rho) F_4(\rho) \rho d\rho \quad (3.15)$$

Отсюда

$$w_{1r} = \mu \int_1^R G_{3,2\alpha}(r, \rho) w_{1r} \rho d\rho + F(r), \quad \mu = 16 N_{Re^*}^2 \alpha^2 \quad (3.16)$$

$$F(r) = 8N_{Re^*}^2 \alpha^2 \int_1^R G_{3,2\alpha}(r, \rho) F_4(\rho) \rho d\rho - \int_1^R G_{2,2\alpha}(r, \rho) \left[2\alpha^2 F_2 + \alpha \frac{dF_5}{d\rho} \right] \rho d\rho$$

Неоднородное интегральное уравнение (3.16) решается методом последовательных приближений, который сходится, если $\mu < \mu_1$ (μ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $G_{3,2\alpha}$). Это условие выполняется, если α достаточно близко к α_* и для любого $\alpha > \alpha_*$. Действительно, в этом случае имеем

$$\mu/\mu_1 = \lambda_1^2(\alpha)/\lambda_1^2(2\alpha) < 1$$

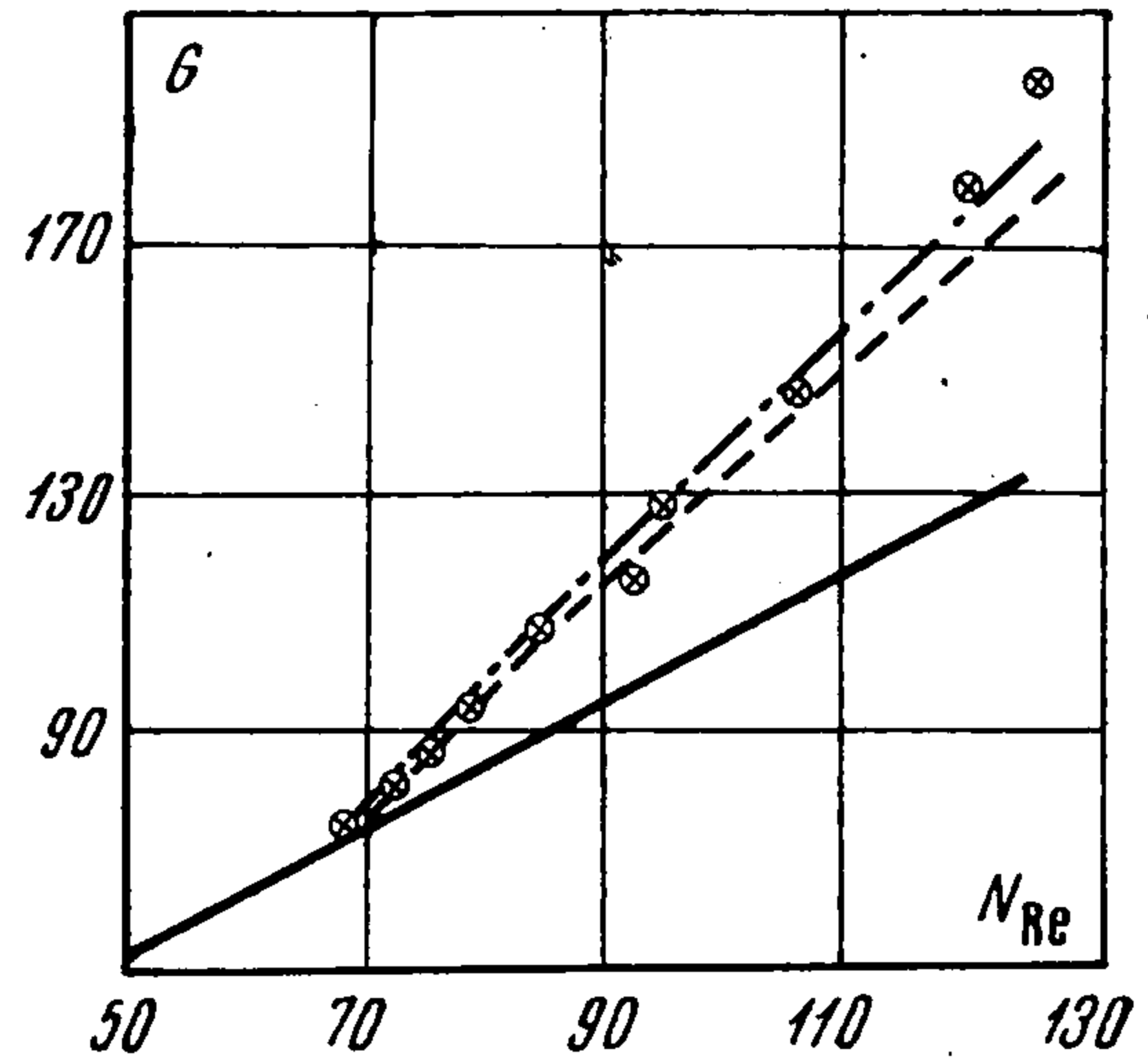
В частности, при $\alpha = \alpha_*$ оказывается, что $\mu/\mu_1 \approx 1/4$ и метод сходится особенно хорошо. Уже на двенадцатой итерации получается результат, если взять за нулевое приближение $w_{1r(0)} = F(r)$.

Функцию $w_{1\theta}$ определяем из (3.15), а для w_{1z} из (2.27) и (3.14) имеем

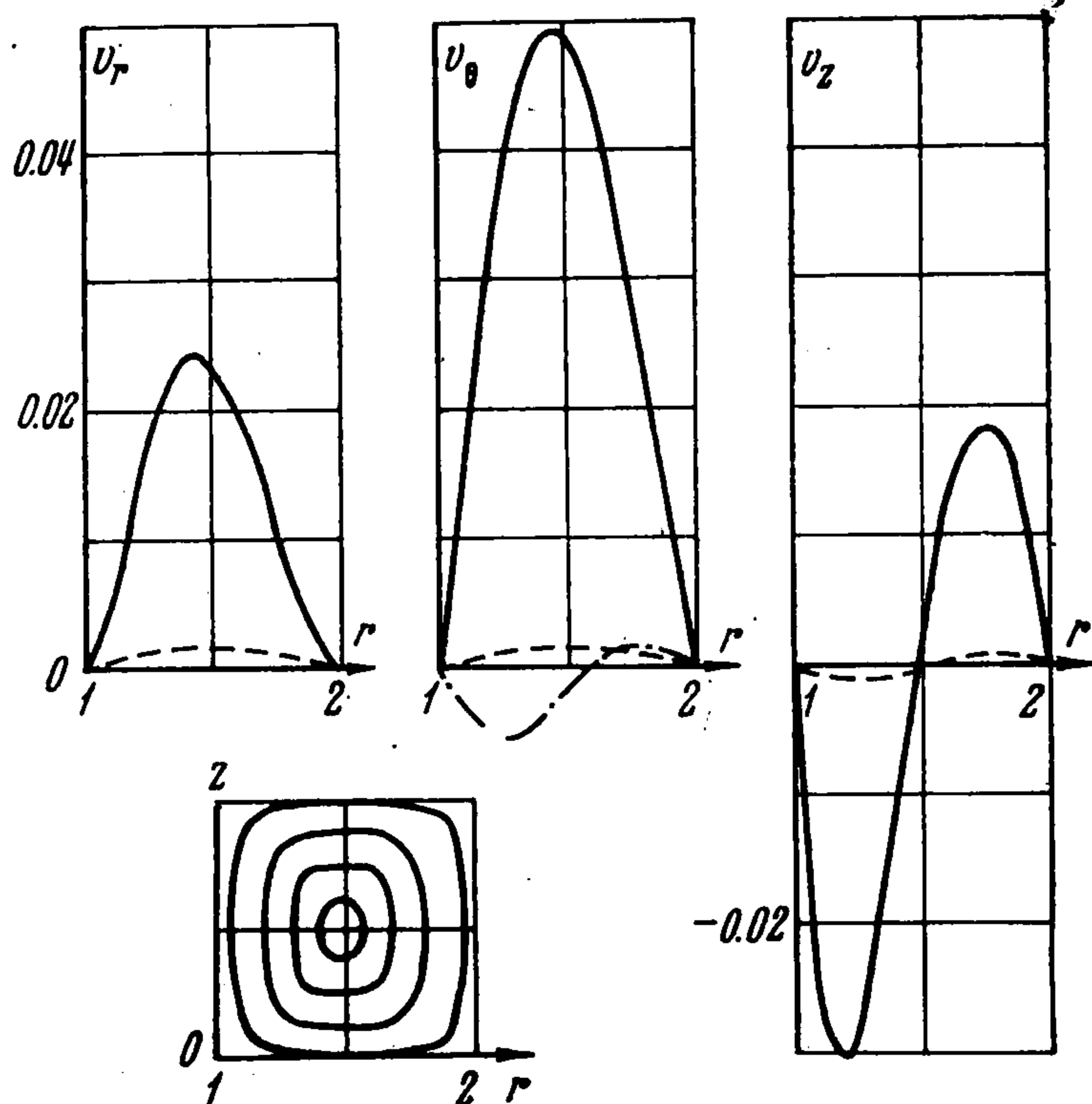
$$w_{1z} = -\frac{1}{2\alpha} \int_1^R \frac{1}{r} \left[G_{2,2\alpha}(r, \rho) + r \frac{\partial G_{2,2\alpha}(r, \rho)}{\partial r} \right] \times \\ \times \left(8N_{Re} \alpha^2 \omega w_{1\theta} - 2\alpha^2 F_2 - \alpha \frac{dF_5}{d\rho} \right) \rho d\rho$$

Функция $w_{0,\theta}$ и постоянные β_1, σ_1 отыскиваются численным интегрированием по формулам (2.27) — (2.30), (2.32).

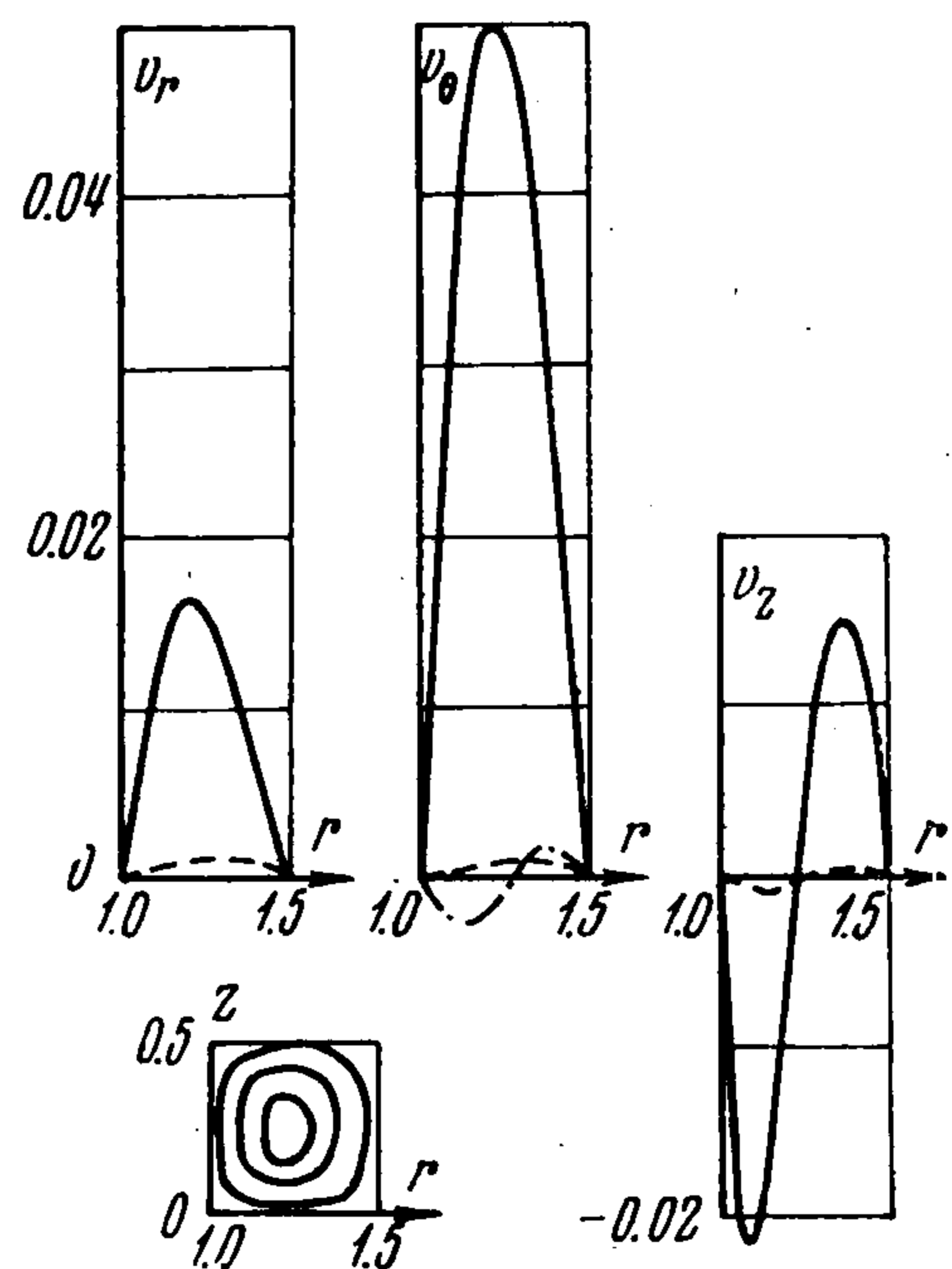
В табл. 1,2 приводятся результаты вычислений. На фиг. 1 и фиг. 2 изображена зависимость от радиуса компонент векторов v_1 и v_2 и функция тока вихря Тейлора.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Сплошной линией изображены компоненты вектора $\beta_1 \Phi_1$, где $\Phi_1 = \{\Phi_{1r}, \Phi_{1\theta}, \Phi_{1z}\}$, пунктирной — составляющие вектора $\beta_1^2 N_{Re} w_1$, где $w_1 = \{w_{1r}, w_{1\theta}, w_{1z}\}$, а штрих-пунктирная линия соответствует функции $\beta_1^2 N_{Re} w_{0\theta}$.

§ 4. Расчет вращающего момента. Момент сил вязкости, действующих на внутренний цилиндр, дается формулой

$$G = \frac{2\pi R_1 h \rho \nu^2}{R_2 - R_1} N_{Re} \int_1^{2\pi/\alpha} \left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=1} dz \quad (4.1)$$

Здесь h — длина цилиндра. Подставляя в (4.1) разложение (2.1), получим момент в виде ряда по степеням параметра $\varepsilon^2 = N_{Re} - N_{Re}^*$

$$G = G_0 + \varepsilon^2 G_2 + \varepsilon^4 G_4 + \dots \quad (4.2)$$

Таким образом, возникновение вихрей Тейлора приводит к появлению угловой точки на графике функции $G = G(N_{Re})$.

Приведем результаты вычисления момента сил вязкости в случае $h = 5$ см, $\nu = 0.1226$ см²сек⁻¹ и $\rho = 0.8404$ см⁻³. Для $R = 2$ и $\alpha = 3.163$ имеем

$$G = 71.78 + 1.96 \varepsilon^2 + \dots \quad (4.3)$$

а при $R = 1.5$ и $\alpha = 6$

$$G = 435.4 + 8.18 \varepsilon^2 + \dots$$

На фиг. 3 значения вращающего момента, рассчитанные по формуле (4.3), сравниваются с результатами эксперимента Доннелли и Симона [11] и приближенных расчетов А. Дэви [12]. На фигуре сплошной линией обозначен момент сил вязкости для куэттовского потока, пунктирная линия соответствует результатам Дэви, штрих-пунктирная — результатам данной работы. Экспериментальные значения Доннелли и Симона отмечены крестиками. Примечательно, что хорошее совпадение с экспериментом имеет место в неожиданно широком интервале чисел Рейнольдса, во всяком случае при $N_{Re} \leq 120$. Это подтверждает, что отброшенные в (4.3) слагаемые малы. Вероятно, даже появление азимутальных волн в результате неустойчивости вихря Тейлора влияет на момент довольно мало.

Поступила 19 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Л. Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4, стр. 787—790.
2. Юдович В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2, стр. 306—309.
3. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 688—698.
4. Иванюков Ю. П., Яковлев Г. Н. О бифуркации течений жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 768—773.
5. Velte W. Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier—Stokeschen Gleichungen beim Taylorproblem. Arch. Rational Mech. Anal., 1966, 22, No 1, s. 1—14.
6. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1,
7. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
8. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
9. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
10. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
11. Donnelly R. J., Simon N. J. An empirical torque relation for supercritical flow between rotating cylinders. J. Fluid. Mech., 1960, 7, pt. 3, pp. 401—418.
12. Davey A. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. J. Fluid. Mech., 1962, vol. 14, pt. 3, p. 336.