

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В. М. Ентов, Р. Л. Салганик

(Москва)

В работе [1] было показано, что для ряда симметричных конфигураций источников и стоков функция тока ψ , рассматриваемая как функция точки w, θ в плоскости годографа скорости фильтрации (w — скорость фильтрации; θ — угол, составляемый ею с осью x) удовлетворяет уравнению

$$w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0.1)$$

в полуполосе $0 < w < \infty, 0 < \theta < \theta_0$ с исключенным отрезком $0 < w < a; \theta = \theta_1$ или лучом $a < w < \infty, \theta = \theta_1$.

Здесь λ — характерная скорость, пропорциональная величине предельного градиента, определяемого тем условием, что если в какой-то области модуль градиента давления ниже предельной величины, то в этой области (застойная зона) движение отсутствует. Задача заключается в нахождении поля скоростей вокруг источников и стоков и определении положения границ возникающих застойных зон. Получить точное решение этой задачи при произвольном a не удастся.

В случае линейного закона фильтрации ($\lambda = 0$) уравнение (0.1) превращается в уравнение Лапласа в полярных координатах (w, θ), и его решение легко находится при помощи конформного отображения. Это обстоятельство наводит на мысль искать решение уравнения (0.1) при малых λ разложением по малому параметру. Непосредственное применение метода малого параметра к уравнению (0.1) затруднено тем, что λ входит в коэффициент при старшей производной, обращающийся в нуль при $w = 0$, т. е. на границах застойных зон.

Ниже указывается метод построения равномерно пригодного разложения по малому параметру λ . Ради упрощения вычислений рассматривается случай двух источников равной интенсивности (см. например [1]), когда задача обладает дополнительной симметрией, и достаточно рассмотреть на плоскости годографа полосу половинной ширины $\theta_1 = 1/2 \pi$. Сам метод, однако, применим и к общей ситуации.

§ 1. Формулировка задачи. Сведение к сингулярному интегральному уравнению 1°. Рассмотрим задачу, отвечающую течению от двух источников равной интенсивности, расположенных на расстоянии $2L$ один от другого.

Введем декартову систему координат x, y с началом в центре симметрии и осью x , проходящей через источники. Из общих соображений [1] следует, что в этой задаче возникает симметричная застойная зона, ограниченная четырьмя вогнутыми по отношению к области течения дугами, с вершинами на осях координат, являющимися точками возврата. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть течение во втором квадранте. Задача о таком течении приводит на плоскости годографа к определению функции тока ψ как решения уравнения (0.1) в полуполосе $0 < w < \infty, 0 < \theta < 1/2 \pi$ с

условиями

$$\begin{aligned} \psi(w, 0) = 0, \quad \psi(0, \theta) = 0 \\ \psi\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (w < a), \quad \frac{\partial \psi(w, 1/2 \pi)}{\partial \theta} = \frac{Q}{\pi} \quad (a < w < \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В конце застойной зоны на оси y и при $y \rightarrow \infty$ скорость w обращается в нуль, проходя поэтому через максимум. Величина a (не известная заранее), которая входит в формулировку граничных условий (1.1), представляет собой максимальное значение скорости фильтрации на перпендикулярной источникам оси симметрии течения в физической плоскости. Фактически при решении задачи удобнее задаваться величиной a и находить отвечающее ей значение L .

Введем в качестве независимой переменной безразмерную скорость фильтрации

$$u = w/\lambda \quad (1.2)$$

Тогда уравнение (0.1) преобразуется в

$$u(u+1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + (u-1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) = \psi(0, \theta) = 0, \quad \psi(u, 1/2 \pi) = 0 \quad (u \leq a_0 = a/\lambda) \\ \frac{\partial \psi(u, 1/2 \pi)}{\partial \theta} = \frac{Q}{\pi \lambda} \quad (a_0 < u < \infty) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Применим к уравнению (1.3) отвечающее ему интегральное преобразование, рассмотренное в работе [2]. Для трансформанты $\psi^*(\alpha, \theta)$ имеем

$$\psi^*(\alpha, \theta) = \int_0^\infty (1+u) F(2+i\sqrt{\alpha}, 2-i\sqrt{\alpha}, 3, -u) \psi(u, \theta) du \quad (1.5)$$

где F — гипергеометрическая функция. В дальнейшем, ради краткости, обозначено

$$F(2+i\sqrt{\alpha}, 2-i\sqrt{\alpha}, 3, -u) \equiv F(\alpha, -u) \quad (1.6)$$

Домножая уравнение (1.3) на $(1+u)F(\alpha, -u)$ и интегрируя по частям, получим с учетом условий при $w=0$ и $w=\infty$

$$\frac{d^2 \psi^*}{d\theta^2} - \alpha \psi^* = 0 \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7), обращающееся в нуль при $\theta=0$, имеет вид

$$\psi^*(\alpha, \theta) = A(\alpha) \operatorname{sh} \sqrt{\alpha} \theta \quad (1.8)$$

так что по формуле обращения для преобразования (1.7) работы [2]

$$\psi(u, \theta) = \frac{1}{4} u^2 \int_0^\infty \alpha (1+\alpha) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\alpha} \theta}{\operatorname{th} \sqrt{\alpha} \pi} A(\alpha) F(\alpha, -u) d\alpha \quad (1.9)$$

2°. Обозначим

$$\psi(u, 1/2 \pi) = g(u), \quad a_0 < u < \infty \quad (1.10)$$

Тогда, очевидно

$$A(\alpha) \operatorname{sh}^{1/2} \pi \sqrt{\alpha} = \int_{a_1}^{\infty} (1+u) g(u) F(\alpha, -u) du \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.9), а затем полученное выражение в последнее граничное условие (1.4), получим интегральное уравнение для определения $g(u)$

$$u^2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{3/2} (1+\alpha)}{\operatorname{th} \sqrt{\alpha} \pi \operatorname{th}^{1/2} \sqrt{\alpha} \pi} F(\alpha, -u) d\alpha \int_{a_1}^{\infty} (1+v) g(v) \times \\ \times F(\alpha, -v) dv = -\frac{4Q}{\pi} \equiv \int_{a_1}^{\infty} K(u, v) g(v) dv \quad (1.12)$$

Для ядра $K(u, v)$ имеем, полагая $\alpha = s^2$

$$K(u, v) = 2u^2 (1+v) \int_0^{\infty} \frac{s^4 (1+s^2)}{\operatorname{th} s\pi \operatorname{th}^{1/2} s\pi} F(s^2, -u) F(s^2, -v) ds \quad (1.13)$$

Преобразуем это выражение, используя формулу (см. например [3])

$$F(2+is, 2-is, 3, -u) = \frac{\Gamma(3) \Gamma(-2is)}{\Gamma(2-is) \Gamma(1-is)} u^{-2-is} \times \\ \times F\left(2+is, is, 1+2is, -\frac{1}{u}\right) + \frac{\Gamma(3) \Gamma(2is)}{\Gamma(2+is) \Gamma(1+is)} u^{-2+is} \times \\ \times F(2-is, -is, 1-2is, -1/u) \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.13) и учитывая четность множителя $F(s^2, -u)$ в подынтегральном выражении как функции s , получим

$$K(u, v) = 4u^2 (1+v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^4 (1+s^2)}{\operatorname{th} s\pi \operatorname{th}^{1/2} s\pi} \times \\ \times \frac{\Gamma(-2is)}{\Gamma(2-is) \Gamma(1-is)} \frac{F_+(-1/u)}{u^{2+is}} F(s^2, -v) ds \quad (1.15)$$

Здесь

$$F_{\pm}(-1/u) = F(2 \pm is, \pm is, 1 \pm 2is, -1/u) \quad (1.16)$$

Применим теперь формулу (1.14) к функции $F(s^2, -v)$ и сделаем в (1.15) замену переменных, положив $\xi = is$. Получим

$$K(u, v) = K_1(u, v) + K_2(u, v) \quad (1.17)$$

где

$$K_1(u, v) = \frac{2(1+v)}{\pi i v^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} \left(\frac{v}{u}\right)^{\xi} F_+\left(-\frac{1}{u}\right) F_-\left(-\frac{1}{v}\right) d\xi \\ K_2(u, v) = \frac{2(1+v)}{\pi i v^2} \times \\ \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} \frac{\Gamma(-2\xi) \Gamma(2+\xi) \Gamma(1+\xi)}{\Gamma(2\xi) \Gamma(2-\xi) \Gamma(1-\xi)} \frac{F_+(1/u) F_+(-1/v)}{(uv)^{\xi}} d\xi \quad (1.18)$$

3°. В дальнейшем понадобятся асимптотические выражения для функций F_{\pm} . Согласно формуле Эйлера [3]

$$u^{-z} F\left(2+z, z, 1+2z, -\frac{1}{u}\right) = \frac{\Gamma(1+2z) u^2}{\Gamma(z) \Gamma(1+z)} \int_0^1 \left(\frac{t(1-t)}{u+t}\right)^z \frac{dt}{(u+t)^{2t}} \quad (1.19)$$

Введем новую переменную

$$v = \frac{t(1-t)}{u+t}, \quad t_{\pm} = \frac{1-v}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1-v)^2 - 4uv} \quad (1.20)$$

после чего интеграл в правой части (1.19) примет вид

$$I = \frac{1}{u(1+u)} \int_0^n \frac{v^{z-1} (1+v) dv}{\sqrt{(1-v)^2 - 4uv}} + \frac{1}{u^2(1+u)} \int_0^n v^{z-1} \sqrt{(1-v)^2 - 4uv} dv \quad (1.21)$$

Здесь $n(u)$ — максимальное на отрезке $(0,1)$ значение функции $v(t)$ — определяется выражением

$$n(u) = 1 + 2u - 2\sqrt{u(u+1)}, \quad u = (1-n)^2 / 4n \quad (1.22)$$

В интегралах (1.21) положим $v = \eta n$, и разложим подкоренные выражения по степеням отношения $n^2(1-\eta)/(1-n^2)$, которое меньше единицы при $0 \leq \eta \leq 1$ и всех $u > a_0$, если $a_0 > 1/8$ (λ мало). Почленное интегрирование дает при этом

$$I = \frac{16n^{z+2}}{(1-n^2)^2} \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{n}{z+1/2} + O(n^2)\right]$$

Следовательно,

$$u^{-z} F(2+z, z, 1+2z, -1/u) = (4n)^z \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^{3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{n}{z+1/2} + O(n^2)\right] \quad (1.23)$$

Представление (1.23) позволяет выделить главную сингулярную часть ядра K . Положим

$$K_0(u, v) \equiv K_0(n, m) = \frac{2(1+v)}{\pi i v^2} \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^{3/2} \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{3/2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} \left(\frac{n}{m}\right)^{\xi} d\xi$$

$$m(v) = 2v + 1 - 2\sqrt{v(1+v)}, \quad v = (1-m)^2 / 4m$$

и представим интегральное уравнение (1.12) в виде

$$\int_{a_0}^{\infty} g(v) K_0(u, v) dv = -\frac{4Q}{\pi} - \int_{a_0}^{\infty} g(v) [K(u, v) - K_0(u, v)] dv \equiv f(u) \quad (1.25)$$

или, переходя к переменным n и m

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi i} \int_0^M \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{3/2} G(m) \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} \left(\frac{n}{m}\right)^{\xi} d\xi \frac{dm}{m} = \\ = F(n) \equiv \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{3/2} f\left(\frac{(1-n)^2}{4n}\right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$G(m) = g\left(\frac{(1-m)^2}{4m}\right), \quad M = m(a_0) = 1 + 2a_0 - 2\sqrt{a_0(a_0+1)} \quad (1.27)$$

Согласно (1.27) при $\lambda \rightarrow 0$ ($a_0 \rightarrow \infty$) имеем $M \sim 1/(4a_0) \rightarrow 0$.

§ 2. Решение вспомогательной задачи. Рассмотрим вспомогательную задачу, возникающую из исходной при обращении предельного градиента в нуль ($\lambda = 0$). Пусть дано уравнение

$$u^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + u \frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.1)$$

в полуполосе $0 < \theta < 1/2\pi$, $0 < u < \infty$ при условиях $\chi(u, 0) = 0$; $\chi(0, \theta) = 0$,

$$\chi(u, 1/2\pi) = 0 \quad (0 < u < U), \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta}(u, 1/2\pi) = \varphi(u) \quad (U < u < \infty) \quad (2.2)$$

причем функция $\varphi(u)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = Q / \pi \quad (2.3)$$

Обозначим

$$\chi(u, 1/2\pi) = P(u) \quad (u > U) \quad (2.4)$$

Применяя к уравнению (2.1) преобразование Меллина [4] и поступая аналогично § 1, легко получить для функции $P(u)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} u^{-\xi} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} d\xi \int_U^{\infty} v^{\xi-1} P(v) dv = \varphi(u) \quad (2.5)$$

Полагая в нем $u = 1/n$, $v = 1/m$, получим уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{M'} \frac{P^*(m)}{m} dm \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\xi} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} d\xi = \varphi^*(n) \quad (2.6)$$

$$(P^*(n) = P(1/n), \varphi^*(n) = \varphi(1/n), M' = 1/U)$$

Уравнение (2.6) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1.26) (с тем, однако, отличием, что первая часть последнего зависит от неизвестной функции).

Решение задачи (2.1) — (2.3) легко получить, рассматривая уравнение (2.1) как уравнение Лапласа в полярных координатах. Полагая $z = we^{i\theta}$, получим для функции χ смешанную краевую задачу в первом квадранте плоскости z . После отображения на полуплоскость искомое решение дается формулой Келдыша — Седова [5].

В результате имеем (2.7)

$$P(u) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u^2}{U^2} - 1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s+U^2}) - Q/\pi}{s+U^2} \ln \left| \frac{\sqrt{s} - \sqrt{u^2 - U^2}}{\sqrt{s} + \sqrt{u^2 - U^2}} \right| ds$$

§ 3. Сведение к интегральному уравнению Фредгольма. I°. Сопоставим уравнения (2.6) и (1.26). Установим соответствие $M \rightarrow M'$, $[(1+m)/(1-m)]^{3/2} G(m) \rightarrow P^*(m)$, $F(n) \rightarrow 4\varphi^*(n)$ (после чего эти уравнения станут тождественными) и воспользуемся формулой (2.7) для решения уравнения (1.26). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{3/2} G(m) &= \frac{Q}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{M^2}{m^2} - 1\right)^{1/2} - \\ &- \frac{M^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{4} F\left(\frac{M}{\sqrt{1+sM^2}}\right) - \frac{Q}{\pi} \right] \ln \left| \frac{mM \sqrt{s} - \sqrt{M^2 - m^2}}{mM \sqrt{s} + \sqrt{M^2 - m^2}} \right| \frac{ds}{1+sM^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя сюда выражение для F в соответствии с (1.26) и (1.27), получим

$$\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{1/2} G(m) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{M^2}{m^2} - 1\right)^{1/2} - \frac{QM^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{sM^2+1}+M}{\sqrt{sM^2+1}-M}\right)^{3/2} - 1 \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left| \frac{mM \sqrt{s} - \sqrt{M^2 - m^2}}{mM \sqrt{s} + \sqrt{M^2 - m^2}} \right| \frac{ds}{1 + sM^2} + \frac{M^2}{32\pi} \int_0^M G(\sigma) \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} d\sigma \times \\ & \times \left\{ \int_0^\infty \left[K^* \left(\frac{M}{\sqrt{1 + sM^2}}, \sigma \right) - K_0^* \left(\frac{M}{\sqrt{1 + sM^2}}, \sigma \right) \right] \ln \left| \frac{mM \sqrt{s} - \sqrt{M^2 - m^2}}{mM \sqrt{s} + \sqrt{M^2 - m^2}} \right| \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\sqrt{sM^2 + 1} + M}{\sqrt{sM^2 + 1} - M} \right)^{3/2} \frac{ds}{1 + sM^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В дальнейшем интегральное уравнение (3.2) будет рассматриваться при малых значениях параметра M , что отвечает $\lambda \rightarrow 0$; при этом удобно изменить масштаб независимой переменной пропорционально M . Введем поэтому в уравнении (3.2) новые переменные

$$\zeta = m/M, \quad Y(\zeta) = [(1 + M\zeta)/(1 - M\zeta)]^{3/2} G(M\zeta) \quad (3.3)$$

и заменим переменные при внутреннем интегрировании. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} - \frac{Q}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[\left(\frac{\sqrt{s+1} + M}{\sqrt{s+1} - M} \right)^{3/2} - 1 \right] \times \\ & \times \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1 - \zeta^2}} \right| \frac{ds}{1 + s} + \frac{1}{32\pi M} \int_0^1 Y(\sigma) \frac{(1 - M\sigma)^{5/2}}{\sigma^2 (1 + M\sigma)^{1/2}} d\sigma \times \\ & \times \left\{ \int_0^\infty \left[K^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) - K_0^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) \right] \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1 - \zeta^2}} \right| \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\sqrt{s+1} + M}{\sqrt{s+1} - M} \right)^{3/2} \frac{ds}{1 + s} \right\} \equiv A(\zeta) + \int_0^1 Y(\sigma) R(\zeta, \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (3.4)$$

2°. Исследуем подробнее разность $K^* - K_0^*$. В соответствии с (1.17), (1.18) и (1.24) имеем

$$\begin{aligned} & K^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) - K_0^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) = \\ & = \frac{2(1+v)}{\pi i v^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} \left[\left\{ \left(\frac{v}{u} \right)^\xi F_+ \left(-\frac{1}{u} \right) F_- \left(-\frac{1}{v} \right) - \left(\frac{n}{m} \right)^\xi \frac{(1-n)(1-m)^{3/2}}{(1+n)(1+m)} \right\} + \right. \\ & \left. + (uv)^{-\xi} F_+ \left(-\frac{1}{u} \right) F_+ \left(-\frac{1}{v} \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{M}{\sqrt{s+1}} \right)^2 \frac{\sqrt{s+1}}{M}, \quad v = \frac{1}{4} \frac{(1 - M\sigma)^2}{M\sigma}$$

Будем теперь рассматривать выражение (3.5) при малых M . При этом для гипергеометрических функций справедливы (равномерно по ξ) разложения (1.23), исполь-

зудя которые, получим

$$K^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) - K_0^* \left(\frac{M}{\sqrt{s+1}}, M\sigma \right) = \frac{8M\sigma}{\pi i} \left\{ \frac{3}{2} M \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi\xi}{2} (\sigma \sqrt{s+1})^{-\xi} \times \right. \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{s+1} (\xi + 1/2)} + \frac{\sigma}{1/2 - \xi} + O(M) \right) d\xi + \\ \left. + \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi\xi}{2} \left[\frac{16M^2}{\sigma \sqrt{s+1}} \right]^\xi (1 + O(M)) \frac{\Gamma(-2\xi) \Gamma(2+\xi) \Gamma(1+\xi)}{\Gamma(2\xi) \Gamma(2-\xi) \Gamma(1-\xi)} d\xi \right\} \quad (3.6)$$

Второй интеграл в (3.6) можно преобразовать в интеграл по прямой, параллельной мнимой оси и сдвинутой относительно нее вправо на расстояние c , $1/2 < c < 3/2$, добавив вклад от полюса подынтегральной функции при $\xi = 1/2$. При этом для интеграла по прямой справедлива оценка

$$\left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \right| \leq \operatorname{const} M^{2c}$$

В результате интеграл по мнимой оси равен с искомой точностью просто вкладу от полюса

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} = -\frac{3}{2} \pi i \sigma^{1/2} (s+1)^{-1/4} M + O(M^2) \quad (3.7)$$

В свою очередь первый интеграл в (3.6) в зависимости от знака $\operatorname{Im}(\sigma \sqrt{s+1})$ может быть представлен в виде суммы вычетов подынтегральной функции в правой или в левой полуплоскости. В результате получаем

$$\frac{3}{2} M \int_{-i\infty}^{i\infty} = \frac{3}{2} \frac{M\pi i \sqrt{\sigma}}{(s+1)^{1/4}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12M\pi i}{(\sigma \sqrt{s+1})^{2n}} \left[\frac{n}{(4n+1) \sqrt{s+1}} + \frac{\sigma n}{1-4n} \right] \\ (\sigma \sqrt{s+1} > 1) \quad (3.8)$$

$$\frac{3}{2} M \int_{-i\infty}^{i\infty} = \frac{3}{2} \frac{M\pi i \sqrt{\sigma}}{(s+1)^{1/4}} - \sum_{n=1}^{\infty} 12M\pi i (\sigma \sqrt{s+1})^{2n} \left[\frac{n}{(1-4n) \sqrt{s+1}} + \frac{\sigma n}{1+4n} \right] \\ (\sigma \sqrt{s+1} < 1) \quad (3.9)$$

Учитывая (3.7), получаем, что разность $K^* - K_0^*$ в рассматриваемом приближении равна рядам, стоящим в правой части выражений (3.8) или (3.9) в зависимости от значения произведения $\sigma \sqrt{s+1}$. Имеем, таким образом

$$K^* (M(s+1)^{-1/2}, M\sigma) - K_0^* (M(s+1)^{-1/2}, M\sigma) = \\ = -\frac{16M\sigma}{\pi^2 i} \left(\frac{12M\pi i}{\sqrt{s+1}} f(\sigma \sqrt{s+1}) + O(M^2) \right) \quad (3.10)$$

Здесь

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{2n} \left(\frac{z}{4n+1} - \frac{1}{4n-1} \right) \quad (z < 1) \\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{-2n} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{z}{4n-1} \right) \quad (z > 1)$$

Так что

$$f(z) = \frac{1}{4} \left[\frac{z}{1+z} - \frac{\sqrt{z}}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right| \right] \quad (3.11)$$

(суммирование ряда для $f(z)$ элементарно приводится к суммированию геометрической прогрессии, если выполнить замену $z = s^2$).

3°. Решение интегрального уравнения (3.4) при малых M может быть найдено методом последовательных приближений. Используя (3.11), находим, что решение с точностью до членов порядка M^2 дается выражением

$$Y(\xi) = \frac{Q}{\pi} \arccos \xi - \frac{3QM}{2\pi^2} \int_0^\infty \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}} \right| \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} - \frac{6MQ}{\pi^3} \int_0^1 \arccos \sigma \frac{d\sigma}{\sigma} \int_0^\infty f(\sigma \sqrt{s+1}) \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}} \right| \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} + O(M^2) \quad (3.12)$$

§ 4. Определение размеров застойной зоны. Воспользуемся теперь найденным решением (3.12) интегрального уравнения для того, чтобы определить приближенно форму застойной зоны.

Согласно (1.9) и (1.11)

$$\psi(u, \theta) = \frac{u^2}{4} \int_0^\infty \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{sh} \theta \sqrt{\alpha}}{\operatorname{th} \sqrt{\alpha} \pi \operatorname{sh}^{1/2} \sqrt{\alpha} \pi} F(\alpha, -u) d\alpha \int_{\alpha_0}^\infty (1+v) g(v) F(\alpha, -v) dv \quad (4.1)$$

Для определения формы границ застойной зоны необходимо [1] вычислить величину

$$h(\theta) = \frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{sh} \theta \sqrt{\alpha}}{\operatorname{th} \sqrt{\alpha} \pi \operatorname{sh}^{1/2} \sqrt{\alpha} \pi} \int_{\alpha_0}^\infty (1+v) g(v) F(\alpha, -v) dv d\alpha \quad (4.2)$$

В последнем интеграле можно перейти к новой переменной

$$\xi = Mm, \quad v = (1-m)^2 / 4m \quad (4.3)$$

а затем воспользоваться представлением (1.14) для функций F . При этом подынтегральное выражение оказывается четной функцией переменной $s = \sqrt{\alpha}$, так что интегрирование по s можно вести от $-\infty$ до ∞ . Используя полученные выше асимптотические формулы для гипергеометрических функций, получим

$$h(\theta) = 2 \int_{-\infty}^\infty s^3 (1+s^2) \frac{\Gamma(2is)}{\Gamma(2+is) \Gamma(1+is)} \operatorname{cth} s\pi \frac{\operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{sh}^{1/2} s\pi} (4M)^{-is} \times \\ \times \int_0^1 \xi^{-is} \left(\frac{1+M\xi}{1-M\xi} \right)^{1/2} G(M\xi) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M\xi}{1/2 - i\xi} + O(M^2) \right) \frac{d\xi}{\xi} ds \quad (4.4)$$

Подынтегральная функция в (4.4) аналитична и убывает в верхней полуплоскости (предполагается $M < 1/4$).

В результате можно получить выражение для $h(\theta)$ в виде ряда по вычетам в полюсах подынтегральной функции, которые, как легко установить, расположены в точках $s = 2ik$, где k — числа натурального ряда. В результате с точностью до членов порядка M^2 получаем

$$h(\theta) = 64\pi^{-1} M^2 \sin 2\theta \int_0^1 Y(\xi) (1 + 0.6M\xi + O(M^2)) \xi d\xi \quad (4.5)$$

Подставляя сюда найденное выше выражение для функции $Y(\xi)$, получим

$$\begin{aligned}
 h(\theta) = & 64\pi^{-2} Q M^2 \sin 2\theta \left[\int_0^1 \zeta \arccos \zeta (1 + 0.6M\zeta) d\zeta - \right. \\
 & - \frac{3M}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}} \right| \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} \zeta d\zeta - \\
 & \left. - \frac{3M}{\pi} \int_0^1 \zeta d\zeta \int_0^1 \arccos \sigma \frac{d\sigma}{\sigma} \int_0^\infty f(\sigma \sqrt{s+1}) \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}} \right| \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} \right] \equiv \\
 & \equiv 64\pi^{-2} Q M^2 \sin 2\theta (A_0 + A_1 M)
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Согласно [1], координаты точек границы застойной зоны определяются формулой

$$x(\theta) + iy(\theta) = \lambda^{-1} \int_0^\theta e^{i\varphi} h(\varphi) d\varphi + \text{const}$$

Подставляя сюда (4.6), получаем

$$x(\theta) + iy(\theta) = \frac{128M^2}{3\lambda\pi^2} (A_0 + A_1 M + O(M^2)) (-\cos^3\theta + i \sin^3\theta) \quad (4.7)$$

Таким образом, с точностью до членов порядка M^2 застойные зоны изменяются с изменением параметра M подобным образом.

Определим теперь расстояние от источника до острия застойной зоны, найденное из выражения

$$x_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\partial \psi(u, 0)}{\partial \theta} \frac{du}{u^2} \quad (4.8)$$

В данном случае имеем, подставляя сюда выражение (4.1)

$$x_0 = \frac{1}{4\lambda} \int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{\alpha^{3/2} (1+\alpha)}{\text{th} \sqrt{\alpha\pi} \text{sh}^{1/2} \sqrt{\alpha\pi}} F(\alpha, -u) d\alpha \int_{\alpha_0}^\infty (1+v) g(v) F(\alpha, -v) dv \quad (4.9)$$

Используя формулу

$$\int_0^\infty F(a, b, c, -z) dz = (c-1)(a-1)^{-1}(b-1)^{-1}$$

и преобразуя затем возникающие интегралы подобно тому, как это делалось выше, получим

$$\begin{aligned}
 x_0 = & \frac{2}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty s^4 \frac{\text{cth} s\pi}{\text{sh}^{1/2} s\pi} (4M)^{-is} \frac{\Gamma(2is)}{\Gamma(2+is)\Gamma(1+is)} \int_0^1 \left(\frac{1+M\zeta}{1-M\zeta} \right)^{3/2} \zeta^{-is} G(M\zeta) \times \\
 & \times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M\zeta}{1/2 - is} + Q(M^2) \right) \frac{d\zeta}{\zeta} ds
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Это выражение с точностью до членов порядка M^2 можно вычислить так же, как вычислено выше выражение (4.5) для $h(\theta)$. В результате имеем

$$x_0 = \frac{4M}{\lambda} \int_0^1 Y(\zeta) d\zeta + \frac{4M^2}{\lambda} \left(1 - \frac{32\pi}{3} \right) \int_0^1 Y(\zeta) \zeta d\zeta \quad (4.11)$$

Откуда

$$x_0 = \frac{4MQ}{\pi\lambda} \int_0^1 \arccos \zeta d\zeta + \frac{QM^2}{\pi\lambda} \left\{ 4 \left(1 - \frac{32\pi}{3} \right) \int_0^1 \zeta \arccos \zeta d\zeta - \right. \\ \left. - \frac{6}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} \int_0^1 \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}} \right| d\zeta - \right. \\ \left. - \frac{24}{\pi^2} \int_0^1 \arccos \sigma \frac{d\sigma}{\sigma} \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty f(\sigma \sqrt{s+1}) \ln \left| \frac{\zeta \sqrt{s} + \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{s} - \sqrt{1-\zeta^2}} \right| \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} \right\} \quad (4.12)$$

Вычисление по формулам (4.5) и (4.12) дает

$$x_0 = \frac{4MQ}{\pi\lambda} (1 - 0.32M), \quad x(\theta) + iy(\theta) = \frac{16QM^2}{3\pi\lambda} (1 + 1.00M) \quad (4.13)$$

Согласно (1.27), при больших $a_0 = a/\lambda$

$$M = 1/4 (\lambda/a) [1 + 3/2 (\lambda/a) + \dots] \quad (4.14)$$

Таким образом

$$x_0 = (Q/\pi a) (1 + 1.42\lambda/a \dots) \quad (4.15)$$

$$x(\theta) + iy(\theta) = 1/3 (Q\lambda/\pi) (1 + 3.2\lambda/a \dots) (-\cos^3\theta + i \sin^3\theta)$$

§ 5. Анализ структуры приближенного решения в общем случае. Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть задача на плоскости годографа формулируется в полосе с разрезом или с несколькими разрезами. При $\lambda \rightarrow 0$ решение задачи равномерно стремится к решению, соответствующему обычному линейному закону фильтрации ($\lambda = 0$), которое находится конформным отображением. Однако для определения границы застойной зоны необходимо вычислить предел

$$\chi(\theta) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w}$$

а для этой величины равномерная сходимости уже не имеет места. Действительно, при малых w решение вблизи линии $w = 0$, $0 < \theta < \theta^*$, на которой $\psi(0, \theta) = 0$, может быть представлено в виде

$$\psi(w, \theta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m w^2 F(2 - \alpha_m, 2 + \alpha_m, 3, -w/\lambda) \sin \alpha_m \theta \\ \left(\alpha_m = \frac{\pi m}{\theta^*} \right) \quad (5.1)$$

Поскольку $F(2 - \alpha_m, 2 + \alpha_m, 3, 0) = 1$, указанный выше предел существует при любом θ и равен

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \alpha_m \theta,$$

так что в него дают вклад все члены ряда (5.1). С другой стороны, в случае $\lambda = 0$ решение при малых w представляется в виде

$$\psi_0(w, \theta) \equiv \psi(w, \theta, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m w^{\alpha_m} \sin \alpha_m \theta \quad (5.2)$$

В результате предел $\chi(\theta)$ не существует при $\pi/\theta^* < 2$, равен нулю при $\pi/\theta^* > 2$ и лишь при $\theta^* = 1/2 \pi$ имеет конечное значение. Во всех случаях предельное поведение определяется первым членом ряда (5.2).

Неравномерность приближения производных проявляется лишь в узкой полосе, прилегающей к линии $w = 0$ и представляющей собой пограничный слой. Отсюда следует простой прием построения равномерного приближения: искомое решение $\psi(w, \theta, \lambda) = \psi(w, \theta)$ заменяется приближенным $\psi_0(w, \theta) = \psi(w, \theta, 0)$ в области $w \gg \lambda$, а затем $\psi(w, \theta, \lambda)$ продолжается в область малых значений w уже как решение уравнения (0.1). Такой прием применим всегда, когда отношение a/λ достаточно велико и годится лишь для вычисления главного члена асимптотики. Вообще говоря, только этот член не зависит от положения вспомогательной границы, на которой точное решение заменяется приближенным (при условии, что граница проведена в области $w \gg \lambda$).

Пример. Пусть на плоскости годографа ищется решение уравнения (0.1) в полуполосе $0 < w < \infty$, $0 < \theta < \theta_0$ с исключенным отрезком $0 < w < a$, $\theta = \theta_1$ (или несколькими такими отрезками). Обозначим

$$\psi_0(w, \theta_1) = g(u) \quad (w = u\lambda \geq a = a_0\lambda)$$

где $\psi_0(w, \theta)$ — решение, соответствующее $\lambda = 0$, и положим приближенно

$$\psi(w, \theta_1) \equiv \psi(w, \theta_1, \lambda) = g(u) \quad (u > a_0) \quad (5.3)$$

После этого полуполоса $0 < \theta < \theta_0$ разобьется на две полуполосы, в каждой из которых заданы граничные значения функции ψ . Возникающая упрощенная задача может быть решена при помощи интегрального преобразования (1.5). В частности, для решения $\psi(w, \theta)$ в полуполосе $0 < \theta < \theta_1$ имеем

$$\psi(w, 0) = \psi(0, \theta) = 0, \quad \psi(w, \theta_1) = 0 \quad (w < a) \quad \psi(w, \theta_1) = g(u) \quad (u > a_0)$$

и подобно (4.1)

$$\psi(u, \theta) = \frac{u^2}{4} \int_0^\infty \frac{\alpha(1+\alpha)}{\operatorname{th} \sqrt{\alpha}\pi} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\alpha}\theta}{\operatorname{sh} \sqrt{\alpha}\theta_1} F(\alpha, -u) d\alpha \int_{a_0}^\infty (1+v)g(v)F(\alpha, -v)dv \quad (5.4)$$

При определении границы застойной зоны, которой отвечает отрезок $w = 0$, $0 < \theta < \theta_1$, выражение (5.4) можно дополнительно упростить так же, как это было сделано в § 4. Вся разница состоит в том, что полюс подынтегрального выражения, дающий основной вклад в решение, расположен в точке $s = i\pi/\theta_1$. В результате получим

$$h(\theta) = -\frac{4\pi^2}{\theta_1^2} \left(1 + \frac{\pi}{\theta_1}\right) (4M)^{\pi/\theta_1} \frac{\Gamma(-2\pi/\theta_1)}{[\Gamma(-\pi/\theta_1)]^2} \frac{\sin \pi\theta/\theta_1}{\operatorname{tg} \pi^2/\theta_1} \int_0^1 \xi^{\pi/\theta_1-1} G(M\xi) d\xi$$

Согласно (1.27), при $a_0 \rightarrow \infty$ имеем $M \sim 1/4 a_0$ так что из (5.4) окончательно

$$h(\theta) = -\frac{4\pi^2}{\theta_1} \left(1 + \frac{\pi}{\theta_1}\right) \frac{\Gamma(-2\pi/\theta_1) a_0^{-\pi/\theta_1}}{[\Gamma(-\pi/\theta_1)]^2} \frac{\sin \pi\theta/\theta_1}{\operatorname{tg} \pi^2/\theta_1} \int_0^1 \xi^{\pi/\theta_1-1} g\left(\frac{a}{\xi}\right) d\xi \quad (5.5)$$

Отсюда находим для координат застойной зоны

$$\begin{aligned} x(\theta) + iy(\theta) &= \frac{4\pi^2 a_0^{-\pi/\theta_1}}{\theta_1(\pi - \theta_1)\lambda} \frac{\Gamma(-2\pi/\theta_1)}{[\Gamma(-\pi/\theta_1)]^2} \int_0^1 \xi^{\pi/\theta_1-1} g\left(\frac{a}{\xi}\right) d\xi \times \\ &\times \operatorname{ctg} \frac{\pi^2}{\theta_1} \left[\left(\frac{\pi}{\theta_1} \cos \frac{\pi\theta}{\theta_1} \cos \theta + \sin \theta \sin \frac{\pi\theta}{\theta_1} \right) + i \left(\cos \theta \sin \frac{\pi\theta}{\theta_1} - \frac{\pi}{\theta_1} \sin \theta \cos \frac{\pi\theta}{\theta_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Расстояние от острия застойной зоны до источника с точностью до членов, стремящихся к нулю с уменьшением λ , равно расстоянию между критической точкой ($w = 0$) течения и источником при линейном законе фильтрации. Этот очевидный результат может быть получен из формул, аналогичных формулам (4.9) и (4.10).

2°. Рассмотрим еще задачу о течении, создаваемом парой источников — сток равной интенсивности. В этом случае в физической плоскости образуется внешняя застойная зона (фиг. 2 работы [1]), а в плоскости годографа требуется решить уравнение (0.1) в полуполосе $0 < w < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$ с разрезом $\theta = \pi$, $a < w < \infty$. На наружной границе полуполосы $\psi = 0$, на разрезе $\psi = Q$. Проведем вспомогательную границу $\lambda \ll w = a' \ll a$, $0 < \theta < 2\pi$ и обозначим

$$\psi(a', \theta) = f(\theta) \quad (5.7)$$

Решение уравнения (0.1) в прямоугольнике $0 < \theta < 2\pi$, $0 < w < a'$ может быть найдено методом Фурье и имеет вид

$$\psi(w, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{w}{a'} \right)^2 \frac{F(2 - 1/2m, 2 + 1/2m, 3, -w/\lambda)}{F(2 - 1/2m, 2 + 1/2m, 3, -a'/\lambda)} \sin \frac{m\theta}{2} \quad (5.8)$$

где f_m — коэффициенты разложения функции $f(\theta)$ в ряд по синусам на отрезке $(0, 2\pi)$.

В результате для границы застойной зоны имеем

$$\begin{aligned} x(\theta) + yi(\theta) = x(0) + \frac{4\lambda}{a'^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{F(2 - 1/2m, 2 + 1/2m, 3, -a'/\lambda)} \times \\ \times \left[\frac{m}{m^2 - 4} - \frac{m \cos \theta \cos 1/2m\theta + 2 \sin \theta \sin 1/2m\theta}{m^2 - 4} - \right. \\ \left. - i \frac{m \sin \theta \cos 1/2m\theta - 2 \cos \theta \sin 1/2m\theta}{m^2 - 4} \right] \quad (5.9) \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить выражение (5.9) при малых λ , рассмотрим асимптотическое поведение гипергеометрической функции в знаменателе при $a'/\lambda \rightarrow \infty$. При этом для $m < 4$ асимптотика определяется согласно формулам аналитического продолжения ([6], формула 2.1. (18))

$$F\left(2 - \frac{1}{2}m; 2 + \frac{1}{2}m, 3, -\frac{a'}{\lambda}\right) \sim \left(\frac{a'}{\lambda}\right)^{-2+1/2m} \frac{2\Gamma(m)}{\Gamma(1+1/2m)\Gamma(2+1/2m)} \quad (5.10)$$

При больших значениях m для m четных F представляет собой многочлен от (a'/λ) степени $1/2m - 2$; для m нечетных верна асимптотика (5.10). Таким образом, (5.9) дает разложение по функциям возрастающего с увеличением m порядка по λ и главный член разложения имеет вид

$$\begin{aligned} x(\theta) + iy(\theta) = x(0) + \frac{64f_1}{9(\lambda a')^{1/2}\pi} \times \\ \times \left[\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} - 1 + i \left(\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - 2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (5.11) \end{aligned}$$

При вычислении этого члена можно упростить выражение коэффициента f_1 , взяв его для случая $\lambda = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\psi_0(w; \theta) &= \frac{Q}{2} + \operatorname{Im} \frac{Q}{\pi i} \arcsin \left(1 + \frac{2w}{a} e^{i\theta} \right) \quad (0 < \theta < \pi) \\ f_0(\theta) = \psi_0(a, \theta) &= \frac{Q}{2} + \operatorname{Im} \frac{Q}{\pi i} \arcsin \left(1 + \frac{2a'}{a} e^{i\theta} \right)\end{aligned}\quad (5.12)$$

Отсюда

$$f_1 = \frac{Q}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta) \sin \frac{\theta}{2} d\theta = Q \sqrt{\frac{a'}{a}}$$

Подставляя это выражение в (5.11), видим, что для вычисляемого главного члена результат, как и должно быть, не зависит от произвольного выбора границы a' и равен

$$\begin{aligned}x(\theta) + iy(\theta) &= x(0) + \frac{64}{9\pi} \frac{Q}{(\lambda a)^{3/2}} \times \\ &\times \left[\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} - 1 + i \left(\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - 2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.13)$$

Для того чтобы вернуться на физическую плоскость, необходимо установить еще связь между вспомогательным параметром a и расстоянием между источником и стоком $2L$. Имеем (см., [например, ^[1]])

$$L = \int_a^\infty \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2}\quad (5.14)$$

Очевидно, главный член величины L можно вычислить в предположении $\lambda=0$, т.е.

$$L = \int_a^\infty \frac{\partial \psi_0(w, \pi)}{\partial \theta} \frac{dw}{w^2} = \frac{Q}{\pi} \int_a^\infty \frac{dw}{w^{3/2} \sqrt{a+w}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)Q}{\pi a}\quad (5.15)$$

и формула (5.13) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}x(\theta) + iy(\theta) &= \frac{32}{9} \left(\frac{2(1+\sqrt{2})QL}{\pi\lambda} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left[\cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + i \left(\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - 2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.16)$$

Здесь величина $x(0)$, входящая в (5.16), определена с учетом условия симметрии $x(0) = -x(2\pi)$.

3°. О степени малости λ , при которой достаточно ограничиться главным членом, можно составить представление, вычислив этот член в задаче, допускающей точное решение.

В качестве такой задачи рассмотрим течение от бесконечного ряда одинаковых источников интенсивности $4Q$ (работа ^[2]). На плоскости годографа эта задача сводится к отысканию решения в полуполосе $0 < \theta < 1/2\pi$, $0 < w < \infty$ с условиями

$$\psi(w, \theta) = \psi(0, \theta) = 0, \quad \psi(w, 1/2\pi) = 0, \quad (w < a), \quad \psi(w, 1/2\pi) = Q \quad (w > a)$$

В данном случае значение g известно и главный член разложения решения находится сразу подстановкой $g = Q$ в формулу (5.6). В результате находим

$$\begin{aligned}x(\theta) + iy(\theta) &= \lim_{\theta_1 \rightarrow 1/2\pi} \left[\frac{8Q\pi}{\pi - \theta_1} \frac{\Gamma(-2\pi/\theta_1)}{[\Gamma(-\pi/\theta_1)]^2} \operatorname{ctg} \frac{\pi^2}{\theta_1} \right] \times \\ &\times [(2 \cos 2\theta \cos \theta + \sin \theta \sin 2\theta) + i (\cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin \theta \cos 2\theta)] = \\ &= \frac{4Q\lambda}{3\pi a^2} (-\cos^3 \theta + i \sin^3 \theta)\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство $a = Q/L$, где L — половина расстояния между соседними источниками, находим

$$\frac{x(\theta) + iy(\theta)}{L} = \frac{4\lambda L}{\pi Q} (-\cos^3 \theta + i \sin^3 \theta) \quad (5.17)$$

Результаты сопоставления приближенного решения (сплошные линии) с точным (пунктирные линии) даны на фигуре. Цифры около кривых обозначают соответствующие значения параметра $a_0 = Q/\lambda L$.

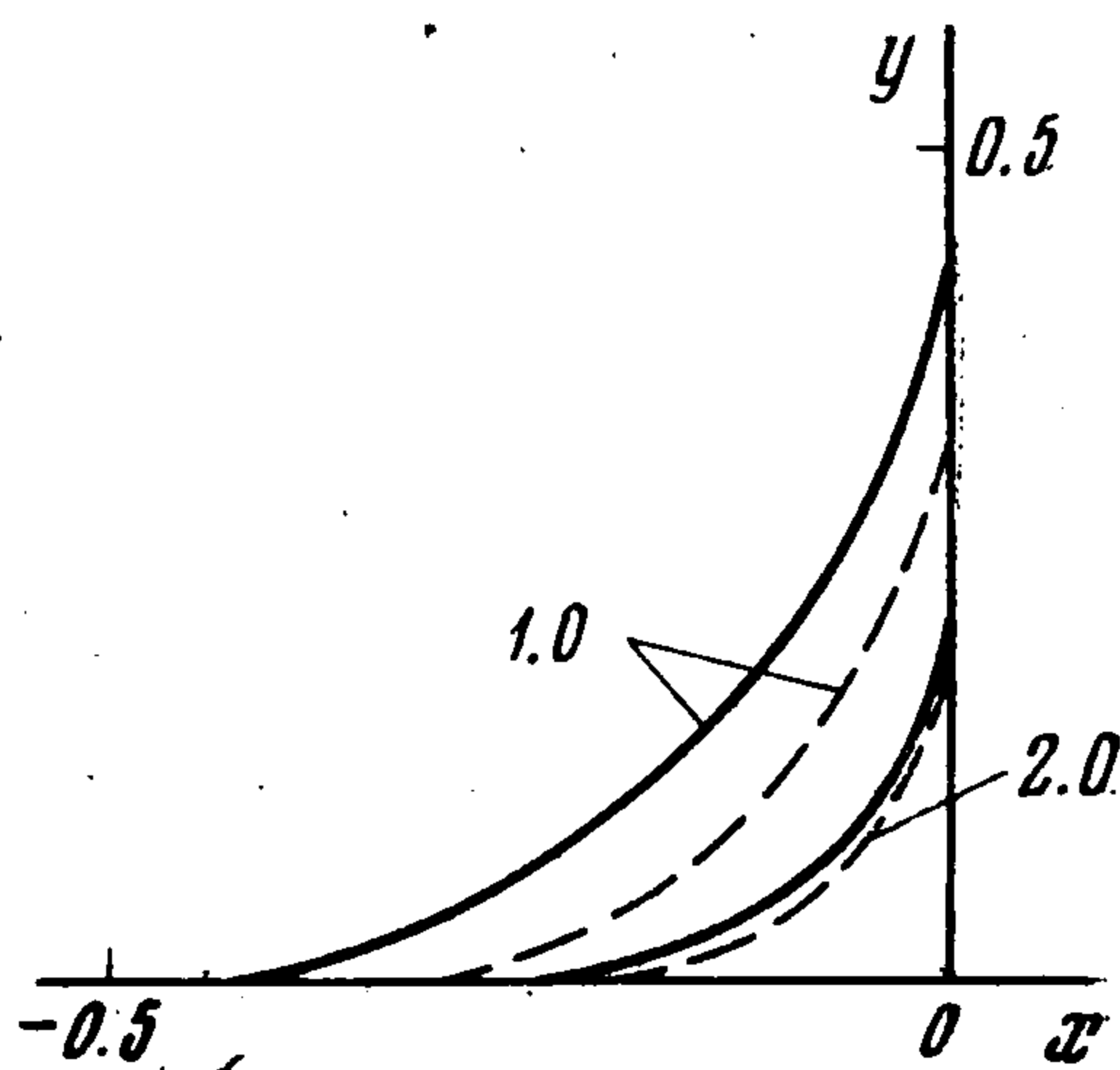
4°. Тот же прием может быть применен при достаточно малых λ к более сложным течениям, не допускающим взаимно однозначного отображения на плоскость годографа. Здесь застойные зоны могут возникнуть вблизи критических точек невозмущенного течения ($\lambda = 0$) или вблизи бесконечно удаленной точки, т. е. вблизи тех точек невозмущенного течения, где скорость обращается в нуль, и величина λ оказывается существенной, какой бы малой она не была.

Каждую критическую точку можно окружить линией, на которой скорость w принимает постоянное значение $a \gg \lambda$. Тогда на этих граничных линиях распределение функции тока и скорости можно считать таким же, как и при $\lambda = 0$. Течение же внутри выделенных окрестностей обладает локальной симметрией и состоит из некоторого числа одинаковых секториальных областей, каждая из которых допускает отображение на прямоугольник в плоскости годографа. В результате легко построить приближенную картину течения и застойные зоны в выделенных областях. Естественно, что наибольший интерес представляют в этом случае внешние застойные зоны, окружающие бесконечно удаленную точку, так как застойные зоны вблизи внутренних критических точек потока имеют при малых λ малые размеры.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту за обсуждение и И. И. Ереминой и Т. Н. Ивановой за помощь в работе.

Поступила 13 V 1968

НИИ механики
Московского университета



ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Ентов В. М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2. М.—Л., Физматгиз, 1963.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1955.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2. М., Физматгиз, 1958.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.