Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ГРУППЫ ЛИ ПО ЕЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ УРАВНЕНИЯМ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Широкий класс механических задач допускает теоретико-групповую интерпретацию. Впервые связь между интегралами дифференциальных уравнений и инвариантами непрерывных групп была подмечена Ли [1]. Теорема Нетер [1,2] указала связь между законами сохранения и фактом инвариантности функции действия. Кинематику твердого тела можно трактовать как теорию инвариантов группы движений, дополненную условием инвариантности времени. Групповую интерпретацию допускает теория гамильтоновых систем, последние образуют систему дифференциальных инвариантных многообразий группы касательных преобразований.

В задаче об оптимальной стабилизации функция управления может рассматриваться как инвариант непрерывной группы преобразований, сохраняющих уравнения стабилизируемой системы и соответствующие вариационные уравнения Эйлера. Такая группа классифицирует начальные значения решений системы по признаку близости этих решений (в пределе) к тривиальному.

Специальная теория относительности может рассматриваться как теория инвариантов группы (Лоренца), сохраняющей плоскую псевдоэвклидову метрику пространства — времени. (О групповой трактовке физики см., например, [3]).

Необходимо находить инварианты группы при разыскании инвариантно-групповых решений уравнений математической физики [4,5]. В связи с вопросом о теоретико-групповом истолковании подобных прикладных задач в статье анализируется возможность вычисления конечных (недифференциальных) инвариантных многообразий непрерывной группы G непосредственно по ее определяющим уравнениям (т. е. без их интегрирования).

Доказано, что всякое многообразие, в точках которого происходит вырождение определяющих уравнений [1], является инвариантным многообразием группы G. Уравнения этих многообразий могут быть выписаны в явном виде. Тождественному вырождению определяющих уравнений соответствует случай интразитивности группы G. Для определения инвариантов группы выписывается в явном виде совместная система Пфаффа, ранг которой равен индексу группы G. Сформулировано необходимое и достаточное условие локальной транзитивности группы G для случая, когда любая точка есть точка общего положения.

1. Постановка задачи. Идея теоретико-групповой трактовки физических задач восходит к Клейну и сформулирована им применительно к геометрии [6]. Ситуация, когда интересующие исследователя факты могут быть сформулированы в терминах инвариантов некоторой группы преобразований (либо ее продолжений), встречается, как отмечено выше, не только в геометрии.

---

[1] Под вырождением уравнений здесь и в дальнейшем подразумевается понижение ранга матрицы коэффициентов левых частей определяющих уравнений.

Главная трудность при этом состоит в следующем. Как известно ([7], стр. 184—211), всякая группа Ли G, действующая в пространстве E_n переменных $x_1,\ldots, x_n$, может быть задана при помощи линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, именуемой по Ли системой определяющих уравнений. Эти уравнения связывают компоненты $\xi_i(x)$ инфинитезимальных операторов $X = \xi_i(x)\,\partial/\partial x_i$, являющихся элементами алгебры Ли, соответствующей группе G.

Вычисление инвариантов и инвариантных многообразий группы G, либо ее продолжений, осуществляется при помощи известных процедур [7-8], однако лишь после того, как функции $\xi_i(x)$ будут найдены интегрированием определяющих уравнений. Указанная трудность состоит в необходимости интегрирования определяющих уравнений.

Рассмотрим систему определяющих уравнений некоторой группы G

$$a_{\gamma i}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} = \alpha_{\gamma i}(x)\,\xi_i \qquad (i,\ \varepsilon = 1,\ldots, n;\ \gamma = 1,\ldots, m) \tag{1.1}$$

Здесь i, ε — немые индексы суммирования.

Ставится задача определения всех недифференциальных инвариантных многообразий группы G непосредственно по определяющим уравнениям (1.1) во всех тех случаях, когда это возможно без их интегрирования.

2. О приведении системы определяющих уравнений к пассивности. Пусть система (1.1) определяющих уравнений разрешена относительно различных производных неизвестных функций и ни одна из этих производных, либо производная от этих производных не входит в правые части определяющих уравнений. Эти производные называются главными, а все остальные — параметрическими [9].

Если при всевозможных дифференцированиях системы (1.1) после исключения из правых частей главных производных окажется, что не существует ни одной пары независимых уравнений с одинаковыми левыми частями, то это будет означать, что между параметрическими производными не возникает никаких соотношений. В этом случае система (1.1) называется пассивной.

Если система (1.1) не будет пассивной, то теория Рикье [9] позволяет дополнить ее некоторым конечным числом уравнений, являющихся дифференциальным и алгебраическим следствием системы (1.1), так, что пополненная система будет пассивной.

Можно показать, что приведение системы (1.1) определяющих уравнений к пассивности или обнаружение факта ее несовместности осуществляется за конечное число шагов.

Действительно, каждый элементарный шаг пополнения системы (1.1) состоит в добавлении некоторого числа уравнений в соответствии с формулами сравнения мономов, присвоенных главным производным системы (1.1). Так как возникающие при дифференцированиях параметрических производных новые главные производные не принадлежат к числу главных производных системы (1.1), то они не могут получаться из последних дифференцированием.

Следовательно, мономы, присвоенные новым главным производным, не делятся на мономы, присвоенные главным производным системы (1.1). Будем говорить, что последовательность $p(\alpha)$ векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными компонентами не возрастает, если для вектора α', следующего за вектором α, по крайней мере, одна из разностей $\alpha_i' - \alpha_i$ отрицательна.

Из сказанного выше следует, что последовательность мономов, присвоенных новым главным производным на каждом шаге, не убывает. Тогда, согласно лемме работы ([9], стр. 68) число новых главных производных, а следовательно, и число уравнений, пополняющих систему (1.1) до пассивной, конечно. Пассивность системы (1.1) играет важную роль в дальнейшем.

3. Необходимые условия для определяющих уравнений. Получим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_{\gamma i}^{\varepsilon}$ системы уравнений (1.1) в том случае, когда она образует систему определяющих уравнений некоторой группы.

Рассмотрим матрицу $\|a_{\gamma i}^{\varepsilon}\|$. Номер всякой ее строки есть γ. Столбцы упорядочим следующим образом. Каждой паре чисел (ε, i) поставим в соответствие номер столбца

$$\gamma_1 = (\varepsilon - 1)n + i \tag{3.1}$$

Учитывая, что $\varepsilon \leqslant n$, $i \leqslant n$, нетрудно проверить, что по номеру столбца γ_1 числа ε и i определяются однозначно. Обозначим через r и h общие ранги матриц $\|a_{\gamma i}^{\varepsilon}\|$ и $\|\alpha_{\gamma i}\|$ Очевидно

$$0 \leqslant m \leqslant n^2 + n, \; 0 \leqslant h \leqslant \min(m, n), \; 0 \leqslant r \leqslant \min(m, n^2) \tag{3.2}$$

Пусть $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — два решения системы (1.1), а $X' = \xi_i' \partial / \partial x_i$ и $X = \xi_i \partial / \partial x_i$ — соответствующие им инфинитезимальные операторы. Согласно теореме Ли [7] функции $X'\xi_1 - X\xi'_1, \ldots, X'\xi_n - X\xi_n'$ также должны быть решением системы (1.1) определяющих уравнений. Имеем

$$0 = a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k} (X'\xi_i - X\xi_i') - \alpha_{\gamma i} (X'\xi_i - X\xi_i') =$$

$$= \left(a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} - a_{\gamma l}^{i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \xi_i \frac{\partial a_{\gamma l}^{k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \xi_l'}{\partial x_k} + \left(\xi_i \frac{\partial \alpha_{\gamma i}}{\partial x_l} - \xi_i \frac{\partial \alpha_{\gamma l}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{\gamma i}^{k}}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right) \xi_l' +$$

$$+ X' \left(a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \alpha_{\gamma i} \xi_i \right) - X \left(a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial \xi_i'}{\partial x_k} - \alpha_{\gamma i} \xi_i' \right) \tag{3.3}$$

В силу уравнений (1.1)

$$X' \left(a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \alpha_{\gamma i} \xi_i \right) = X \left(a_{\gamma i}^{k} \frac{\partial \xi_i'}{\partial x_k} - \alpha_{\gamma i} \xi_i' \right) = 0$$

Пусть теперь система (1.1) такова, что среди уравнений, дополняющих ее до пассивной, нет уравнений первого порядка. Тогда каждое из уравнений (3.3) должно быть алгебраическим следствием уравнений (1.1). Найдутся, следовательно, такие регулярные функции $\lambda_{\gamma i}$, что, кроме уравнений (1.1), будут выполнены соотношения

$$(a_{ji}{}^{k}\delta_{l}{}^{\varepsilon}-a_{jl}{}^{\varepsilon}\delta_{i}{}^{k})\frac{\partial\xi_{l}}{\partial x_{\varepsilon}}+\frac{\partial a_{jl}{}^{k}}{\partial x_{i}}\xi_{l}=\lambda_{j\gamma}a_{\gamma l}{}^{k}$$

$$\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{l}}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}+\left(\frac{\partial\alpha_{jl}}{\partial x_{i}}-\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial x_{l}}\right)\xi_{l}=\lambda_{j\gamma}\alpha_{\gamma l} \tag{3.4}$$

$$(k,\ l,\ \varepsilon,\ i=1,\ldots,n;\quad j,\ \gamma=1,\ldots,m)$$

где $\delta^{\varepsilon}{}_{l}$ — символ Кронекера.

Числа h, m, n удовлетворяют соотношению $0\leqslant h\leqslant m\leqslant n^2$.

Целесообразно рассмотреть вначале случай $0<h=m\leqslant n$. Линейным комбинированием уравнений (1.1) им можно придать вид

$$a_{ji}{}^{\varepsilon}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}=\xi_{j}+\alpha_{j\omega}\xi_{\omega}\qquad\begin{pmatrix}\varepsilon,i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m\\ \omega=m+1,\ldots,n\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Условия (3.4) запишутся так:

$$(a_{ji}{}^{k}\delta_{l}{}^{\varepsilon}-a_{jl}{}^{\varepsilon}\delta_{l}{}^{k})\frac{\partial\xi_{l}}{\partial x_{\varepsilon}}+\frac{\partial a_{jl}{}^{k}}{\partial x_{i}}\xi_{i}=\lambda_{j\gamma}a_{\gamma l}{}^{k} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}-\frac{\partial\alpha_{j\omega}}{\partial x_{\lambda}}\xi_{\omega}=\lambda_{j\lambda}\qquad(\lambda=1,\ldots,m) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{\rho}}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}-\frac{\partial\alpha_{j\omega}}{\partial x_{\rho}}\xi_{\omega}+\frac{\partial\alpha_{j\rho}}{\partial x_{\lambda}}\xi_{\lambda}+\frac{\partial\alpha_{j\rho}}{\partial x_{\omega}}\xi_{\omega}=\lambda_{j\gamma}\alpha_{\gamma\rho} \tag{3.8}$$

$$(\rho=m+1,\ldots,n)$$

Подставляя в уравнения (3.6) и (3.8) значения $\lambda_{j\lambda}$ из (3.7) и значения ξ_j из (3.5), получим уравнения, которые должны удовлетворяться тождественно относительно величин $\partial\xi_i/\partial x_\varepsilon$ и ξ_ω, рассматриваемых как независимые переменные. Отсюда получаем следующие условия:

$$a_{ji}{}^{k}\delta_{l}{}^{\varepsilon}-a_{jl}{}^{\varepsilon}\delta_{i}{}^{k}+a_{\gamma i}{}^{\varepsilon}\frac{\partial a_{jl}{}^{k}}{\partial x_{\gamma}}-a_{\gamma l}{}^{k}\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{\gamma}}=0$$

$$\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{\rho}}+a_{\lambda i}{}^{\varepsilon}\frac{\partial\alpha_{j\rho}}{\partial x_{\lambda}}-\alpha_{\gamma\rho}\frac{\partial a_{ji}{}^{\varepsilon}}{\partial x_{\gamma}}=0$$

$$\frac{\partial\alpha_{j\rho}}{\partial x_{\omega}}-\frac{\partial\alpha_{j\omega}}{\partial x_{\rho}}+\alpha_{\gamma\rho}\frac{\partial\alpha_{i\omega}}{\partial x_{\gamma}}-\alpha_{\gamma\omega}\frac{\partial\alpha_{j\rho}}{\partial x_{\gamma}}=0$$

Определим операторы

$$Y_{j}{}^{\varepsilon}=a_{\gamma i}{}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}},\qquad Z_{\omega}=-\frac{\partial}{\partial x_{\omega}}+\alpha_{\gamma\omega}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}}$$

Тогда написанные условия соответственно получат вид

$$(Y_{i}{}^{\varepsilon},\ Y_{i_1}{}^{\varepsilon_1})=\delta_{i}{}^{\varepsilon_1}Y_{i_1}{}^{\varepsilon}-\delta_{i_1}{}^{\varepsilon}Y_{i}{}^{\varepsilon_1},\qquad(Y_{i}{}^{\varepsilon},\ Z_{\omega})=0,\qquad(Z_{\omega},\ Z_{\rho})=0 \tag{3.9}$$

Пусть теперь $0<h<m<n^2$. Составляя линейные комбинации из уравнений (1.1), представим эту систему в форме

$$a_{ji}{}^{\varepsilon}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}=\xi_{j}+\alpha_{j\omega}\xi_{\omega},\qquad a_{\rho i}{}^{\varepsilon}\frac{\partial\xi_{i}}{\partial x_{\varepsilon}}=0 \tag{3.10}$$

$$j=1,\ldots,h;\quad i,\ \varepsilon=1,\ldots,n;\quad\omega=h+1,\ldots,n;\quad\rho=h+1,\ldots,n$$

Разрешим в точках общего положения вторую из систем (3.10) относительно различных производных и подставим их в первую. Тогда, в соответствии с (3.1), этим определится множество L, элементами которого будут $m_j - n$ пар таких значений (α, β), что

$$a_{\gamma l}^{k} = \delta_{\gamma_0}^{\gamma} \quad \text{при } \gamma > n \quad (k, l) \in L; \qquad a_{\gamma l}^{k} = 0 \quad \text{при } \gamma \leqslant n \quad (k, l) \in L$$

$$\gamma_0 = (\alpha - 1) n + \beta, \qquad \gamma = (k - 1) n + l$$

Такая специальная форма записи определяющих уравнений позволяет найти из части условий (3.4) следующие выражения:

$$\lambda_{\rho j} = \frac{\partial a_{\rho i}^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon}, \qquad \lambda_{j\varkappa} = \frac{\partial a_{ji}^{\varepsilon}}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} - \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_\varkappa} \xi_i$$

$$\lambda_{j\sigma} = (a_{ji}^{\alpha} \delta_\beta^{\varepsilon} - a_{j\beta}^{\varepsilon} \delta_i^{\alpha}) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon}, \qquad \lambda_{\sigma\sigma'} = (a_{\sigma i}^{\alpha'} \delta_{\beta'}^{\varepsilon} - a_{\sigma\beta'}^{\varepsilon} \delta_i^{\alpha'}) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon}$$

$$(\sigma, \sigma' = h + 1, \ldots, m; \ \varkappa = 1, \ldots, h)$$

$$\sigma = (\alpha - 1) n + \beta, \quad \sigma' = (\alpha' - 1) n + \beta, \quad (\alpha, \beta) \in L, \quad (\alpha', \beta') \in L$$

Подставляя в неиспользованную часть уравнений (3.4) полученные выражения для λ и значения ξ_j из уравнений (3.10), получим систему равенств, каждое из которых должно удовлетворяться тождественно по ξ_ω и быть алгебраическим следствием второй из систем (3.10). Условия тождественного обращения в нуль коэффициентов при ξ_ω в этих равенствах дают

$$\frac{\partial \alpha_{j\omega}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial x_\omega} + \alpha_{\varkappa\omega} \frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial x_\varkappa} - \alpha_{\varkappa\mu} \frac{\partial \alpha_{j\omega}}{\partial x_\varkappa} = 0, \quad \mu = h + 1, \ldots, n \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial a_{jl}^{k}}{\partial x_\mu} + a_{\varkappa l}^{k} \frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial x_\varkappa} - \alpha_{\varkappa\mu} \frac{\partial a_{jl}^{k}}{\partial x_\varkappa} = 0, \qquad \frac{\partial a_{\rho l}^{k}}{\partial x_\mu} - \alpha_{\varkappa\mu} \frac{\partial a_{\rho l}^{k}}{\partial x_\varkappa} = 0$$

$$\psi_{\gamma i l}^{\varepsilon k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} = 0 \qquad \gamma = 1, \ldots, m$$

Каждое из последних уравнений, в которых

$$\psi_{\gamma i l}^{\varepsilon k} = a_{\varkappa i}^{\varepsilon} \frac{\partial a_{\gamma l}^{k}}{\partial x_\varkappa} - a_{\varkappa l}^{k} \frac{\partial a_{\gamma i}^{\varepsilon}}{\partial x_\varkappa} + a_{\gamma i}^{k} \delta_l^{\varepsilon} - a_{\alpha l}^{\varepsilon} \delta_i^{k} - a_{\sigma l}^{k} (a_{\gamma i}^{\alpha} \delta_\beta^{\varepsilon} - a_{\gamma\beta}^{\varepsilon} \delta_i^{\alpha})$$

должно быть алгебраическим следствием уравнений

$$a_{\rho i}^{\varepsilon} (\partial \xi_i / \partial x_\varepsilon) = 0$$

Следовательно, существуют такие регулярные функции $\lambda_{\gamma l}^{k\rho}$, что соотношения

$$\psi_{\gamma i l}^{\varepsilon k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} = \mu_{\gamma l}^{k\rho} a_{\rho i}^{\varepsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon}$$

будут тождествами относительно величин $\partial \xi_i / \partial x_\varepsilon$, рассматриваемых как независимые переменные.

Отсюда $\psi_{\gamma il}^{\varepsilon k} = \mu_{\gamma l}^{k\rho} a_{\rho i}^{\varepsilon}$. Последние равенства дают

$$\mu_{\gamma l}^{k\sigma'} = \psi_{\gamma\beta' l}^{\alpha' k}, \quad \sigma' = (\alpha' - 1) n + \beta', \quad (\alpha', \beta') \in L$$

$$\psi_{\gamma il}^{\varepsilon k} = a_{\sigma' i}^{\varepsilon} \psi_{\gamma\beta' l}^{\alpha' k} \tag{3.12}$$

где

$$\psi_{\gamma\beta' l}^{\alpha' k} = a_{\gamma\beta'}^{k} \delta_l^{\alpha'} - a_{\gamma l}^{\alpha'} \delta_{\beta'}^{k} - a_{\sigma l}^{k} (a_{\gamma\beta'}^{\alpha} \delta_\beta^{\alpha'} - a_{\gamma\beta}^{\alpha'} \delta_{\beta'}^{\alpha})$$

Введем дополнительные переменные $y_{n+1}, \ldots, y_m$ и определим операторы

$$Y_l^k = a_{\varkappa l}^k \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} + a_{\rho l}{}^k \frac{\partial}{\partial y_\rho}, \quad Z_\omega = -\frac{\partial}{\partial x_\omega} + \alpha_{\varkappa\omega} \frac{\partial}{\partial x_\omega}$$

Тогда необходимые условия для определяющих уравнений (3.11), (3.12) могут быть записаны в виде $(Z_\mu, Z_\omega) = 0$, $(Z_\mu, Y_l^k) = 0$

$$(Y_i^\varepsilon, Y_l^k) = \delta_i^k Y_l^\varepsilon - \delta_l^\varepsilon Y_i^k + a_{\sigma l}{}^k (\delta_\beta{}^\varepsilon Y_i{}^\alpha - \delta_i{}^\alpha Y_\beta{}^\varepsilon) +$$
$$+ a_{\sigma' i}^{\varepsilon} (\delta_l{}^{\alpha'} Y_{\beta'}^k - \delta_{\beta'}{}^k Y_l{}^{\alpha'}) - a_{\sigma' i}^{\varepsilon} a_{\sigma l}^{k} (\delta_\beta{}^{\alpha'} Y_{\beta'}{}^\alpha - \delta_{\beta'}{}^\alpha Y_\beta{}^{\alpha'}) \tag{3.13}$$

В частности, при $a_{h+1,i}^{\varepsilon} = \ldots = a_{mi}{}^\varepsilon = 0$ из равенств (3.13) следуют условия (3.9).

4. **Теорема об инвариантных многообразиях.** При $h = 0$ уравнения (1.1) допускают группу переносов $\xi_j = \delta_j{}^i$; $i = 1, \ldots, n$, являющуюся транзитивной.

Пусть теперь $0 < h \leqslant m < n^2$. Систему (1.1) определяющих уравнений, как сказано в п. 3, можно преобразовать к виду (3.10). В дальнейшем будем исходить из предположений:

1) существует конечная область Γ' пространства $\{x\}$, в которой функции $a_{1i}{}^\varepsilon, \ldots, a_{hi}{}^\varepsilon$; $\alpha_{j\omega}$ регулярны;

2) величины $a_{h+1,i}^{\varepsilon}, \ldots, a_{mi}^{\varepsilon}$ суть тождественные константы [1].

Тогда из условий (3.13) следует, что операторы Y_l^k, Z_ω, образованные при помощи коэффициентов определяющих уравнений (3.10), будут элементами алгебры L инфинитезимальных операторов, имеющей размерность $n^2 + n - h$. Числа $a_{h+1,i}^{\varepsilon}, \ldots, a_{mi}{}^\varepsilon$ будут подчинены соотношениям, вытекающим из условий для структурных констант. Группу, соответствующую этой алгебре, будем обозначать через G^*. Матрица алгебры L имеет порядок $(n^2 + n - h) \times (m + n - h)$ и обладает структурой

$$\begin{Vmatrix} a_{ji}{}^\varepsilon & 0 & a_{\rho i}{}^\varepsilon \\ \alpha_{j\omega} & -E & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

где E — квадратная единичная матрица порядка $n - h$. Общий ранг матрицы (4.1) будет $q \leqslant m + n - h$. Если ранг матрицы (4.1) не понижается ни в какой точке области Γ', то в силу теоремы Рикье [9], группа G существует, непрерывна и локально транзитивна в любой точке области $\Gamma \subset \Gamma'$.

---

[1] Трудность, связанная со снятием этого ограничения, обусловлена несовершенством процедуры приведения системы определяющих уравнений к пассивности.

Опираясь на известные факты теории инвариантов групп Ли [7,8], покажем, прежде всего, что если решения уравнений (3.10), непрерывны в области $\Gamma \subset \Gamma'$, то всякое инвариантное многообразие I_l группы G^*, принадлежащее Γ, будет инвариантным многообразием группы G. Рассмотрим произвольную точку $x^\circ = (x^\circ{}_1,\ldots, x^\circ{}_n) \in \Gamma$. Пусть ранг матрицы (4.1) в этой точке понижается по сравнению с общим рангом q на t единиц. Если $t \neq 0$, то точка x° принадлежит последовательности вложенных одно в другое инвариантных многообразий группы G^*. Пусть наименьшее из них I_p имеет размерность p и задается $n-p$ независимыми уравнениями

$$\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_{n-p}(x) = 0 \tag{4.2}$$

которые получаются из условия обращения в нуль всех миноров порядка $t+1$ матрицы (4.1). В точке x° и всех точках многообразия I_p будут выполнены соотношения

$$Y_i^\varepsilon \varphi_s = a_{\varkappa i}^\varepsilon \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\varkappa} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n-p) \tag{4.3}$$

$$Z_\omega \varphi_s = -\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\omega} + \alpha_{\varkappa\omega} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\varkappa} = 0 \tag{4.4}$$

Каждое уравнение из первой системы (3.10), имеющее номер j, умножим на $\partial\varphi_s/\partial x_j$ и сложим. В силу условий (4.3) получим

$$\xi_j \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} \alpha_{j\omega} \xi_\omega = 0$$

Если группа G непрерывна в Γ, то написанные соотношения должны выполняться вдоль многообразия I_p. Учитывая соотношения (4.4), отсюда получим

$$0 = \xi_j \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} \alpha_{j\omega} \xi_\omega = \xi_j \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \xi_\omega \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\omega} = \xi_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \tag{4.5}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Равенства (4.5) показывают, что многообразие I_p будет инвариантным многообразием группы G.

Из уравнений (4.3) следует, что $t \geqslant n-p$. Если $t = n-p$, то многообразие I_p будет единственным инвариантным многообразием группы G размерности p, содержащим точку x°. В самом деле, в этом случае условия, связывающие величины ξ_i в точке x°, исчерпываются точно $n-p$ соотношениями (4.5) и, следовательно, в окрестности точки x°, принадлежащей I_p, группа G действует транзитивно. Если бы через точку x° проходило еще одно инвариантное многообразие $I_p' \neq I_p$, то пересечение $I'_p \cap I_p$ было бы инвариантным многообразием группы G меньшей чем p размерности, что невозможно в силу упомянутой транзитивности. Если $t > n-p$, то группа G^* действует на многообразии I_p интранзитивно и допускает там точно $t+p-n$ инвариантов

$$\psi_1 = \mathrm{const}, \ldots, \psi_{r-p\ n} = \mathrm{const} \tag{4.6}$$

В этом случае в точках многообразия I_p, кроме соотношений (4.3) и (4.4), будут выполняться равенства

$$Y_i^{\varepsilon}\psi_\nu = Z_\omega \psi_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r + p - n) \tag{4.7}$$

которые повлекут, как и в предыдущем случае, выполнение на многообразии I_p условий $\xi_i\, \partial\psi_\nu / \partial x_i = 0$. Последние доказывают, что пересечения поверхностей (4.6) с I_p будут инвариантными многообразиями группы G. Размерность их равна $p - 1$. В этом случае можно утверждать, что через точку x° не проходит никаких иных инвариантных многообразий группы G размерности $p - 1$.

Предыдущие рассуждения верны для всякого $p = 0, \ldots, n$. Учитывая, наконец, что всякое инвариантное многообразие I_p группы содержит все ее инвариантные многообразия меньшей, чем p размерности, получим следующую теорему.

Теорема 4. 1. 1) Если ранг $m + n - h$ матрицы (4.1) не понижается ни в какой точке области Г, то группа G локально транзитивна в любой точке этой области. Условие это и необходимо.

2) Пусть система (1.1) определяющих уравнений приведена к виду (3.10).

$$a_{ji}^{\varepsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} = \xi_j + \alpha_{j\omega}\xi_\omega, \qquad a_{\rho i}^{\varepsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varepsilon} = 0$$

$$(j = 1, \ldots, h;\ i, \varepsilon = 1, \ldots, n;\ \omega = h + 1, \ldots, n;\ \rho = h + 1, \ldots, m)$$

где a_{ij}^{ε} — функции x, регулярные в области Г′ и $a_{\rho i}^{\varepsilon}$ — постоянные.

Тогда инфинитезимальные операторы

$$Y_i^{\varepsilon} = a_{ji}^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_{\rho i}^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\rho}, \qquad Z_\omega = -\frac{\partial}{\partial x_\omega} + \alpha_{j\omega} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

образуют алгебру с матрицей (4.1)

$$M = \begin{Vmatrix} a_{ji}^{\varepsilon} & 0 & a_{\rho i}^{\varepsilon} \\ \alpha_{j\omega} & -E & 0 \end{Vmatrix}$$

соответствующую некоторой группе Ли G^*. Если уравнения (3.10) допускают решения, регулярные в области $\Gamma \subset \Gamma'$, то определяемая совокупностью всех таких решений группа G допускает в области Г все инвариантные многообразия группы G^*. Ими исчерпываются все инвариантные многообразия группы G размерности $p \leqslant p_0$, где p_0 — наивысшая размерность инвариантных многообразий группы G^*. Отсюда, в частности, следует, что если $p_0 = n - 1$, то инвариантные многообразия группы G^* дают все инвариантные многообразия группы G.

3) Если в уравнениях (1.1) все $\alpha_{ji} = 0$ ($h = 0$,), то определяемая этими уравнениями группа G локально транзитивна во всех точках и не допускает никаких инвариантных многообразий.

5. **Замечания о применении теоремы (4.1).** 1) *Особые инвариантные многообразия.* Согласно известной процедуре, инвариантные многообразия группы G^* вычисляются следующим образом. Приравниваются нулю все миноры порядка $n - h + 1$ матрицы M. Полученная система уравнений, если она совместна, дает совокупность всех инвариантных многообразий наинизшей размерности. Инвариантные многообразия больших размерностей получим, приравнивая нулю последовательно миноры все более высокого порядка.

Из структуры матрицы M видно, что всякий ее минор порядка $d > n - h$, если он не равен тождественно нулю, равен с точностью до знака, соответствующему (по правилу Лапласа) минору порядка $d - (n - h)$ матрицы

$$\| a_{ji}^{\varepsilon},\ a_{\rho i}^{\varepsilon} \| = \| a_{\gamma i}^{\varepsilon} \| \qquad (\gamma = 1, \ldots, m) \tag{5.1}$$

Таким образом, описанная процедура нахождения инвариантных многообразий может применяться непосредственно к матрице (5.1) левых частей определяющих уравнений (3.10). Отсюда и из теоремы 4.1 следует, что многообразия, на которых вырождаются определяющие уравнения, будут инвариантными многообразиями группы, задаваемой этими уравнениями.

2) *Неособые инвариантные многообразия.* Если общий ранг q матрицы M меньше $n + m - h$, то, очевидно, общий ранг r матрицы (5.1) меньше m. В этом случае группа G^* и с ней группа G допускают $m - r$ инвариантов $\psi_1 = \mathrm{const}, \ldots, \psi_{m-r} = \mathrm{const}$; существует совокупность таких регулярных функций $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_m^{(s)}$, что имеют место $m - r$ независимых соотношений $\lambda_\gamma^{(s)} a_{\gamma i}^{\varepsilon} = 0$, $s = 1, \ldots, m - r$, справедливых в любой точке Γ'. Функции $\lambda_\gamma^{(s)}$ нетрудно найти. В силу предположения о существовании непрерывных в Γ решений уравнений (3.10) должны быть выполнены $m - r$ соотношений

$$\lambda_j^{(s)} \xi_j + \lambda_j^{(s)} \alpha_{j\omega} \xi_\omega = \lambda_i^{(s)} \xi_i = 0$$

Из условий $X\psi_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, m - r$ следует, что система Пфаффа

$$\lambda_1^{(1)}\, dx_1 + \cdots + \lambda_n^{(1)}\, dx_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1^{(m-r)}\, dx_1 + \cdots + \lambda_n^{(m-r)}\, dx_n = 0$$

совместна и допускает в качестве своих решений искомые инварианты. Все сказанное относится также к инвариантам группы, индуцированной группой G на ее инвариантных многообразиях.

Пример. Рассмотрим определяющие уравнения группы G_1, допускаемой дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0, \qquad 2\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0$$

$$2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0 \tag{5.2}$$

$$x_1' = x_1 + \tau\xi_1, \qquad x_2' = x_2 + \tau\xi_2, \qquad u' = u + \tau\zeta$$

Согласно теореме 4.1 в силу однородности этих уравнений ($h = 0$) определяемая ими группа G_1 локально транзитивна во всех точках.

Дополним систему (5.2) уравнениями

$$x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + u \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = m\xi_1, \qquad x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + u \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = m\xi_2$$

$$x_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + u \frac{\partial \zeta}{\partial n} = m\zeta \tag{5.3}$$

где m — натуральное число.

Нетрудно проверить, что система (5.2), дополненная уравнениями (5.3), снова будет системой определяющих уравнений, к тому же — пассивной. Уравнения (5.3) выделяют из группы G_1 однородную подгруппу G. Матрица $\| a^{\varepsilon}_{\gamma l} \|$ левых частей уравнения (5.2), (5.3) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & u \end{Vmatrix}$$

Среди миноров пятого порядка этой матрицы есть миноры, нигде не обращающиеся в нуль. Все миноры шестого и седьмого порядков, обращающиеся в нуль в точке $x_1 = x_2 = u = 0$, будут таким образом нульмерным инвариантным многообразием I_0 группы G. Все миноры восьмого порядка обращаются в нуль на поверхности

$$4x_1u + x_2^2 = 0 \tag{5.4}$$

являющейся двумерным инвариантным многообразием I_2 группы G.

Так как общий ранг матрицы $r = m = 8$, то группа G не допускает инвариантов. В точках общего положения поверхности I_2 ранг матрицы понижается только на единицу. Следовательно, группа, индуцированная на I_2 группой G, действует на нем транзитивно.

Отметим, что величина u, определенная уравнением (5.4), как функция независимых переменных x_1 и x_2, как и следовало ожидать, есть решение исходного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$$

Поступила 28 XII 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Полак Л. С. Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.
2. Noether E. Invariante Transformationsproblem. Nachr. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Götingen; math.— phis. Kl., 1918, Abs. 2.
3. Соколик Г. А. Групповые методы в теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965.
4. Овсянников Л. В. Группы и инвариантногрупповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
5. Овсянников Л. В. Групповая классификация дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во С. О. АН СССР. 1962.
6. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). Сб. «Об основаниях геометрии». М., Гостехиздат, 1956.
7. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. М.— Л., Гостехтеориздат, 1938.
8. Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, Teubner, 1888, Abs. 1.
9. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии М.— Л., Гостехиздат, 1948.