Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРОВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ «СИЛ»

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Рассматривается задача о синхронизации под действием слабых связей почти консервативных динамических объектов [1], характер и механизм воздействия которых на несущую систему качественно определен и никак не связан с ее конкретным видом [2].

Предлагаемая процедура исследования синхронных режимов в таких системах основана на понятии о динамической матрице влияния. Показано, что качественная определенность, фиксированность характера воздействий от объектов является естественной основой для их классификации. В заключение рассмотрена синхронизация генераторов «сил» простейшего типа, т. е. одно- и двумерных «сил».

Результаты работы могут найти применение, в частности, при решении задач вибрационной техники, связанных с исследованием особенностей совместной работы нескольких сложных возбудителей колебаний.

Вопросы устойчивости синхронных режимов были ранее изучены в работах [3,4] и поэтому здесь не рассматриваются.

§ 1. Динамическая матрица влияния. Предположим, что движение произвольного i-го ($i = 1 \ldots, n$) объекта в системе определено полностью, если известно изменение во времени $l_i \times 1$ вектора-столбца его собственных координат $q_i = (q_i^{(1)}, \ldots, q_i^{(l_i)})$ и $m_i \times 1$ вектора параметров обратного влияния $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(m_i)})$. Физический характер параметров обратного влияния полностью определяется спецификой самого объекта и никак не связан с видом несущей системы [2]. При этом добавочная кинетическая и добавочная потенциальная энергии объекта [1] будут естественно записываться в форме, инвариантной относительно вида несущей системы

$$\Delta T_i = \mathbf{x}_i^{*\cdot} \mathbf{A}_{m_i}(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i)\, \mathbf{q}_i^{\cdot} + {}^1/_2 \mathbf{x}_i^{*\cdot} \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i)\, \mathbf{x}_i^{\cdot}$$

$$\Delta \Pi_i = \Delta \Pi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i) \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{A}_{m_i}$ и $\mathbf{A}_m$ суть соответственно $m_i \times l_i$ и $m_i \times m_i$ матрицы с немалыми коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{q}_i$, а звездочкой обозначается операция транспонирования матрицы. С другой стороны, изменение во времени параметров обратного влияния определяется исключительно изменением компонент $m \times 1$ вектора абсолютных координат несущей системы $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, так что

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{D}_i(\mathbf{y}) \qquad (1.2)$$

Отметим, что выбор векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, \ldots \ldots, n$), вообще говоря, никак не связан один с другим. На практике часто вектор параметров обратного влияния имеет ярко выраженный геометрический смысл, в то время как составляющие вектора $\mathbf{y}$ носят иногда довольно абстрактный характер (например, в случае несущей системы с распределенными параметрами, когда $m = \infty$).

Так как колебания несущей системы малы [1] и, следовательно,

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{v} \tag{1.3}$$

где μ — параметр связи, существует разложение

$$\mathbf{x}_i = \mu \mathbf{u}_i + \mu^2 \cdots \quad (\mathbf{u}_i = \mathbf{D}_{im}\mathbf{v}), \qquad \mathbf{D}_{im} = d\mathbf{D}_i(\mathbf{y}) / d\mathbf{y}\,|_{\mathbf{y}=0} \tag{1.4}$$

Здесь D_{im} = (матрица) $m_i \times m$ с постоянными коэффициентами. Соотношения (1.1) при учете (1.3) перепишутся в виде

$$\Delta T_i = \mu \mathbf{u}_i^{*\cdot} \mathbf{A}_{mi}(0, \mathbf{q}_i)\, \mathbf{q}_i^{\cdot} + \mu^2 \ldots, \qquad \Delta \Pi_i = \mu \mathbf{u}_i^* \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i) + \mu^2 \cdots \tag{1.5}$$

и, следовательно, добавочный кинетический потенциал i-го объекта с точностью до величин высшего порядка малости будет

$$\mu \Delta L_i = \mu\, [u_i^{*\cdot} \mathbf{A}_{mi}(0, \mathbf{q}_i)\, \mathbf{q}_i^{\cdot} - \mathbf{u}_i^* \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i)] \tag{1.6}$$

С той же степенью точности потенциальная обобщенная сила, передаваемая на несущую систему от i-го объекта, равна

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right) \mu \Delta L_i = -\mathbf{D}_{mi}\mathbf{F}_i$$

Здесь $\mathbf{D}_{mi} = \mathbf{D}_{im}^*$, а $m_i \times 1$ вектор

$$\mathbf{F}_i = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i}\right) \Delta L_i = -\frac{d}{dt}\, [\mathbf{A}_{mi}(0, \mathbf{q}_i)\, \mathbf{q}_i^{\cdot}] + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i) \tag{1.7}$$

есть сила от i-го объекта, приведенная к его собственным параметрам обратного влияния или, иначе, вектор фиксированных воздействий от объекта на несущую систему. Таким образом, $\mathbf{F}_i$ есть физическая «сила», которую генерирует i-й объект, а матрица $\mathbf{D}_{mi}$ характеризует распределение воздействий от этой силы на несущей системе. Если вектор параметров обратного влияния имеет три ортогональные пространственные составляющие, то вектор $\mathbf{F}_i$ есть сила в обычном механическом смысле этого слова, если же параметры обратного влияния — повороты, то $\mathbf{F}_i$ есть механический момент. В порождающем приближении сила $\mathbf{F}_i$ меняется во времени по периодическому закону и будет функцией собственной быстро вращающейся фазы

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\tau + \alpha_i, \nu) \qquad (\tau = \nu t) \tag{1.8}$$

где α_i — фазовый сдвиг синхронного движения i-го объекта.

Дифференциальное уравнение малых колебаний несущей системы в порождающем приближении имеет вид

$$\mathbf{M}\mathbf{v}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}\mathbf{v}^{\cdot} + \mathbf{C}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}_{mi}\mathbf{F}_i(\tau + \alpha_i, \nu) \tag{1.9}$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{C}$ — симметричные положительно определенные $m \times m$ матрицы с постоянными коэффициентами. Симметричная часть $m \times m$ матрицы $\mathbf{B}$ также положительна. Введем в рассмотрение импульсную периодическую функцию $\Phi(\tau)$, представимую в виде обобщенного ряда Фурье

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \cos s\tau \tag{1.10}$$

Периодическое решение системы (1.1) может быть представлено в виде свертки [5]

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} \Psi_m(\tau - \eta, \nu)\, \mathbf{D}_{mi}\mathbf{F}_i(\eta + \alpha_i, \nu)\, d\eta \tag{1.11}$$

где $m \times m$ матрица $\mathbf{\Psi}_m$ есть импульсно-частотная характеристика несущей системы, удовлетворяющая уравнению

$$\nu^2\mathbf{M}\Psi_m'' + \nu\mathbf{B}\Psi_m' + \mathbf{C}\Psi_m = \mathbf{E}_m\Phi(\tau) \tag{1.12}$$

Здесь $\mathbf{E}_m$ — единичная $m \times m$ матрица, а штрих означает дифференцирование по τ.

Вектор параметров обратного влияния определяется в соответствии с (1.4) по формуле

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} \mathbf{K}_{ij}(\tau - \eta, \nu)\, \mathbf{F}_j(\eta + \alpha_j, \nu)\, d\eta \tag{1.13}$$

Здесь $m_i \times m_j$-матрица

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{D}_{im}\mathbf{\Psi}_m\mathbf{D}_{mj} \tag{1.14}$$

есть динамическая матрица влияния произвольного j-го объекта на i-й.

Предположим теперь, что система сил от объектов имеет вид

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{E}_{m_j}\Phi(\tau)\,\delta_{lj} \tag{1.15}$$

где l — фиксированное натуральное число $(1 \leqslant l \leqslant n)$.

Тогда в силу (1.13) будем иметь

$$\mathbf{u}_i^{(l)} = \mathbf{K}_{il}(\tau, \nu) \tag{1.16}$$

Таким образом, компонента $\kappa_{ij}^{(p,q)}$ $(p = 1, \ldots, m_i;\ q = 1, \ldots, m_j)$ матрицы $\mathbf{K}_{ij}$ дает закон изменения p-го параметра обратного влияния i-го объекта на периодическое импульсное возмущение $\Phi(\tau)$, подаваемое с q-го выхода j-го объекта.

Если малые колебания несущей системы не сопровождаются действием гироскопических сил и, следовательно, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$, то матричная импульсно-частотная характеристика несущей системы $\mathbf{\Psi}_m$ также симметрична. Вследствие этого будут выполняться условия динамической взаимности

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}^* \tag{1.17}$$

Отметим, наконец, что вследствие (1.16) коэффициенты Фурье разложения матрицы динамического влияния

$$\mathbf{K}_{ij}(\tau, \nu) = {}^1/_2\pi\mathbf{K}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} (\mathbf{K}_{ij}^{(s)} \cos s\tau + \mathbf{K}_{*ij}^{(s)} \sin s\tau) \tag{1.18}$$

суть соответствующие матричные гармонические коэффициенты влияния. Если трение в несущей системе отсутствует, то, естественно, $K_{*ij}^{(s)} = 0$.

2. Условия существования синхронного режима в системе. В работе [4] было показано, что порождающая конфигурация фазовых сдвигов синхронных движений почти консервативных объектов при наличии несущих связей может быть определена из следующей системы:

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv \frac{1}{k_i(\nu)}\left[f_i(\nu) - \sum_{j=1}^{n} W_{ij}\right] \tag{2.1}$$

Здесь $k_i(\nu)$ — коэффициент крутизны скелетной кривой i-го объекта, а $f_i(\nu)$ — средняя за период синхронных движений мощность его непотенциальных сил в порождающем приближении. Частные вибрационные моменты W_{ij} могут быть определены по формулам

$$W_{ij} = 2\Phi_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta\Lambda_{ij}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \Delta\Lambda_{ji}}{\partial \alpha_j}\right) \tag{2.2}$$

Возможность введения величин $\Delta\Lambda_{ij}$ и Φ_{ij} обусловлена тем, что малые колебания несущей системы представляются в виде суммы (1.12), каждое слагаемое которой

$$v_i(\tau + \alpha_i, \nu) = \int_0^{2\pi} \mathbf{\Psi}_m(\tau - \eta, \nu)\, \mathbf{D}_{mi}\mathbf{F}_i(\eta + \alpha_i, \nu)\, d\eta \tag{2.3}$$

характеризует вклад, вносимый соответствующим объектом. Уравнения для определения составляющих v_i могут быть записаны в форме

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}\mathbf{v}_i^{\cdot} + \mathbf{C}\mathbf{v}_i = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j}\right)\Delta L_{ij} \tag{2.4}$$

где ΔL_{ij} есть добавочный кинетический потенциал i-го объекта, обусловленный движением j-го объекта в порождающем приближении

$$\Delta L_{ij} = \mathbf{v}_j^{*\cdot}\mathbf{D}_{im}\mathbf{A}_{mi}(0, \mathbf{q}_i)\,\mathbf{q}_i^{\cdot} - \mathbf{v}_j^{*}\mathbf{D}_{im}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i) \tag{2.5}$$

Осредненные за период синхронных движений энергетические характеристики взаимодействия i-го и j-го объектов $\Delta\Lambda_{ij}$ и Φ_{ij} соответственно равны

$$\Delta\Lambda_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta L_{ij}\, d\tau$$

$$\Phi_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathbf{v}_i^{*\cdot}\mathbf{B}_c\mathbf{v}_i^{\cdot}\, d\tau \qquad (B_c = 1/2\,(B + B^*)) \tag{2.6}$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом более общем случае объектов с произвольным числом степеней свободы основные уравнения (2.1) не изменятся.

Умножим матричное уравнение (2.4) скалярно на вектор-строку $\mathbf{v}_j^{*\cdot}$ и результат сложим почленно с аналогичным выражением, в котором переставлены индексы i и j. Полученное выражение осредним за период синхронных движений.

Тогда после некоторых преобразований непосредственно придем к соотношениям

$$2\Phi_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta\Lambda_{ij}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \Delta\Lambda_{ji}}{\partial \alpha_j}\right) \qquad (i \neq j) \tag{2.7}$$

Можно считать, что формула (2.7) оказывается справедливой и при $i = j$, если при этом допустить независимость величин $\mathbf{q}_i^{\cdot}$ и $\mathbf{q}_i$ в выражений для ΔL_{ii} (2.5) от фазового сдвига α_i. В силу этого допущения

$$2\Phi_{ii} = -\frac{\partial \Delta\Lambda_{ii}}{\partial \alpha_i} \tag{2.8}$$

и исходные уравнения для определения порождающей конфигурации фазовых сдвигов (2.1) могут быть переписаны в виде

$$P_i \equiv \frac{1}{k_i(\nu)}\left[f_i(\nu) + \frac{\partial \Delta\Lambda_i}{\partial \alpha_i}\right] = 0, \qquad \Delta\Lambda_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta L_i \, d\tau = \sum_{j=1}^{n} \Delta\Lambda_{ij} \tag{2.9}$$

Здесь величину $\Delta\Lambda_i$ естественно назвать добавочным интегралом действия i-го объекта.

Такова наиболее общая формулировка условий существования синхронного режима, не включающая в себя энергетических характеристик движения несущей системы.

Обратимся теперь к определению добавочного интеграла действия i-го объекта, который получается после осреднения выражения (1.8). В результате несложных преобразований, связанных с интегрированием по частям, при учете (1.9) и (1.14), получим

$$\Delta\Lambda_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_i^*(\tau + \alpha_i, \nu)\, K_{ij}(\tau - \eta, \nu)\, F_j(\eta + \alpha_j, \nu)\, d\tau\, d\eta \tag{2.10}$$

Отметим, что вследствие (1.12) соотношение (2.10) может быть переписано в виде

$$\Delta\Lambda_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{F}_i^*(\tau + \alpha_i, \nu)\, \mathbf{u}_i(\tau, \nu)\, d\tau \tag{2.11}$$

Таким образом, добавочный интеграл действия i-го объекта равен средней за период работе обобщенной силы, генерируемой объектом, на его реактивном векторном перемещении (векторе параметров обратного влияния).

Чтобы получить выражение для частных вибрационных моментов (2.2), можно в соответствии с (2.9) дифференцировать выражение (2.10) по фазовому сдвигу α_i. При этом вследствие допущения (2.8) необходимо положить, что векторная сила $F_i(\eta + \alpha_i, \nu)$ в i-м слагаемом суммы (2.10) не зависит от α_i. Поэтому, интегрируя по частям производную выражения (2.10) по α_i, будем иметь (2.12)

$$W_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{F}_i^*(\tau + \alpha_i, \nu)\, \mathbf{K}_{ij}'(\tau - \eta, \nu)\, \mathbf{F}_j(\eta + \alpha_j, \nu)\, d\tau\, d\eta$$

Отметим, что в случае отсутствия трения в несущей системе динамическая матрица влияния (1.17) есть четная функция времени $\mathbf{K}_{ij}(\tau, \nu) = \mathbf{K}_{ij}(-\tau, \nu)$, и, следовательно, $\mathbf{K}_{ij}'(\tau, \nu) = -\mathbf{K}_{ij}'(-\tau, \nu)$.

Отсюда при учете условий динамической взаимности (1.16) нетрудно прийти к выводу о том, что матрица частных вибрационных моментов кососимметрична

$$W_{ij}(\alpha_i - \alpha_j, \nu) + W_{ji}(\alpha_j - \alpha_i, \nu) = 0 \qquad (2.13)$$

Последнее соотношение, с другой стороны, является следствием существования интегрального критерия устойчивости синхронных движений [1].

3. Синхронизация генераторов сил простейшего типа. Таким образом, процесс составления системы уравнений для определения порождающей конфигурации фазовых сдвигов можно разбить на три этапа:

1) определение величин и направлений сил $\mathbf{F}_i$ от объектов при заторможенной несущей системе;

2) определение компонент динамической матрицы влияния;

3) проведение несложных матричных операций и интегрирования в соответствии с выражением (2.12).

При этом появляется возможность классификации синхронизирующихся объектов в зависимости от характера и размерности генерируемых ими сил. Наиболее простым и, в то же время, одним из самых распространенных классов объектов рассматриваемого типа будет, очевидно, класс генераторов скалярных воздействий или, менее точно, генераторов сил постоянного направления.

В этом случае вектор параметров обратного влияния имеет лишь одну компоненту. Поэтому все величины, входящие в соотношении (2.12), будут скалярами.

Скалярный характер носят также гармонические коэффициенты в разложении (1.19). Пусть

$$K_{ij}^{(s)} = k_{ij}^{(s)} \cos \psi_{ij}^{(s)}, \qquad K_{ij*}^{(s)} = k_{ij}^{(s)} \sin \psi_{ij}^{(s)} \qquad (3.1)$$

где $k_{ij}^{(s)}$ и $\psi_{ij}^{(s)}$ — коэффициенты влияния единичной гармонической силы (в обобщенном смысле) частоты s по безразмерному времени, действующей на выходе j-го объекта, соответственно на амплитуду и фазовый сдвиг колебаний параметра обратного влияния i-го объекта. Будем считать, что коэффициенты $\psi_{ij}^{(s)}$ меняются в интервале $(0, \pi / 2)$ и, следовательно, гармонические коэффициенты влияния силы на амплитуду могут быть как больше, так и меньше нуля. При этом, очевидно, разложение (1.17) примет вид

$$K_{ij}(\tau, \nu) = \frac{1}{2\pi} K_{ij}^{(0)} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} k_{ij}^{(s)} \cos (s\tau - \psi_{ij}^{(s)}) \qquad (3.2)$$

Скалярная сила, действующая на выходе произвольного i-го объекта, представляется в общем случае в виде ряда Фурье

$$F_i(\tau + \alpha_i, \nu) = F_i^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} E_i^{(s)} \cos [s(\tau + \alpha_i) - \vartheta_i^{(s)}] \qquad (3.3)$$

Будем выбирать начало отсчета собственных координат объекта таким образом, чтобы в момент, когда собственная быстро вращающаяся фаза объекта обращается в нуль, т. е. при $\tau + \alpha_i = 0$ первая гармоника силы F_i принимает свое максимальное значение и, следовательно,

$$\vartheta_i^{(1)} = 0 \qquad (3.4)$$

Подставим теперь ряды (3.2) и (3.3) в выражение (2.13). Тогда в результате после несложного интегрирования приходим к следующему выражению для частного вибрационного момента:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} F_i^{(1)} F_j^{(1)} k_{ij}^{(1)} \sin(\alpha_i - \alpha_j + \psi_{ij}^{(1)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{\infty} s F_i^{(s)} F_j^{(s)} k_{ij}^{(s)} \sin[s(\alpha_i - \alpha_j) + \psi_{ij}^{(s)} - \vartheta_i^{(s)} + \vartheta_j^{(s)}] \tag{3.5}$$

Например, частные вибрационные моменты задачи о синхронизации генераторов одномерной импульсной силы

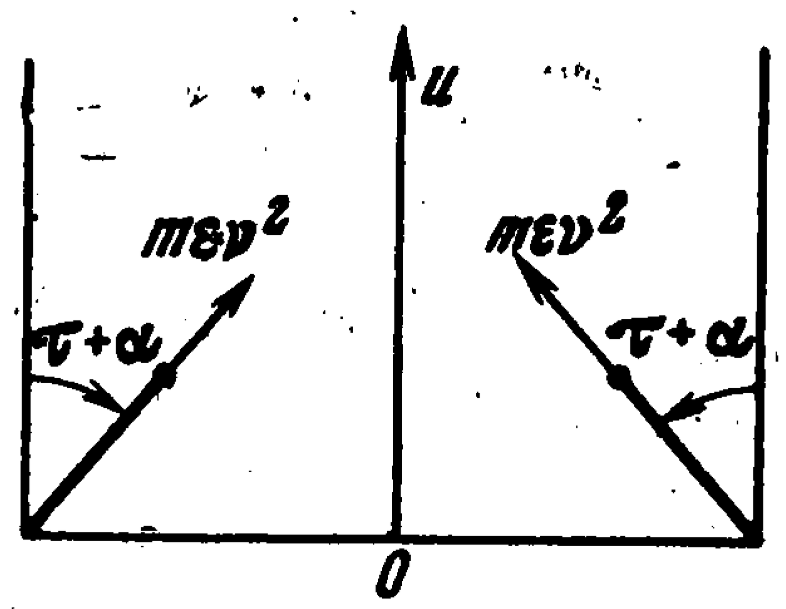
$$F_i(\tau + \alpha_i, \ \nu) = F_i \Phi(\tau + \alpha_i) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{3.6}$$

имеют следующий характерный вид:

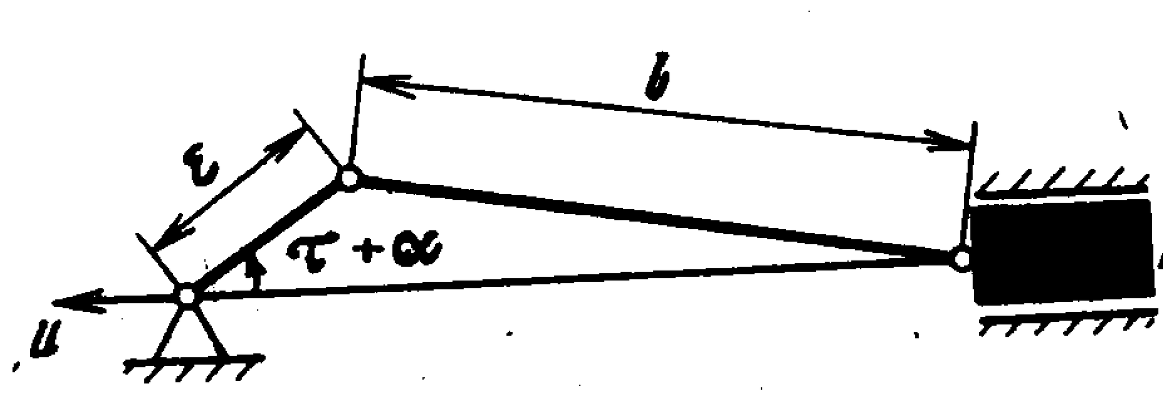
$$W_{ij} = \frac{1}{2\pi} F_i F_j K_{ij}'(\tau, \nu) \,|_{\tau = \alpha_j - \alpha_i} \tag{3.7}$$

Если парциальные частоты движения объектов одинаковы, так что $f_i(\nu) = f(\nu)$, трение в несущей системе отсутствует, а скалярные силы $F_i(\tau, \nu)$ обладают свойством покомпонентной синфазности $\vartheta_i^{(s)} = \vartheta^{(s)}$, то в системе всегда существуют синхронные режимы [6] с фазировками первого рода $\alpha_i = \pi\sigma_i + \alpha$, где σ_i равно либо нулю, либо единице, а α — произвольная вещественная постоянная. В частности, всегда существует синфазный синхронный режим, при котором $\alpha_i = \alpha$.

Приведем два характерных механических примера генераторов скалярных воздействий.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. *Механический генератор гармонической силы.* Речь, прежде всего, идет о механическом вибраторе направленного действия (фиг. 1), приводимом от какого-либо двигателя асинхронного типа. Вращение обоих вибраторов синхронизировано тем или иным способом, так что суммарная инерционная сила

$$F(\tau + \alpha, \ \nu) = 2 \ m\varepsilon\nu^2 \cos(\tau + \alpha)$$

имеет постоянное при заторможенной несущей системе направление. Расстояние между центрами вращений вибраторов предполагается малым, а к несущей системе непосредственно крепится точка O.

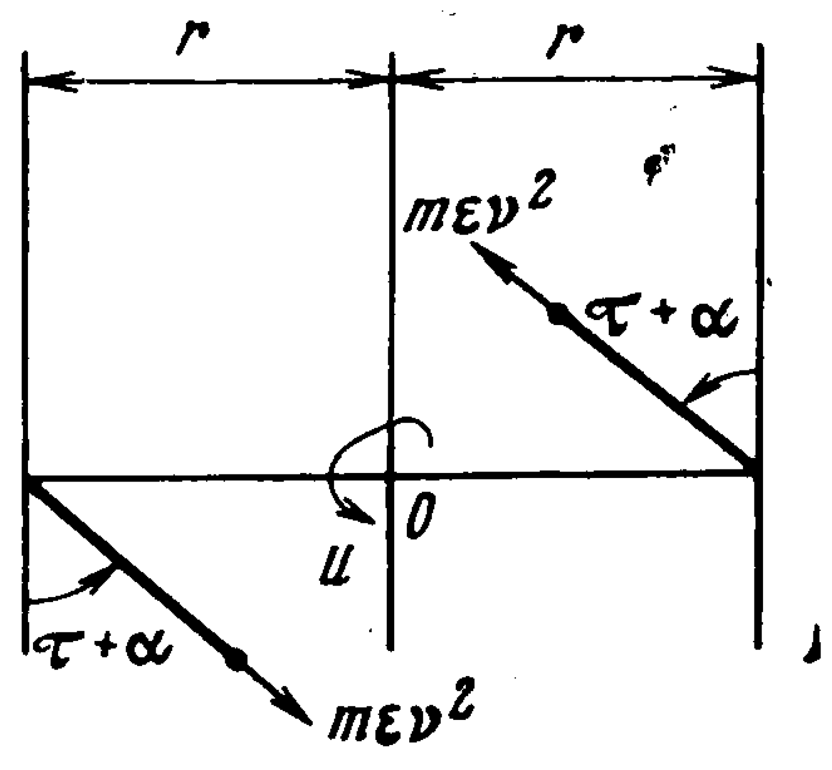
Другим примером генератора силы рассматриваемого типа будет кривошипно-шатунный механизм (фиг. 2). Предполагается, что кривошип уравновешен и имеет большой момент инерции, шатун невесом, ось вращения кривошипа и направляющие связаны с несущей системой, а отношение $\varepsilon \mid l$ имеет порядок малости параметра связи. Генерируемая механизмом сила имеет в порождающем приближении постоянное направление Ou, передается на несущую систему через точку O и равна

$$F(\tau + \alpha, \ \nu) = m\varepsilon\nu^2 \cos(\tau + \alpha)$$

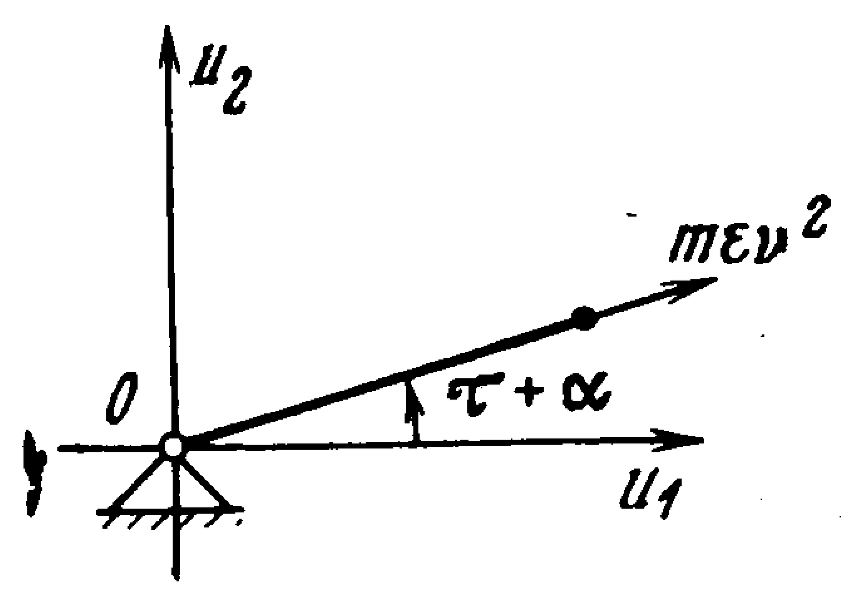
2. Механический генератор гармонического момента. Простейшим генератором гармонического момента постоянного направления может служить спаренный механический вибратор, описанный в начале предыдущего пункта, если вращение входящих в него дебалансов синхронизировано и синфазировано указанным на фиг. 3 способом. Механический момент от вибратора перпендикулярен плоскости чертежа и равен

$$F(\tau+\alpha,\ \nu) = 2m\varepsilon r\nu^2 \cos(\tau+\alpha)$$

Рассмотрим далее следующий по сложности класс генераторов двумерных сил.



Фиг. 3



Фиг. 4

Ограничиваясь рассмотрением лишь чисто гармонических возмущений от объектов, будем выбирать их собственные координаты так, чтобы в момент, когда фаза вращения обращается в нуль, сила на первом выходе принимала свое максимальное значение. При этом естественно

$$\mathbf{F}_i(\tau+\alpha_i,\ \nu) = \begin{vmatrix} F_i^{(1)} \cos(\tau+\alpha_i) \\ F_i^{(2)} \cos(\tau+\alpha_i-\gamma_i) \end{vmatrix}, \qquad i=1,\ldots,n \tag{3.8}$$

Динамическая матрица влияния j-го объекта на i-й, вернее, ее чисто гармоническая часть, может быть записана в виде

$$K_{ij}(\tau,\ \nu) = \frac{1}{\pi} \begin{vmatrix} k_{ij}^{(1.1)} \cos(\tau-\psi_{ij}^{(1.1)}) & k_{ij}^{(1.2)} \cos(\tau-\psi_{ij}^{(1.2)}) \\ k_{ij}^{(2.1)} \cos(\tau-\psi_{ij}^{(2.1)}) & k_{ij}^{(2.2)} \cos(\tau-\psi_{ij}^{(2.2)}) \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Коэффициенты $k_{ij}{}^{(p,q)}$ и $\psi_{ij}{}^{(p,q)}(p,\ q=1,\ 2)$, входящие в матрицу (3.2), в механическом случае имеют смысл гармонических коэффициентов влияния силы (или момента в зависимости от физического смысла воздействия) на амплитуду и фазу перемещения (или поворота).

Подстановка выражений (3.8) и (3.9) в основное соотношение (2.12) приводит к следующей общей формуле для определения частного вибрационного момента:

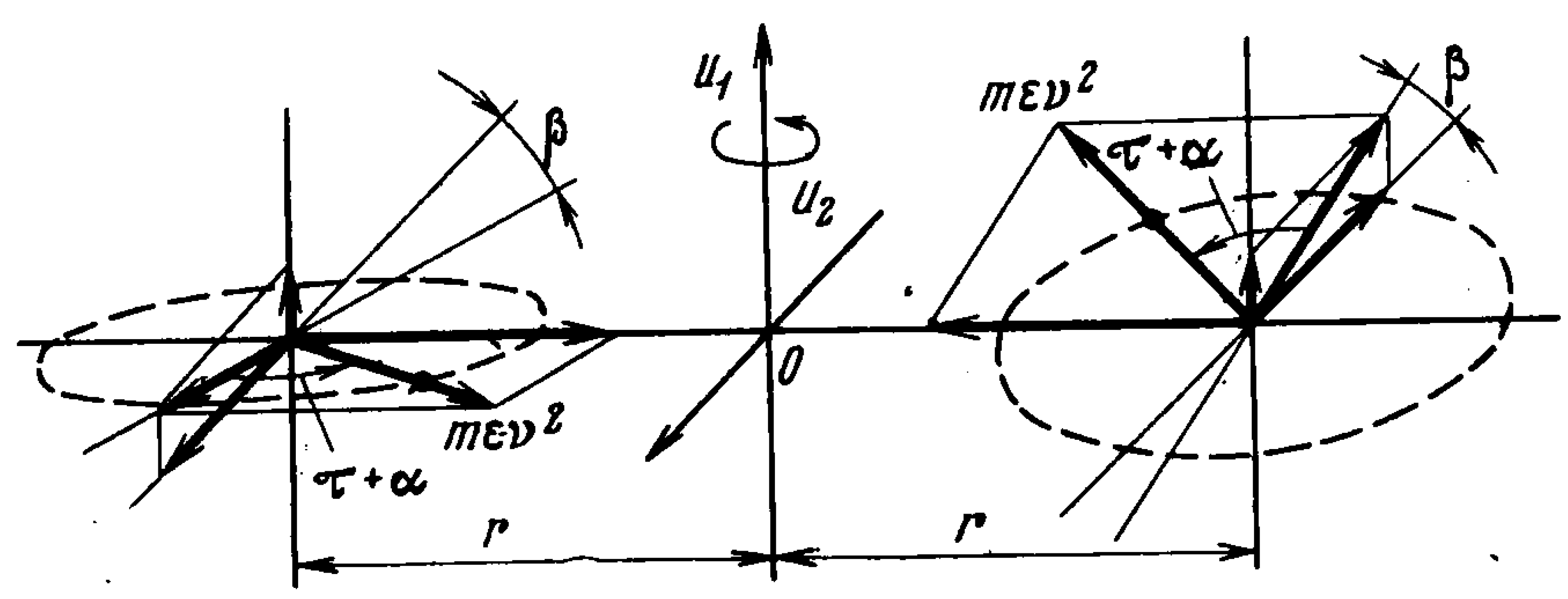
$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left[F_i^{(1)} F_j^{(2)} k_{ij}^{(1.1)} \sin(\alpha_i-\alpha_j+\psi_{ij}^{(1.1)}) + F_i^{(1)} F_j^{(2)} k_{ij}^{(1.2)} \sin(\alpha_i-\alpha_j+\gamma_j+\varphi_{ij}^{(1.2)}) + \right.$$
$$\left. + F_i^{(2)} F_j^{(1)} k_{ij}^{(2.1)} \sin(\alpha_i-\alpha_j-\gamma_i+\psi_{ij}^{(2.1)}) + F_i^{(2)} F_j^{(2)} k_{ij}^{(2.2)} \sin(\alpha_i-\alpha_j-\gamma_i+\gamma_j+\psi_{ij}^{(2.2)})\right] \tag{3.10}$$

Наиболее распространенным объектом рассматриваемого класса является генератор вращающейся силы — обычный механический дебалансный вибратор (фиг. 4). Вращающаяся векторная сила, развиваемая дебалансным вибратором, имеет вид

$$\mathbf{F}(\tau+\alpha,\ \nu) = m\varepsilon\nu^2 \begin{vmatrix} \cos(\tau+\alpha) \\ \sin(\tau+\alpha) \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

Конкретизация выражения (3.10) в соответствии с последней формулой приводит к выражению для частного вибрационного момента задачи о синхронизации механических вибраторов, установленных на линейной (точнее, линеаризуемой) несущей системе [7].

В некоторых практических задачах вибротехники возникает вопрос о синхронизации генераторов винтовой «силы» — динамы. Речь идет о динамическом объекте с двумя выходами, генерирующем механическую силу и момент, которые имеют при заторможенной несущей системе одно и то же постоянное направление.



Фиг. 5

Естественно, что одна из компонент вектора параметров обратного влияния генератора динамы есть линейное перемещение вдоль некоторой оси, а другая — поворот вокруг той же оси. Генератором динамы может служить, например, спаренный вибратор, вращение составляющих потоков которого синхронизировано и синфазировано принудительным образом так, как это показано на фиг. 5. Объект генерирует винтовую «силу»

$$\mathbf{F}(\tau+\alpha+\nu)=2m\varepsilon\nu^2\begin{vmatrix}\sin\beta\\ r\cos\beta\end{vmatrix}\cos(\tau+\alpha) \qquad (3.12)$$

которая через точку O передается на несущую систему. При $\beta = 1/2\,\pi$ рассматриваемый объект вырождается в генератор гармонической силы, а при $\beta = 0$ — в генератор момента.

В заключение отметим, что порядок пересчета компонент вектора параметров обратного влияния, а иногда (например, для генератора вращающейся силы) и сам выбор этих компонент в задачах о синхронизации генераторов многомерных сил связаны с некоторым произволом и обычно диктуются соображениями чисто физического характера.

Поступила 5 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагаев Р. Ф. Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
2. Ходжаев К. Ш. О возбуждении вибраций. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
3. Нагаев Р. Ф. Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
4. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. Розенвассер Е. Н. О применении интегральных уравнений в теории нелинейных колебаний. Тр. 2-го Всес. съезда по теоретич. и прикл. механ. М., «Наука», 1965, вып. 2.
6. Нагаев Р. Ф., Попова И. А. Самосинхронизация нескольких механических вибраторов, установленных на едином рабочем органе балочного типа. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
7. Ходжаев К. Ш. Синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.