Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ГАЗОВЗВЕСЕЙ. ДИНАМИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Предложена модель случайных псевдотурбулентных движений фаз в концентрированных дисперсных системах типа газ — взвешенные частицы, основанная на дальнейшем развитии представлений, изложенных в работах [1-3], а также [4]. В принципе эта модель позволяет построить структурную теорию газовзвесей в псевдотурбулентном режиме течения [3], вычислить соответствующие коэффициенты переноса и сформулировать динамические уравнения движения.

Статистическому рассмотрению пульсационных движений двухфазной дисперсной системы были посвящены работы [1-3], где был развит общий подход к количественному исследованию пульсаций и их влиянию на среднее движение системы, а также намечены пути к построению неньютоновской механики дисперсных систем.

Однако в рамках модели [3] не удается до конца преодолеть ряд трудностей. Во-первых, указанная модель основана на введении неких случайных сил, действующих на фазы в их хаотическом движении, и статистического белого шума, позволяющего описывать не только регулярное вырождение флуктуаций среднего гидродинамического поля дисперсной системы, но и случайное накопление их. Эти силы и белый шум вводятся в [3] раздельно, в то время как из общих физических соображений само появление шума должно представлять результат действия случайных сил.

Во-вторых, позитивные результаты в рамках этой теории получаются при дополнительных предположениях типа гипотезы о статистической независимости положений отдельных частиц в пространстве. Эта гипотеза верна, строго говоря, лишь при анализе пульсаций в достаточно больших объемах дисперсной системы.

В-третьих, для линеаризации стохастических уравнений приходится предполагать случайные возмущения среднего движения малыми, что не всегда соответствует действительности. И, наконец, в-четвертых, при формулировке динамических уравнений возникает неясность, связанная с формой записи членов, описывающих пульсационные напряжения. Из закона сохранения момента импульса следуют определенные соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты пульсационных вязкостей фаз, подсчитываемые совершенно независимым путем.

В предлагаемой теории использован метод, аналогичный, по сути дела, методу описания турбулентности однофазной среды, предложенному в [4]; при этом указанные выше недостатки удается ликвидировать.

§ 1. Динамические и стохастические уравнения. Ниже рассматриваем систему частиц, взвешенных в газе, пренебрегая для простоты импульсом газа и вязкой диссипацией энергии в нем. Используя приближение сплошной среды, скорость газовой и диспергированной фаз определяем, как и в [3], путем усреднения по объемам, содержащим $N \gg 1$ частиц. Если линейный размер такого объема равен L, то для скоростей фаз, давления в газе и объемной концентрации дисперсной системы имеем, соответственно,

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v} + \mathbf{v}_L', \quad \mathbf{w}_L = \mathbf{w} + \mathbf{w}_L', \quad p_L = d_2\pi_L = d_2(\pi + \pi_L'), \quad \rho_L = \rho + \rho_L' \tag{1.1}$$

Здесь первые слагаемые в правых частях получены усреднением по ансамблю (т. е. формально при N, $L \to \infty$, так что, например, $\mathbf{v}_L \to \mathbf{v}$), а вторые слагаемые представляют случайные пульсации соответствующих величин. Символом π здесь и ниже обозначено давление, деленное на плотность материала частиц d_2.

Пульсации, пространственный масштаб которых меньше L, при таком усреднении частично исчезают. Их влияние на среднее движение и крупномасштабные пульсации будем описывать, по аналогии с моделью работы [4], при помощи введения тензоров пульсационного давления и псевдотурбулентной вязкости. По своему смыслу эти величины аналогичны обычным давлению и вязкости, обусловленным молекулярным движением [1]. Учитывая необходимость удовлетворения закона сохранения момента количества движения, сразу же симметризуем тензор псевдотурбулентных вязких напряжений [4]. В результате имеем для тензора пульсационного (псевдотурбулентного) [2] давления диспергированной фазы $\mathbf{P}_L$ и тензора псевдотурбулентных напряжений в этой фазе $\boldsymbol{\tau}_L$ следующие формальные представления:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}_L = \| P_{L,\,ij} \|, \quad \boldsymbol{\tau}_L = \| \tau_{L,\,ij} \|, \quad P_{L,\,ij} = \rho\, d_2\, \Pi_{L,\,ij} \\
\tau_{L,\,ij} = \eta_{L,\,ik} \frac{\partial w_{Lj}}{\partial x_k} + \eta_{L,\,jk} \frac{\partial w_{Li}}{\partial x_k}, \qquad \boldsymbol{\eta}_L = \rho\, d_2 \boldsymbol{\nu}_L, \quad \boldsymbol{\nu}_L = \| \nu_{L,\,ij} \|
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь $\boldsymbol{\eta}_L$ и $\boldsymbol{\nu}_L$ — тензоры динамической и кинематической псевдотурбулентной вязкости диспергированной фазы, $\boldsymbol{\Pi}_L$ — тензор среднеквадратичных пульсационных скоростей этой фазы, обусловленные только мелкомасштабными (по сравнению с масштабом усреднения L) случайными движениями. Более полное определение этих тензоров содержится ниже, здесь существенно, что все тензоры в (1.2) предполагаются в некотором приближении зависящими только от условий среднего движения и физических параметров фаз. По существу это соответствует аналогичному допущению, принимаемому в кинетической теории газов. Соотношения типа (1.2) можно записать и для дисперсионной среды, но при сделанном пренебрежении импульсом и молекулярной вязкостью газа всеми псевдотурбулентными движениями в нем и их влиянием на среднее движение двухфазной системы можно пренебречь.

Уравнения сохранения массы фаз имеют обычную форму

$$
\frac{\partial \rho_L}{\partial t} - \frac{\partial\, [(1-\rho_L)\, \mathbf{v}_L]}{\partial \mathbf{r}} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial\, (\rho_L \mathbf{w}_L)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{1.3}
$$

---

[1] Заметим, что в [4], где рассматривалась только однородная турбулентность, пульсационное давление не вводилось по той причине, что производные от средних характеристик однородного турбулентного поля по координатам равны нулю, так что это давление на движение не влияет.

[2] Используем здесь терминологию работы [3]. Псевдотурбулентные движения, в отличие от обычных турбулентных, поддерживаются в основном за счет работы сил тяжести и вязкого взаимодействия фаз на флуктуациях концентрации системы (см. также ниже).

Уравнения сохранения импульса фаз с учетом соотношений (1.2) можно представить в виде

$$0 = -(1-\rho_L)\frac{\partial \pi_L}{\partial \mathbf{r}} - \beta\rho_L K_L(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L), \qquad \beta = \frac{9}{2}\frac{\varkappa\nu_0}{a^2}, \qquad \varkappa = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\rho_L\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}_L\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L = -\rho_L\frac{\partial \pi_L}{\partial \mathbf{r}} + \rho_L\mathbf{g} + \beta\rho_L K_L(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L) - \frac{\partial(\rho\Pi_L)}{\partial \mathbf{r}} + \qquad (1.4)$$

$$+\frac{\partial(\rho\sigma_L)}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \sigma_L = \frac{\tau_L}{\rho d_2}, \qquad \sigma_{L,ij} = \nu_{L,ik}\frac{\partial w_{Lj}}{\partial x_k} + \nu_{L,jk}\frac{\partial w_{Li}}{\partial x_k}, \qquad K_L = K(\rho_L)$$

Здесь d_1 и $\mu_0 = d_1\nu_0$ — плотность и вязкость газа, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, $K = K(\rho)$ — функция, учитывающая влияние стесненности на стоксовый режим обтекания частиц радиуса a. Для силы взаимодействия между фазами, отнесенной к единице объема смеси, в (1.4) было принято выражение, справедливое при малых d_1 и a

$$\mathbf{f}_L = -\rho_L d_2\nabla\pi + \beta d_2\rho_L K_L(\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L)$$

Подставляя в уравнения (1.3) выражения (1.1), после усреднения по ансамблю получим уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \langle R_L^{(g)}\rangle, \qquad R_L^{(g)} = -\frac{\partial(\rho_L'\mathbf{v}_L')}{\partial \mathbf{r}}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho + \rho\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} = \langle R_L^{(p)}\rangle, \qquad R_L^{(p)} = -\frac{\partial(\rho_L'\mathbf{w}_L')}{\partial \mathbf{r}} \qquad (1.5)$$

Аналогичным путем, ограничиваясь членами второго порядка по псевдотурбулентным пульсациям и используя соотношение, следующее из второго уравнения (1.3)

$$\rho_L\left(\mathbf{w}_L\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\rho_L\mathbf{w}_L * \mathbf{w}_L) + \mathbf{w}_L\frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

где звездочка означает диадное умножение, получим из уравнений (1.4) следующие уравнения для среднего движения:

$$0 = -(1-\rho)\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} - \beta\rho K(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \langle \mathrm{S}_L^{(g)}\rangle + \langle \mathrm{S}_L^{(i)}\rangle$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w} = -\rho\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} + \rho\mathbf{g} + \beta\rho K(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \frac{\partial(\rho\Pi_L)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\rho\sigma_L^\circ)}{\partial \mathbf{r}} +$$

$$+\langle \mathrm{S}_L^{(p)}\rangle - \langle \mathrm{S}_L^{(i)}\rangle, \quad \mathrm{S}_L^{(g)} = 0, \quad \mathrm{S}_L^{(i)} = \rho_L'\frac{\partial \pi_L'}{\partial \mathbf{r}} - \beta\left[\frac{d(\rho K)}{d\rho}\rho_L'(\mathbf{v}_L' - \mathbf{w}_L') + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{d^2(\rho K)}{d\rho^2}(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho_L'^2\right] \qquad (1.6)$$

$$\mathrm{S}_L^{(p)} = -\frac{\partial(\rho_L'\mathbf{w}_L')}{\partial t} - \rho\frac{\partial(\mathbf{w}_L' * \mathbf{w}_L')}{\partial \mathbf{r}} - \left(\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho_L'\mathbf{w}_L'$$

Здесь σ°_L отличается от σ_L в (1.4) заменой $\mathbf{w}_L$ на $\mathbf{w}$. Последние члены в уравнениях (1.5) и (1.6) описывают влияние крупномасштабных пульсаций на среднее движение. Для случайного движения несжимаемой однофазной среды они сводятся к напряжениям Рейнольдса, обусловленным крупномасштабными пульсациями этой среды [4].

Для псевдотурбулентных пульсаций из (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6) имеем следующие стохастические уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho_L' - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}_L'}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}_L'\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \rho_L'\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = Q_L^{(g)} = R_L^{(g)} - \langle R_L^{(g)}\rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho_L' + \rho\frac{\partial \mathbf{w}_L'}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w}_L'\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \rho_L'\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} = Q_L^{(p)} = R_L^{(p)} - \langle R_L^{(p)}\rangle$$

$$-(1-\rho)\frac{\partial \pi_L'}{\partial \mathbf{r}} - \left[\beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}(\mathbf{v}-\mathbf{w}) - \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}}\right]\rho_L' - \beta\rho K(\mathbf{v}_L' - \mathbf{w}_L') = \mathbf{F}_L^{(i)} \qquad (1.7)$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L' + \rho\left(\mathbf{w}_L'\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w} = -\rho\frac{\partial \pi_L'}{\partial \mathbf{r}} + \left[-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}(\mathbf{v}-\mathbf{w})\right]\rho_L' + \beta\rho K(\mathbf{v}_L' - \mathbf{w}_L') + \frac{\partial(\rho\sigma_L')}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F}_L^{(p)} + \mathbf{F}_L^{(i)},$$

$$\mathbf{F}_L^{(i)} = -\mathbf{S}_L^{(i)} + \langle \mathbf{S}_L^{(i)}\rangle, \qquad \mathbf{F}_L^{(p)} = -\mathbf{S}_L^{(p)} + \langle \mathbf{S}_L^{(p)}\rangle$$

Здесь σ_L' отличается от σ_L заменой $\mathbf{w}_L$ на $\mathbf{w}_L'$.

В соответствии с моделью [3] полагаем, что масштабы псевдотурбулентности значительно ниже масштабов среднего движения. Переходя в (1.5) и (1.6) к пределу $L \to \infty$ и учитывая, что величины R_L и S_L стремятся при этом к нулю, получим динамические уравнения движения в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho - (1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho + \rho\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$-(1-\rho)\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} - \beta\rho K(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = 0, \qquad \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w} = \qquad (1.8)$$

$$= -\rho\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} + \rho\mathbf{g} + \beta\rho K(\mathbf{v}-\mathbf{w}) - \frac{\partial(\rho\Pi)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\rho\sigma^\circ)}{\partial \mathbf{r}}$$

Здесь Π и σ° — пределы Π_L и σ_L° при $L \to \infty$; эти тензоры описывают влияние всех псевдотурбулентных движений на среднее движение дисперсной системы. Сравнивая (1.8) с (1.5) и (1.6), имеем соотношения

$$\langle \mathbf{S}_L^{(i)}\rangle = \langle R_L^{(g)}\rangle = \langle R_L^{(p)}\rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{S}_L^{(p)}\rangle \neq 0$$

Из (1.8) имеем также уравнение сохранения импульса дисперсоида

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{w} = -\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{r}} + \rho\mathbf{g} - \frac{\partial(\rho\Pi)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\rho\sigma^\circ)}{\partial \mathbf{r}} \qquad (1.9)$$

Допущение о том, что масштабы существенного изменения параметров среднего течения намного превосходят масштабы псевдотурбулентности (смысл этого предположения обсуждается в [3]) позволяет также упростить стохастические уравнения (1.7). Представляя все случайные величины в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса со случайными мерами, получим в локальной координатной системе, где $\mathbf{w} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, уравнения

$$(\omega + \mathbf{uk})\, dZ_\rho - (1-\rho)\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_u = dZ_Q^{(g)}, \qquad \omega\, dZ_\rho + \rho\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_w = dZ_Q^{(p)}$$

$$-i(1-\rho)\,\mathbf{k}\, dZ_\pi - \left(\beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u} - \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{r}}\right) dZ_\rho - \beta\rho K(d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) = d\mathbf{Z}_F^{(i)} \tag{1.10}$$

$$-\rho(i\omega + \nu(k)\,\mathbf{kk})\, d\mathbf{Z}_w - i\rho\mathbf{k}\, dZ_\pi + \left(-\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} - \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{r}} + \mathbf{g} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u}\right) dZ_\rho +$$

$$+\beta\rho K(d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) - \rho(\nu(k)\,\mathbf{k})(\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_w) = -d\mathbf{Z}_F^{(i)} + d\mathbf{Z}_F^{(p)}$$

Здесь ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, dZ_Q представляют дифференциалы случайных мер процессов Q, умноженные на $(-i)$.

Введение интегралов Фурье — Стильтьеса позволяет уточнить определение пульсаций типа φ'_L, а также Π_L и ν_L. Имеем

$$\mathbf{w}_L' \approx \int\limits_\omega \int\limits_{k^\circ < k} e^{i(\omega t + \mathbf{k}^\circ\mathbf{r})}\, d\mathbf{Z}_w, \qquad \Pi_L \approx \int\limits_\omega \int\limits_{k' > k} \operatorname{Re}\langle d\mathbf{Z}_w{}^* * d\mathbf{Z}_w\rangle$$

Кроме того, при выводе уравнений (1.10) было принято следующее выражение для псевдотурбулентного переноса импульса от пульсаций с волновыми числами $k^\circ < k$ к вихрям с волновыми числами $k' > k$

$$\left(\nu_L \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L' \approx -\int\limits_\omega \int\limits_{k^\circ < k} \nu(k^\circ)\,\mathbf{k}^\circ\mathbf{k}^\circ e^{i(\omega t + \mathbf{k}^\circ\mathbf{r})}\, d\mathbf{Z}_w$$

$$\nu(k) = \alpha \int\limits_\omega \int\limits_{k' > k} \int\limits_0^\infty \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau}\langle d\mathbf{Z}_w{}^* * d\mathbf{Z}_w\rangle\}\, d\tau$$

Здесь и выше $k \sim L^{-1}$, а α рассматривается как некая полуэмпирическая постоянная порядка единицы. Последние выражения соответствуют модели, согласно которой вихри с $k' > k^\circ$ воздействуют на случайное движение с волновым числом k° (разумеется, $k^\circ \leqslant k$) через посредство псевдотурбулентной вязкости, а вихри с $k' < k^\circ$ — через посредство случайных сил и дивергенций потоков в правых частях уравнений (1.10). Идейная аналогия с гипотезой Гейзенберга [5] очевидна (подробнее см. обсуждение в конце § 2).

Однородные уравнения (1.7) или (1.10) описывают регулярное вырождение некоторого начального флуктуационного поля $\mathbf{v}_L'(t_0)$, $\mathbf{w}_L'(t_0)$, $\pi_L'(t_0)$ и $\rho_L'(t_0)$ в результате действия сил давления, вязкости и т. п. Дивергенции случайных потоков Q и случайные силы $\mathbf{F}$ описывают накопление новых флуктуаций. Для разделения этих процессов можно, как и в [6], ввести два усреднения — полное, использованное выше, и усреднение при фиксированном начальном состоянии. Нетрудно видеть тогда, что временной масштаб первого процесса совпадает со временем затухания корреляционных функций псевдотурбулентного поля и намного выше масштаба существенного изменения случайных членов в правых частях уравнений (1.7) (см. также [4]). Поэтому при исследовании динамики вырождения флуктуаций величины Q и $\mathbf{F}$ в (1.7) можно в первом приближении рассматривать как локальные во времени, считая спектральные плотности корреляционных функций этих величин не зависящими от частоты ω (предположение о локальности случайных сил в пространстве, использованное в [6], здесь не делается). Указанные масштабы естественно назвать внешним и внутренним временными масштабами псевдотурбулентности по аналогии с терминологией в [6]; они имеют тот же смысл, что и внешний и внутренний пространственные масштабы турбулентности однофазной жидкости.

§ 2. **Спектральные уравнения.** Для того чтобы случайные процессы, введенные в § 1, и динамические уравнения (1.8) были определены полностью, необходимо знать статистические характеристики случайных процессов в правых частях уравнений (1.7) или (1.10). Ниже выводятся спектральные уравнения для этих характеристик.

Исключая $d\mathbf{Z}_v$ и dZ_π из уравнений (1.10), получаем

$$\begin{gathered}
\omega\, dZ_\rho + \rho\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_w = dZ_Q^{(p)'}, \qquad -\rho\,(i\omega + \nu(k)\,\mathbf{kk})\, d\mathbf{Z}_w + \\
+ (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})\, dZ_\rho = d\mathbf{Z}_F^{(p)} + \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{dZ_Q^{(g)}}{1-\rho} + \frac{dZ_Q^{(p)}}{\rho}\right)\frac{\mathbf{k}}{k^2} + \nu(k)\,\mathbf{k}\, dZ_Q^{(p)} \\
\mathbf{B} = \nu(k)\,\mathbf{k} + \frac{\beta K}{(1-\rho)^2}\frac{\mathbf{k}}{k^2}, \qquad \mathbf{C} = -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{Ak})\,\mathbf{k}}{k^2} \qquad (2.1) \\
\mathbf{A} = \frac{1}{1-\rho}\left(\beta\,\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u} + \frac{\rho}{1-\rho}\beta K\mathbf{u} - \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{r}}\right)
\end{gathered}$$

Величины $d\mathbf{Z}_v$ и dZ_π удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
\beta\rho K\,(d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) - (\mathbf{B}'\omega + \mathbf{C}')\, dZ_\rho = -d\mathbf{Z}_F^{(i)} - \left(\frac{dZ_Q^{(g)}}{1-\rho} + \frac{dZ_Q^{(p)}}{\rho}\right)\frac{\mathbf{k}}{k^2} \\
-i\, dZ_\pi = \frac{(\mathbf{Ak})}{k^2}dZ_\rho + \frac{\beta K\omega}{(1-\rho)^2 k^2}dZ_\rho - \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{dZ_Q^{(g)}}{1-\rho} + \frac{dZ_Q^{(p)}}{\rho}\right)\frac{1}{k^2} \qquad (2.2) \\
\mathbf{B}' = \frac{\beta K}{1-\rho}\frac{\mathbf{k}}{k^2}, \qquad \mathbf{C}' = -\beta\,\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u} + \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{r}} + (1-\rho)\frac{(\mathbf{Ak})\,\mathbf{k}}{k^2}
\end{gathered}$$

Удобно ввести далее новые случайные процессы

$$\begin{gathered}
\rho\, dZ_1 = dZ_Q^{(p)}, \qquad \rho\, d\mathbf{Z}_2 = d\mathbf{Z}_F^{(p)} + \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{dZ_Q^{(g)}}{1-\rho} + \frac{dZ_Q^{(p)}}{\rho}\right)\frac{\mathbf{k}}{k^2} + \\
+ \nu(k)\,\mathbf{k}\, dZ_Q^{(p)}, \qquad \rho\, d\mathbf{Z}_3 = d\mathbf{Z}_F^{(i)} + \left(\frac{dZ_Q^{(g)}}{1-\rho} + \frac{dZ_Q^{(p)}}{\rho}\right)\frac{\mathbf{k}}{k^2}
\end{gathered}$$

Из уравнений (2.1) получим соотношения

$$\begin{gathered}
dZ_\rho = \rho\,(i\omega^2 + 2b\omega + c)^{-1}\,[\mathbf{k}\, d\mathbf{Z}_2 + (i\omega + \nu(k)\,\mathbf{kk})\, dZ_1] \\
d\mathbf{Z}_w = \rho^{-1}\,(i\omega + \nu(k)\,\mathbf{kk})^{-1}\,[(\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})\, dZ_\rho - \rho\, d\mathbf{Z}_2] \qquad (2.3) \\
2b = \nu(k)\,\mathbf{kk} + \mathbf{Bk}, \qquad c = \mathbf{Ck}
\end{gathered}$$

Положим ниже

$$\begin{gathered}
\langle d\mathbf{Z}_2{}^* * d\mathbf{Z}_2\rangle = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + i\boldsymbol{\chi}, \qquad \psi_{ij} = \psi_{ji} \qquad (2.4) \\
\chi_{ij} = -\chi_{ji}, \qquad \langle dZ_1{}^*\, d\mathbf{Z}_2\rangle = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\gamma} \\
\langle dZ_1{}^*\, dZ_1\rangle = \delta(\mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k}
\end{gathered}$$

Здесь ψ_{ij}, χ_{ij}, α_i, β_i и γ — некоторые неизвестные функции $\mathbf{k}$, не зависящие от ω. Вычисляем спектральные плотности

$$\begin{gathered}
\langle dZ_\rho{}^* dZ_1\rangle = \rho\,[\omega^4 + (2b\omega + c)^2]^{-1}(\Psi_{\rho,1} + iX_{\rho,1})\,d\omega\, d\mathbf{k},\\
\Psi_{\rho,1} = (2b\omega + c)\,\mathbf{k}\beta + \omega^2\mathbf{k}\gamma + [\nu(k)\,\mathbf{kk}\,(2b\omega + c) + \omega^3]\,\delta\\
X_{\rho,1} = \omega^2\mathbf{k}\beta - (2b\omega + c)\,\mathbf{k}\gamma + [\nu(k)\,\mathbf{kk}\omega^2 - \omega\,(2b\omega + c)]\,\delta,\\
\langle dZ_\rho{}^* d\mathbf{Z}_2\rangle = \rho\,[\omega^4 + (2b\omega + c)^2]^{-1}(\Psi_{\rho,2} + i\mathbf{X}_{\rho,2})\,d\omega\, d\mathbf{k},\\
\Psi_{\rho,2} = (2b\omega + c)\,\mathbf{k}\psi - \omega^2\mathbf{k}\chi + [\nu(k)\,\mathbf{kk}\,(2b\omega + c) + \omega^3]\,\beta -\\
- [\nu(k)\,\mathbf{kk}\omega^2 - \omega\,(2b\omega + c)]\,\gamma,\quad \mathbf{X}_{\rho,2} = \omega^2\mathbf{k}\psi + (2b\omega + c)\,\mathbf{k}\chi +\\
+ [\nu(k)\,\mathbf{kk}\omega^2 - \omega\,(2b\omega + c)]\,\beta + [\nu(k)\,\mathbf{kk}\,(2b\omega + c) + \omega^3]\,\gamma
\end{gathered}\tag{2.5}$$

Используя соотношения (2.5) и (2.3), а также свойства функций в (2.4), получим выражения для спектральных плотностей наблюдаемых случайных процессов

$$\begin{gathered}
\langle dZ_\rho{}^* dZ_\rho\rangle = \rho^2\,[\omega^4 + (2b\omega + c)^2]^{-1} L_{\rho,\rho}\,d\omega\, d\mathbf{k}\\
L_{\rho,\rho} = \mathbf{k}\psi\mathbf{k} + 2\mathbf{k}\,[(\nu(k)\,\mathbf{kk})\,\beta + \omega\gamma] + [\omega^2 + (\nu(k)\,\mathbf{kk})^2]\,\delta\\
\langle dZ_\rho{}^* d\mathbf{Z}_w\rangle = \rho\Phi^{-1}(\mathbf{L}_{\rho,w} + i\mathbf{M}_{\rho,w})\,d\omega\, d\mathbf{k}\\
\mathbf{L}_{\rho,w} = (\nu(k)\,\mathbf{kk})\,[(\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})\,L_{\rho,\rho} - \mathbf{\Psi}_{\rho,2}] - \omega\mathbf{X}_{\rho,2}\\
\mathbf{M}_{\rho,w} = -\,\omega\,[(\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})\,L_{\rho,\rho} - \mathbf{\Psi}_{\rho,2}] - (\nu(k)\,\mathbf{kk})\,\mathbf{X}_{\rho,2}\\
\langle d\mathbf{Z}_w{}^* * d\mathbf{Z}_w\rangle = \Phi^{-1}(\mathbf{L}_{w,w} + i\mathbf{M}_{w,w})\,d\omega\, d\mathbf{k}\\
\mathbf{L}_{w,w} = [\omega^4 + (2b\omega + c)^2]\,\psi - [(\mathbf{B}\omega + \mathbf{C}) * \mathbf{\Psi}_{\rho,2} + \mathbf{\Psi}_{\rho,2} * (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})] +\\
+ (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C}) * (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C})\,L_{\rho,\rho},\quad \mathbf{M}_{w,w} = [\omega^4 + (2b\omega + c)^2]\,\chi +\\
+ [\mathbf{X}_{\rho,2} * (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C}) - (\mathbf{B}\omega + \mathbf{C}) * \mathbf{X}_{\rho,2}]\\
\Phi = [\omega^4 + (2b\omega + c)^2]\,[\omega^2 + (\nu(k)\,\mathbf{kk})^2]
\end{gathered}\tag{2.6}$$

Вводя, аналогично (2.4), новые неизвестные функции, определяющие средние от произведений $d\mathbf{Z}_3$ на другие $d\mathbf{Z}_i$, нетрудно записать также выражения для спектральных плотностей корреляций, в которых участвует случайный процесс $\mathbf{v}_L'$.

Заметим, что выше рассмотрено только частное «естественное» решение уравнений (1.10), обусловленное наличием случайных величин dZ_Q, $d\mathbf{Z}_F$ в правых частях этих уравнений, что соответствует исследованию установившихся случайных движений двухфазной системы. В принципе таким путем можно описать как движения, относящиеся к обычной турбулентности в смеси, так и специфические псевдотурбулентные пульсации, энергия к которым поступает в соответствии с физической моделью в [1-3] за счет работы сил тяжести и вязкого взаимодействия между фазами на флуктуациях концентрации дисперсной системы.

В рассматриваемом приближении, когда переносом импульса в газовой фазе пренебрегается, турбулентность несущего потока не может оказать заметного влияния на пульсации диспергированной фазы, так что фактически учитываются лишь псевдотурбулентные составляющие последних (это соответствует $\mathbf{F}_L^{(g)} = 0$ в уравнениях (1.7)).

Ясно, что это может оказаться неверным при достаточно малых ρ, когда нельзя пренебрегать турбулентными напряжениями в газе по сравнению с флуктуацией силы межфазового взаимодействия, если только число Рейнольдса среднего движения достаточно велико.

С другой стороны, при больших ρ можно пренебречь влиянием турбулентности несущего потока на случайные пульсации частиц, что соответствует известному эффекту «вымораживания» турбулентности в концентрированных дисперсных системах [7]. Отдельный анализ псевдотурбулентности оправдан также тем, что во многих практически важных процессах число Рейнольдса среднего движения невелико, и обычная турбулентность не наступает (псевдоожижение, пневмотранспорт зернистых материалов при больших весовых нагрузках и т. п.).

Из (2.6) имеем соотношения для псевдотурбулентных давления и вязкости диспергированной фазы

$$\Pi(k) = \int\limits_{\omega}\int\limits_{k'>k} \mathbf{L}_{w,w}\frac{d\omega d\mathbf{k}'}{\Phi}$$

$$\nu(k) = \alpha\int\limits_{\omega}\int\limits_{k'>k}\int\limits_{0}^{\infty}(\mathbf{L}_{w,w}\cos\omega\tau - \mathbf{M}_{w,w}\sin\omega\tau)\frac{d\omega d\mathbf{k}'}{\Phi}d\tau \qquad (2.7)$$

Таким образом, введенные в § 1 кинематические тензоры, описывающие влияние мелкомасштабной псевдотурбулентности на крупномасштабную и на среднее движение, представляются в виде функционалов от искомых функций волнового вектора.

Для определения этих функций используем уравнения для одновременных двухточечных корреляций. Эти уравнения можно получить стандартным путем, рассматривая уравнения движения. Но как легко видеть, в рассматриваемом случае достаточно учесть лишь уравнения для различных корреляций процессов $\mathbf{w}_L'$ и ρ_L', т. е. удобно исходить непосредственно из уравнений (2.1), конструируя соответствующие им стохастические уравнения. Усредняя по промежуткам времени, большим по сравнению с внутренним и малым по сравнению с внешним временным масштабом псевдотурбулентности, так что случайные величины в правых частях уравнений исчезают, имеем из (2.1) стохастические уравнения в виде

$$\frac{\partial\rho_L'}{\partial t} + \rho\frac{\partial\mathbf{w}_L'}{\partial\mathbf{r}} = 0, \quad \rho\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial\mathbf{w}_L'}{\partial t} - \rho\left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{w}_L' + \rho\left[-\left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right) + \frac{\beta K}{(1-\rho)^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right]\frac{\partial\mathbf{w}_L'}{\partial\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\rho_L' - \left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial\rho_L'}{\partial\mathbf{r}} = 0 \qquad (2.8)$$

После вычислений для двухточечных одновременных корреляций обычным путем получим уравнения

$$\frac{\partial Q^{(L)}_{\rho,\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\mathbf{Q}^{(L)}_{\rho,w} - \mathbf{Q}^{(L)}_{w,\rho}) = 0, \qquad \xi = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$
$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]\mathbf{Q}^{(L)}_{\rho,w} + \rho\left[-\left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta k}{(1-\rho)^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\frac{\partial\mathbf{Q}^{(L)}_{\rho,w}}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)Q^{(L)}_{\rho,\rho} - \left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial Q^{(L)}_{\rho,\rho}}{\partial\xi} -$$
$$-\rho^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\mathbf{Q}^{(L)}_{w,w}}{\partial\xi}, \quad \rho\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t} - 2\left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]\mathbf{Q}^{(L)}_{w,w} + \qquad (2.9)$$
$$+\rho S\left\{\left[-\left(\nu_L\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{\beta K}{(1-\rho)^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\right] * \frac{\partial\mathbf{Q}^{(L)}_{w,w}}{\partial\xi}\right\} + S\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\mathbf{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) - \left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] * \mathbf{Q}^{(L)}_{\rho,w}\right\}; \qquad \frac{\partial\mathbf{Q}^{(L)}_{w,w}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathbf{Q}^{(L)}_{wi,w}}{\partial\xi_i}$$
$$Q^{(L)}_{\psi,\varphi}(t,\ \xi) = \langle\psi_L'(t,\ \mathbf{r}_A)\varphi_L'(t,\ \mathbf{r}_B)\rangle, \quad (S\{\mathbf{a}\})_{ij} = a_{ij} + \overset{*}{a}_{ji}$$

Здесь A и B — обозначения двух точек в пространстве. Уравнения (2.9) представляют некое обобщение известных корреляционных уравнений, описывающих турбулентность однофазной жидкости. Соответствующие уравнения энергетического спектра (т. е. фурье-преобразования уравнений (2.9)) имеют вид

$$\int_0^k\left\{\frac{\partial E_{\rho,\rho}}{\partial t}+i\mathbf{k}(\mathbf{E}_{\rho,w}-\mathbf{E}_{w,\rho})\right\}k^2dk=0$$

$$\int_0^k\left\{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}(k)\,\mathbf{kk})\right]\mathbf{E}_{\rho,w}+\rho\mathbf{B}(\mathbf{kE}_{\rho,w})-CE_{\rho,\rho}-\rho^2\mathbf{kE}_{w,w}\right\}k^2dk=0$$

$$\int_0^k\left\{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+2(\mathbf{v}(k)\,\mathbf{kk})\right]\mathbf{E}_{w,w}+\rho(\mathbf{B}*\mathbf{kE}_{w,w}+\mathbf{E}_{w,w}\mathbf{k}*\mathbf{B})-\right.$$

$$\left.-(\mathbf{C}*\mathbf{E}_{\rho,w}+\mathbf{E}_{w,\rho}^{*}*\mathbf{C})\right\}k^2dk=0 \qquad (2.10)$$

Здесь функции E представляют спектральные плотности одновременных двухточечных корреляций и равны спектральным плотностям соответствующих двухвременных двухточечных корреляций, проинтегрированным по оси частот.

Ввиду предположения о том, что масштабы среднего течения намного выше псевдотурбулентных, достаточно рассмотреть лишь стационарную задачу. Используя выражения (2.6), получим спектральные уравнения в форме

$$\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^k\mathbf{M}_{\rho,w}\frac{d\omega k^2dk}{\Phi}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^k\left\{\mathbf{v}(k)\,\mathbf{kk}\,\frac{\mathbf{L}_{\rho,w}+i\mathbf{M}_{\rho,w}}{\Phi}+\right.$$

$$+\mathbf{B}\left(\mathbf{k}\frac{\mathbf{L}_{\rho,w}+i\mathbf{M}_{\rho,w}}{\Phi}\right)-\mathbf{C}\,\frac{\omega^2+(\mathbf{v}(k)\,\mathbf{kk})^2}{\Phi}L_{\rho,\rho}-$$

$$\left.-\mathbf{k}\,\frac{\mathbf{L}_{w,w}+i\mathbf{M}_{w,w}}{\Phi}\right\}d\omega\,k^2dk=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^k\left\{2(\mathbf{v}(k)\,\mathbf{kk})\,\frac{\mathbf{L}_{w,w}+i\mathbf{M}_{w,w}}{\Phi}+\right.$$

$$+\mathbf{B}*\mathbf{k}\,\frac{\mathbf{L}_{w,w}+i\mathbf{M}_{w,w}}{\Phi}+\mathbf{k}\,\frac{\mathbf{L}_{w,w}-i\mathbf{M}_{w,w}}{\Phi}*\mathbf{B}-$$

$$\left.-\mathbf{C}*\frac{\mathbf{L}_{\rho,w}+i\mathbf{M}_{\rho,w}}{\Phi}-\frac{\mathbf{L}_{\rho,w}-i\mathbf{M}_{\rho,w}}{\Phi}*\mathbf{C}\right\}d\omega\,k^2dk=0 \qquad (2.11)$$

причем здесь $\mathbf{v}(k)$ — тензорный функционал (2.7) от искомых функций. При интегрировании по k в (2.10) и (2.11) аргумент k этого тензора рассматривается как параметр.

Первое уравнение (2.11) скалярно и действительно, второе эквивалентно шести, а третье — девяти скалярным действительным уравнениям. Таким образом, имеем шестнадцать нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для определения шестнадцати неизвестных величин в (2.4). Ясно, что эти величины должны обращаться в нуль при $k\to 0$ и $k\to\infty$; кроме того, имеется еще условие нормировки, согласно которому выражение для квадратичной флуктуации концентрации системы в больших объемах должно совпадать с известным из статистического анализа (см. [2], а также [8]). Можно показать, что точки $k=0$ и $k=\infty$ представляют точки ветвления решений системы (2.11), поэтому условие нормировки не нарушает определенности этой системы.

Из (2.11) особенно ясна аналогия с гипотезой Гейзенберга [5] о спектральном переносе энергии. Действительно, (2.11) соответствует модели, согласно которой влияние вихрей с волновыми числами, большими k, приводящее к отводу энергии от возмущения с волновым числом, равным k, таково, как если бы имелась некая псевдотурбулентная вязкость, обусловленная указанными вихрями.

Если интерес представляют также псевдотурбулентные пульсации газа, что может иметь место, например, в задачах о диффузии некоторой примеси в дисперсной системе, нужно ввести новые неизвестные функции от $\mathbf{k}$, определяющие средние $\langle dZ_3^{*}*dZ_3\rangle$, $\langle dZ_3^{*}*dZ_2\rangle$, $\langle dZ_3^{*}dZ_1\rangle$; всего таких функций двадцать четыре. Из первого уравнения (2.2) для относительной скорости газа прежним путем легко получить столько же новых интегро-дифференциальных спектральных уравнений для определения этих функций.

Основное упрощение, связанное с пренебрежением переносом импульса в газовой фазе, заключается, таким образом, в возможности выделить замкнутую систему спектральных уравнений для величин, характеризующих только диспергированную фазу, и тем самым, значительно уменьшить число уравнений. Однако и в этом простейшем случае решение системы спектральных уравнений представляет весьма трудоемкую задачу, причем трудности возникают уже при окончательной их формулировке — интегрировании по ω в (2.11). Поэтому интерес могут представить попытки построения более простых моделей псевдотурбулентности в дисперсной системе, основанных, например, на упрощении уравнений (2.11).

Заметим, что в очень концентрированных дисперсных системах, приближающихся к плотноупакованным, становятся существенными эффекты, связанные с механическим взаимодействием между отдельными взвешенными частицами. Легко видеть, что эта трудность не принципиальна — в первом приближении ее можно обойти, заменив α в (2.7) на некоторую функцию от ρ, обращающуюся в бесконечность при $\rho \to \rho_*$, где ρ_* — концентрация системы в состоянии плотной упаковки, форма которой вытекает из анализа процессов переноса в плотных газах [1,3].

Поступила 25 VII 1968

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя. ПМТФ, 1966, № 6.
2. Буевич Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. Буевич Ю. А. Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Буевич Ю. А. О диффузии взвешенных частиц в поле изотропной турбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. Heisenberg W. Zur Statistischen Theorie der Turbulenz. Zeit. Phys. 1948, Bd. 124, Nr. 7—12.
6. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
7. Bagnold R. A. The flow of cohesionless grains in fluids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1956, vol. A 249, p. 235.
8. Буевич Ю. А. Флуктуации числа частиц в плотных дисперсных системах. Инж.-физ. ж., 1968, т. 14, № 3.