Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

К УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ПУАНКАРЕ — ЧЕТАЕВА

Фам Гуен

(Ханой, Москва)

Прямым методом при одновременном учете всех наложенных связей из общего уравнения динамики выведены уравнения движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева [1]. Доказывается их эквивалентность уравнениям движения, данным другими методами.

1. Уравнения движения неголономных систем. Рассмотрим неголономную систему с l степенями свободы, положения которой определяются n переменными Пуанкаре — Четаева $x_1,\ldots, x_n$ с p голономными и q неголономными линейными связями.

Как в [1], пусть $X_0, X_1,\ldots, X_k$ с коммутаторами

$$(X_r, X_s) = \sum_{t=1}^{k} C_{rst}X_t \qquad (r=0, 1, \ldots, k;\ s=1, \ldots, k;\ k=n-p) \tag{1.1}$$

будут операторами перемещения так называемой соответствующей голономной системы, полученной из рассматриваемой отбрасыванием всех q неголономных связей; $\eta_1, \ldots, \eta_k$ и $\omega_1,\ldots, \omega_k$ — параметры действительных и возможных перемещений этой системы; k — ее число степеней свободы; а неголономные связи сведены к соотношениям

$$\eta_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\eta_s + c_{\nu 0}, \qquad \omega_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\omega_s \qquad (\nu = l+1, \ldots, k;\ l=k-q) \tag{1.2}$$

Здесь C_{rst}, $c_{\nu s}$, $c_{\nu o}$ — определенные функции t, x_i, зависящие только от условий связей и выбора параметров η_s, ω_s для соответствующей голономной системы.

Тогда, в силу (2.2) из [1] и (1.2), изменения df и δf произвольной функции $f(t, x_i)$ на действительных и возможных перемещениях неголономной системы, когда выполняются все $p+q$ условий связей, определяются по формулам

$$df = \Big[Y_0(f) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s Y_s(f)\Big]dt, \qquad \delta f = \sum_{s=1}^{l} \omega_s Y_s(f) \tag{1.3}$$

Здесь $Y_0, Y_1,\ldots, Y_l$ — операторы перемещений неголономной системы, имеющие выражения через операторы X_s и коммутаторы, равные

$$Y_s = X_s + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu s}X_\nu, \quad (Y_r, Y_s) = \sum_{t=1}^{l} k_{rst}Y_t + \sum_{\nu=l+1}^{k} k^*_{rs\nu}X_\nu \ \begin{pmatrix} r=0, 1, \ldots, l \\ s=1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

В выражении (1.4) коэффициенты определяются формулами

$$k_{rst} = C_{rst} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu s} C_{r\nu t} + \sum_{\mu=l+1}^{k} c_{\mu r}\left(C_{\mu st} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu s} C_{\mu\nu t}\right)$$

$$k^*_{rs\nu} = k_{rs\nu} - \sum_{t=1}^{l} c_{\nu t} k_{rst} + Y_r(c_{\nu s}) - Y_s(c_{\nu r}) \tag{1.5}$$

$$\begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, l; \; s = 1, \ldots, l \\ t = 1, \ldots, l, \; l+1, \ldots, k; \; \nu = l+1, \ldots k \end{pmatrix}$$

Для неголономной системы с идеальными связями и силовой функцией U, пользуясь операторами (1.4), можно вывести уравнения движения из общего уравнения динамики

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\left(m_i u_i'' - \frac{\partial U}{\partial u_i}\right)\delta u_i + \left(m_i v_i'' - \frac{\partial U}{\partial v_i}\right)\delta v_i + \left(m_i w_i'' - \frac{\partial U}{\partial w_i}\right)\delta w_i\right] = 0 \tag{1.6}$$

Здесь N обозначает число материальных точек системы; u_i, v_i, w_i — декартовы координаты i-й точки, являющиеся по условию задачи функциями переменных t, $x_1, \ldots, x_n$; u_i'', v_i'', w_i'' — ее ускорения; δu_i, δv_i, δw_i— возможные перемещения точки, допускаемые всеми связями и определенные, согласно (1.3), по формулам

$$\delta u_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s Y_s(u_i), \qquad \delta v_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s Y_s(v_i), \qquad \delta w_i = \sum_{s=1}^{l} \omega_s Y_s(w_i)$$

$$(i = 1, \ldots, N) \tag{1.7}$$

Для этого, подставляя (1.7) в (1.6), в силу независимости между $\omega_1, \ldots, \omega_l$, получаем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[u_i'' Y_s(u_i) + v_i'' Y_s(v_i) + w_i'' Y_s(w_i)\right] - Y_s(U) = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.8}$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[u_i' Y_s(u_i) + v_i' Y_s(v_i) + w_i' Y_s(w_i)\right] - Y_s(U) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} m_i \left[u_i' \frac{dY_s(u_i)}{dt} + v_i' \frac{dY_s(v_i)}{dt} + w_i' \frac{dY_s(w_i)}{dt}\right] = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.9}$$

Здесь u_i', v_i', w_i' — скорости точки, определяемые, согласно (1.3), по формулам, написанным лишь для $f = u_i$

$$u_i' = Y_0(u_i) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s Y_s(u_i) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.10}$$

Из (1.10) можно определить

$$Y_s(u_i) = \frac{\partial u_i'}{\partial \eta_s}, \quad Y_s(v_i) = \frac{\partial v_i'}{\partial \eta_s}, \quad Y_s(w_i) = \frac{\partial w_i'}{\partial \eta_s} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, l \\ i = 1, \ldots, N \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

а, согласно (1.3), для функций $f = u_i, v_i, w_i$ имеем

$$\frac{dY_s(f)}{dt} = Y_s\left(\frac{df}{dt}\right) + (Y_0, Y_s)f + \sum_{r=1}^{l} \eta_s (Y_r, Y_s) f \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11) и (1.12) с учетом (1.4) в (1.9), получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - Y_s(T + U) - \sum_{t=1}^{l}\left(k_{0st} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r k_{rst}\right)\frac{\partial}{\partial \eta_t} -$$

$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(k_{0s\nu}^{*} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r k_{rs\nu}^{*}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.13}$$

Это — уравнения движения неголономной системы в переменных Пуанкаре — Четаева, выведенные из общего уравнения динамики при учете одновременно и с самого начала всех наложенных на систему связей. Здесь T — живая сила неголономной системы

$$T(t, x_i, \eta_1, \ldots, \eta_l) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2) \tag{1.14}$$

а $(\partial T^\circ / \partial \eta_\nu)$ обозначают выражения

$$\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i [u_i' X_\nu(u_i) + v_i' X_\nu(v_i) + w_i' X_\nu(w_i)] \tag{1.15}$$

$$(\nu = l + 1, \ldots, k)$$

Покажем, что $(\partial T^\circ / \partial \eta_\nu)$ имеют механические значения импульсов, соответствующих зависимым параметрам η_ν из (1.2), если T° — живая сила соответствующей голономной системы, подсчитанная без учета неголономных связей или (1.2) по формулам

$$T^\circ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2), \qquad u_i' = X_0(u_i) + \sum_{s=1}^{k} \eta_s X_s(u_i) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.16}$$

Здесь формулы для производных написаны лишь для u_i'. В самом деле, из (1.16), в частности, можно получить

$$X_\nu(u_i) = \frac{\partial u_i'}{\partial \eta_\nu}, \qquad X_\nu(v_i) = \frac{\partial v_i'}{\partial \eta_\nu}, \qquad X_\nu(w_i) = \frac{\partial w_i'}{\partial \eta_\nu} \qquad \left(\begin{matrix}\nu = l + 1, \ldots, k \\ i = 1, \ldots, N\end{matrix}\right) \tag{1.17}$$

Отсюда, подставляя (1.17) в (1.15), получаем выражения для импульсов $\partial T^\circ / \partial \eta_\nu$.

Уравнения (1.13) совпадают с уравнениями (3.14) из [1], полученными методом Чаплыгина [2], так как живая сила T в (1.13), подсчитанная по формуле (1.14), и функция Θ в [1] имеют одинаковые выражения, в чем можно убедиться вычислением.

2. Об эквивалентности уравнений движения неголономных систем. В настоящее время имеются многие методы вывода уравнений движения неголономных систем, от чего часто возникает вопрос об их эквивалентности [3]. В связи с этим, показав, что выше изложенный прямой метод и метод Чаплыгина дают одинаковые результаты, переходим к рассмотрению методов Аппеля [4], Гамеля [5], Вольтерра [6] и др.

Продифференцируя (1.10) по t, получаем

$$u_i'' = \sum_{s=1}^{l} \eta_s' Y_s(u_i) + \ldots, \quad v_i'' = \sum_{s=1}^{l} \eta_s' Y_s(v_i) + \ldots,$$

$$w_i'' = \sum_{s=1}^{l} \eta_s' Y_s(w_i) + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

Здесь написаны лишь формулы для u_i'', а многоточие обозначают члены, не содержащие $\eta_s' = d\eta_s/dt$ $(s = 1, \ldots, l)$.

Из (2.1), определяя

$$Y_s(u_i) = \frac{\partial u_i''}{\partial \eta_s'}, \quad Y_s(v_i) = \frac{\partial v_i''}{\partial \eta_s'}, \quad Y_s(w_i) = \frac{\partial w_i''}{\partial \eta_s'} \qquad \left(\begin{matrix} s = 1, \ldots, l \\ i = 1, \ldots, N \end{matrix}\right) \tag{2.2}$$

и подставляя их в (1.8), получаем уравнения Аппеля для неголономной системы в переменных Пуанкаре — Четаева

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_s'} = Y_s(U) \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.3}$$

Здесь S — энергия ускорения, подсчитанная по формулам (2.1)

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (u_i''^2 + v_i''^2 + w_i''^2) \tag{2.4}$$

Уравнения Аппеля (2.3) эквивалентны уравнениям (1.13), так как вычислением можно установить (2.5)

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_s'} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - \sum_{i=1}^{N} m_i \left[u_i' \frac{dY_s(u_i)}{dt} + v_i' \frac{dY_s(v_i)}{dt} + w_i' \frac{dY_s(w_i)}{dt} \right] \qquad (s = 1, \ldots, l)$$

а правые части (2.5) преобразуются в (1.13), как это видно[1] из (1.9).

Согласно Гамелю [5], уравнения движения неголономных систем можно вывести из условий

$$\frac{d\delta u_i}{dt} - \delta u_i' = 0, \quad \frac{d\delta v_i}{dt} - \delta v_i' = 0, \quad \frac{d\delta w_i}{dt} - \delta w_i' = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.6}$$

установленных для всех декартовых координат точек системы [2], и урав-

---

[1] Вопросом об эквивалентности уравнений Чаплыгина [2] и уравнений Аппеля [4] занимались М. И. Ефимов в работе «Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем» (Канд. дисс., Институт механики АН СССР, 1953) и Ш. З. Шаги-Султан в [7].

[2] Обоснование этих условий для неголономных систем дано в работах [5,6,8–10] и др.

нения Бельтрами, которое в переменных Пуанкаре — Четаева имеет вид

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{k}\omega_s\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_s}-\delta(T^\circ+U)=0 \qquad (2.7)$$

Здесь операции d и δ применяются без учета неголономных связей, т. е. по формулам (1.5) из [1], а T° — живая сила соответствующей голономной системы, подсчитанная по формулам (1.16). Неголономные связи (1.2) в методе Гамеля принимаются в расчет лишь после того, когда (2.7) при (2.6) уже приведено к форме (3.2) работы [1]. Отсюда эквивалентность между (1.13) и уравнениями, полученными методом Гамеля, будет естественной, ибо последние можно привести к (1.13) или им эквивалентным (3.14) из [1], переходя к живой силе T по формуле (3.8) в [1].

Для примера рассмотрим случай $c_{\nu s}=c_{\nu 0}=0$ или $\eta_\nu=0$, $\omega_\nu=0$, что был в [5,3]. Уравнения Гамеля тогда будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_s}\right)_{\eta_\nu=0}-[X_s(T^\circ+U)]_{\eta_\nu=0}-\sum_{t=1}^{k}\left(C_{0st}+\sum_{r=1}^{l}\eta_r C_{rst}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_t}\right)_{\eta_\nu=0}=0 \qquad (2.8)$$

$$(s=1,\ldots,l)$$

Переходя к живой силе T или Θ по формуле (3.8) из [1], заменяя в (2.8)

$$\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_s}\right)_{\eta_\nu=0}=\frac{\partial T}{\partial\eta_s},\qquad [X_s(T^\circ)]_{\eta_\nu=0}=X_s(T)\qquad (s=1,\ldots,l) \qquad (2.9)$$

получим частный случай уравнений (1.13), когда $c_{\nu s}=c_{\nu 0}=0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\eta_s}-X_s(T+U)-\sum_{t=1}^{l}\left(C_{0st}+\sum_{r=1}^{l}\eta_r C_{rst}\right)\frac{\partial T}{\partial\eta_t}-$$
$$-\sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{0s\nu}+\sum_{r=1}^{l}\eta_r C_{rs\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_\nu}\right)=0 \qquad (s=1,\ldots,l) \qquad (2.10)$$

В [6] В. Вольтерра вывел уравнения движения неголономных систем из уравнения Бельтрами и условий (2.6), для которых операции d и δ определены по формулам (1.3)

$$\sum_{s=1}^{l}\omega_s\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\eta_s}-Y_s(T+U)\right]+\sum_{t=1}^{l}\left(\frac{d\omega_t}{dt}-\delta\eta_t\right)\frac{\partial T}{\partial\eta_t}=0 \qquad (2.11)$$

$$\sum_{t=1}^{l}\left(\frac{d\omega_t}{dt}-\delta\eta_t\right)Y_t(u_i)=-\sum_{s=1}^{l}\omega_s\left[\sum_{t=1}^{l}\left(k_{0st}+\sum_{r=1}^{l}\eta_r k_{rst}\right)Y_t(u_i)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=l+1}^{k}\left(k_{0s\nu}^*+\sum_{r=1}^{l}\eta_r k_{rs\nu}^*\right)X_\nu(u_i)\right]\qquad (i=1,\ldots,N) \qquad (2.12)$$

Здесь T — живая сила (1.14); выражения (2.12) для v_i и w_i получаются аналогично. Для этого, следуя Вольтерра, умножаем (2.12) соответственно на $m_iY_s(u_i)$, $m_iY_s(v_i)$, $m_iY_s(w_i)$, суммируем по i от 1 до

N и разрешаем их относительно $d\omega_t/dt - \delta\eta_t$

$$\frac{d\omega_t}{dt} - \delta\eta_t = -\sum_{s=1}^{l} \omega_s \left(a_{0st} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r a_{rst}\right) \qquad (t = 1, \ldots, l) \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.11), получаем уравнения Вольтерра в переменных Пуанкаре — Четаева

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - Y_s(T + U) - \sum_{t=1}^{l} \left(a_{0st} + \sum_{r=1}^{l} \eta_r a_{rst}\right) \frac{\partial T}{\partial \eta_t} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.14}$$

Здесь

$$a_{rst} = k_{rst} + \sum_{\nu=l+1}^{k} k^{*}_{rs\nu} \sum_{k=1}^{l} a^{-1}_{kt} \sum_{i=1}^{N} m_i [Y_k(u_i) X_\nu(u_i) + $$
$$+ Y_k(v_i) X_\nu(v_i) + Y_k(w_i) X_\nu(w_i)] \qquad \left(\begin{matrix} r = 0, 1, \ldots, l \\ s, t = 1, \ldots, l \end{matrix}\right) \tag{2.15}$$

a^{-1}_{kt} — элемент обратной матрицы к матрице, элементами которой будут коэффициенты a_{kt} при произведениях $\eta_k\eta_t$ в квадратичной части живой силы T (1.14).

Указанный вывод уравнений (2.14) нельзя считать достаточно обоснованным для неголономных систем, так как, вообще говоря, (2.13) могут не являться решением системы (2.12) из-за ее переопределенности [1]. В самом деле, подставляя (2.13) в (2.12), получаем для u_j и, аналогично, v_j, w_j

$$X_\nu(u_j) = \sum_{t=1}^{l} Y_t(u_j) \sum_{k=1}^{l} a^{-1}_{kt} \sum_{i=1}^{N} m_i [Y_k(u_i) X_\nu(u_i) + $$
$$+ Y_k(v_i) X_\nu(v_i) + Y_k(w_i) X_\nu(w_i)] \qquad \left(\begin{matrix} \nu = l + 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, N \end{matrix}\right) \tag{2.16}$$

Эти условия не выполняются, в частности, для обруча (см. п. 3).

Тем не менее уравнения (2.14) оказываются справедливыми для неголономных систем [2], так как, несмотря на невыполняемости (2.16), операция разрешения (2.12) по методу Вольтерра и операция умножения (2.13) на $\partial T/\partial\eta_t$ оказываются взаимно-обратными для уравнения (2.11).

В справедливости уравнений (2.14) можно убедиться, кроме того, и следующим образом. Подставляя (1.10) в

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_t} = \sum_{i=1}^{N} m_i [u_i' Y_t(u_i) + v_i' Y_t(v_i) + w_i' Y_t(w_i)] \qquad (t = 1, \ldots, l) \tag{2.17}$$

и разрешая их относительно η_k, получаем

$$\eta_k = \sum_{t=1}^{l} a^{-1}_{kt} \frac{\partial T}{\partial \eta_t} - \sum_{t=1}^{l} a^{-1}_{kt} a_{0t} \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.18}$$

Здесь a_{0t} — коэффициенты при η_t в линейной части живой силы (1.14).

---

[1] Это не было указано в [6,3].

[2] Это было отмечено в работе [11].

Выражения (1.15) после подстановки в них (1.10) и (2.18) принимают вид

$$\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = \sum_{t=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial \eta_t} \sum_{k=1}^{l} a_{kt}^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[Y_k(u_i) X_\nu(u_i) + \right.$$

$$\left. + Y_k(v_i) X_\nu(v_i) + Y_k(w_i) X_\nu(w_i)\right] \qquad (\nu = l+1, \ldots, k) \qquad (2.19)$$

В силу (2.19), уравнения (1.13) в обозначениях (2.15) совпадают с уравнениями Вольтерра (2.14), что доказывает их справедливость для неголономных систем.

Уравнения Ферререса [12] для неголономной системы с l степенями свободы, определяемой $3N$ декартовыми координатами x_i, y_i, z_i, подчиненными гладким неголономным связям, в силу которых скорости x_i', y_i', z_i' выражаются через некоторые l независимых величин θ_1', ..., θ_l'

$$x_i' = \sum_{s=1}^{l} a_{is}\theta_s', \qquad y_i' = \sum_{s=1}^{l} b_{is}\theta_s', \qquad z_i' = \sum_{s=1}^{l} c_{is}\theta_s' \qquad (i = 1, \ldots, N) \qquad (2.20)$$

имеют вид [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_s'} - \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i' a_{is}' + y_i' b_{is}' + z_i' c_{is}') = \frac{\partial U}{\partial \theta_s} \qquad (s = 1, \ldots, l) \qquad (2.21)$$

Здесь a_{is}', b_{is}', c_{is}' — производные от a_{is}, b_{is}, c_{is} по t; $\partial/\partial\theta_s$ — операторы

$$\frac{\partial}{\partial \theta_s} = \sum_{i=1}^{N} \left(a_{is}\frac{\partial}{\partial x_i} + b_{is}\frac{\partial}{\partial y_i} + c_{is}\frac{\partial}{\partial z_i}\right) \qquad (s = 1, \ldots, l) \qquad (2.22)$$

Уравнения (2.21) в силу того, что

$$a_{is}' = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial a_{is}}{\partial \theta_r}\theta_r', \qquad b_{is}' = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial b_{is}}{\partial \theta_r}\theta_r', \qquad c_{is}' = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial c_{is}}{\partial \theta_r}\theta_r' \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \theta_s} = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial a_{ir}}{\partial \theta_s}\theta_r', \qquad \frac{\partial y_i'}{\partial \theta_s} = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial b_{ir}}{\partial \theta_s}\theta_r', \qquad \frac{\partial z_i'}{\partial \theta_s} = \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial c_{ir}}{\partial \theta_s}\theta_r'$$

$$(r, s = 1, \ldots, l; \ i = 1, \ldots, N)$$

могут быть приведены к виду (1.13)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_s'} - \frac{\partial (T+U)}{d\theta_s} - \sum_{r=1}^{l} \theta_r' \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial \theta_r} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial \theta_s}\right)\frac{\partial T^\circ}{\partial x_i'} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial b_{is}}{\partial \theta_r} - \frac{\partial b_{ir}}{\partial \theta_s}\right)\frac{\partial T^\circ}{\partial y_i'} + \left(\frac{\partial c_{is}}{\partial \theta_r} - \frac{\partial c_{ir}}{\partial \theta_s}\right)\frac{\partial T^\circ}{\partial z_i'}\right] = 0 \qquad (s = 1, \ldots, l) \qquad (2.24)$$

$$T^\circ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

---

[1] В работе [13] П. Аппель исследовал случай, когда θ_s — истинные обобщенные координаты системы.

Уравнения (2.24) в обобщенных координатах были получены в [14]. Их можно обобщить и на случай переменных Пуанкаре — Четаева, рассматривая неголономную систему, определяемую n переменными $x_1, \ldots, x_n$ с $n-k$ голономными связями, при помощи которых построена система (1.1), и с $k-l$ неголономными связями, в силу которых параметры $\eta_1, \ldots, \eta_k$ и $\omega_1, \ldots, \omega_k$ выражаются через l независимых величин θ_s', $\delta\theta_s$ в виде

$$\eta_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\theta_s' + c_{\nu 0}, \qquad \omega_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\delta\theta_s \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{2.25}$$

Тогда, принимая θ_s', $\delta\theta_s$ за параметры действительных и возможных перемещений неголономной системы, вместо (1.5), (1.7) и (1.13) получаем

$$Y_0 = X_0 + \sum_{\nu=1}^{k} c_{\nu 0}X_\nu, \qquad Y_s = \sum_{\nu=1}^{k} c_{\nu s}X_\nu \qquad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.26}$$

$$k_{rs\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} c_{\mu s}\left(C_{r\mu\nu} + \sum_{\gamma=1}^{k} c_{\gamma r}C_{\gamma\mu\nu}\right), \qquad \overset{*}{k}_{rs\nu} = k_{rs\nu} + Y_r(c_{\nu s}) + Y_s(c_{\nu r}) \tag{2.27}$$

$$(r = 0, 1, \ldots, l;\ s = 1, \ldots, l;\ \nu = 1, \ldots, k)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta_s'} - Y_s(T+U) - \sum_{\nu=1}^{k}\left(\overset{*}{k}_{0s\nu} + \sum_{r=1}^{l}\theta_r'\overset{*}{k}_{rs\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{2.28}$$

Здесь T° — живая сила, подсчитанная по формулам (1.16).

Уравнения (2.28) содержат в себе, как частные случаи, уравнения (2.24) в декартовых и обобщенных координатах, а в случае, когда (2.25) имеют вид (1.2), они могут быть приведены к форме уравнений (1.13), откуда и вытекает их эквивалентность.

3. Пример. Рассмотрим движения обруча, определяемого шестью переменными $\theta, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta$ с голономной связью [13]

$$\zeta - a\sin\theta = 0 \tag{3.1}$$

и неголономными связями

$$\xi' - a\sin\psi\sin\theta\theta' + a\cos\psi\cos\theta\psi' + a\cos\psi\varphi' = 0$$

$$\eta' + a\cos\psi\sin\theta\theta' + a\sin\psi\cos\theta\,' + a\sin\psi\varphi' = 0 \tag{3.2}$$

Приняв $\theta, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta$ за переменные Пуанкаре — Четаева, а проекции угловой скорости p, q, r, определяемые в [13], и ξ', η' за параметры действительных перемещений соответствующей обручу голономной системы (без учета связей (3.2)), получим

$$\eta_1 = p = \theta', \quad \eta_2 = q = \psi'\sin\theta, \quad \eta_3 = r = \psi'\cos\theta + \varphi', \quad \eta_4 = \xi', \quad \eta_5 = \eta' \tag{3.3}$$

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial\theta} + a\cos\theta\frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad X_2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial\xi}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial\eta} \tag{3.4}$$

Коммутаторы операторов (3.4) равны нулю, за исключением

$$(X_1, X_2) = -\operatorname{ctg}\theta\, X_2 + X_3$$

Неголономные связи (3.2) приводятся к (1.2) в виде

$$\eta_4 = a\sin\psi\sin\theta\eta_1 - a\cos\psi\eta_3, \qquad \eta_5 = -a\cos\psi\sin\theta\eta_1 - a\sin\psi\eta_3 \tag{3.5}$$

Операторы перемещений неголономной системы для обруча будут

$$Y_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_1=\frac{\partial}{\partial\theta}+a\sin\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\xi}-a\cos\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\eta}+a\cos\theta\frac{\partial}{\partial\zeta}\tag{3.6}$$

$$Y_2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad Y_3=\frac{\partial}{\partial\varphi}-a\cos\psi\frac{\partial}{\partial\xi}-a\sin\psi\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Для них

$$(Y_1,Y_2)=-\operatorname{ctg}\theta\, Y_2+Y_3,\qquad (Y_2,Y_3)=\frac{a\sin\psi}{\sin\theta}X_4-\frac{a\cos\psi}{\sin\theta}X_5$$

Живая сила T, T° и силовая функция U равны [13]

$$T={}^1/_2\,[(A+a^2)\,\eta_1^2+A\eta_2^2+(C+a^2)\,\eta_3^2],\qquad U=-ag\sin\theta$$

$$T^0={}^1/_2\,[(A+a^2\cos^2\theta)\,\eta_1^2+A\eta_2^2+C\eta_3^2+\eta_4^2+\eta_5^2]\tag{3.7}$$

Уравнения (1.13) дают

$$(A+a^2)\eta_1'-A\operatorname{ctg}\theta\eta_2^2+(C+a^2)\eta_2\eta_3+ag\cos\theta=0$$

$$A\eta_2'+A\operatorname{ctg}\theta\eta_1\eta_2-C\eta_1\eta_3=0,\qquad (C+a^2)\eta_3'-a^2\eta_1\eta_2=0\tag{3.8}$$

В [13] эти уравнения были получены из общих теорем динамики и из уравнений Аппеля.

Подставляя (3.5) в функцию T° (3.7), получим Θ в [1]

$$\Theta={}^1/_2\,[(A+a^2)\eta_1^2+A\eta_2^2+(C+a^2)\eta_3^2]\tag{3.9}$$

Последняя совпадает с выражением для T из (3.7), поэтому уравнения (3.14) работы [1] также дают (3.8).

Энергия ускорения для обруча равна

$$S={}^1/_2\,[(A+a^2)\eta_1'^2+A\eta_2'^2+(C+a^2)\eta_3'^2+2\,(A\operatorname{ctg}\theta\eta_2-C\eta_3)\,(\eta_1\eta_2'-\eta_2\eta_1')-$$

$$-2a^2\eta_2\,(\eta_1\eta_3'-\eta_3\eta_1')]+\ldots\tag{3.10}$$

Здесь многоточие — члены, несодержащие η_1', η_2', η_3'.

В силу (3.10), уравнения Аппеля (2.3) также дают уравнения (3.8).

Декартовы координаты u_i, v_i, w_i i-й точки обруча выражаются через выбранные переменные формулами

$$u_i=\xi+x_i\,(-\cos\theta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi)+y_i\,(-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)+z_i\sin\theta\sin\psi$$

$$v_i=\eta+x_i\,(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi)+y_i\,(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi)-z_i\sin\theta\cos\psi$$

$$w_i=\zeta_i+x_i\sin\theta\sin\varphi+y_i\sin\theta\cos\varphi+z_i\cos\theta\qquad(i=1,2,\ldots)\tag{3.11}$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты той же i-й точки в системе, оси которой жестко связаны с обручем и будут его главными осями инерции.

Перестановочные соотношения (2.6) для u_i и также v_i, w_i в методе Гамеля дают

$$\sum_{s=1}^{5}\left(\frac{d\omega_s}{dt}-\delta\eta_s\right)X_s\,(u_i)+(\omega_1\eta_2-\omega_2\eta_1)\,[\operatorname{ctg}\theta\, X_2\,(u_i)-X_3\,(u_i)]=0\tag{3.12}$$

$$(i=1,\,2,\ldots)$$

В силу (3.12), уравнение Бельтрами (2.7) для обруча принимает выражение

$$\sum_{s=1}^{5}\omega_s\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_s}-X_s\,(T^\circ+U)\right]-(\omega_1\eta_2-\omega_2\eta_1)\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_2}-\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_3}\right)=0\tag{3.13}$$

Это уравнение при учете неголономных связей дает

$$\frac{d}{dt}(A + a^2\cos^2\theta)\,\eta_1 + a\sin\theta\sin\psi\frac{d\eta_4}{dt} - a\sin\theta\cos\psi\frac{d\eta_5}{dt} +$$
$$+ a^2\sin\theta\cos\theta\eta_1^2 - A\,\mathrm{ctg}\,\theta\eta_2^2 + C\eta_2\eta_3 + ag\cos\theta = 0 \qquad (3.14)$$
$$\frac{d}{dt}A\eta_2 + A\,\mathrm{ctg}\,\theta\eta_1\eta_2 - C\eta_1\eta_2 = 0, \qquad \frac{d}{dt}C\eta_3 - a\cos\psi\frac{d\eta_4}{dt} - a\sin\psi\frac{d\eta_5}{dt} = 0$$

Подставляя сюда (3.5), снова получаем уравнения (3.8).

Соотношения (2.12) для u_i и, аналогично, v_i, w_i имеют выражения

$$\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{d\omega_s}{dt} - \delta\eta_s\right)Y_s(u_i) + (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1)\,[\mathrm{ctg}\,\theta\, Y_2(u_i) - Y_3(u_i)] +$$
$$+ (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2)\left[-\frac{a\sin\psi}{\sin\theta}X_4(u_i) + \frac{a\cos\psi}{\sin\theta}X_5(u_i)\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \quad (3.15)$$

Пользуясь (3.15), не разрешая их относительно $d\omega_s / dt - \delta\eta_s$, можно привести уравнение Бельтрами (2.11) к виду

$$\sum_{s=1}^{3}\omega_s\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\eta_s} - Y_s(T + U)\right] - (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1)\left(\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial T}{\partial\eta_2} - \frac{\partial T}{\partial\eta_3}\right) -$$
$$- (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2)\left[-\frac{a\sin\psi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_4}\right) + \frac{a\cos\psi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_5}\right)\right] = 0 \qquad (3.16)$$

Последнее, в силу (3.7), опять дает уравнения (3.8).

Желая проверить условия (2.16), получаем

$$Y_1(u_i)\frac{a}{A + a^2} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}, \qquad Y_1(v_i)\frac{a}{A + a_2} = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}, \qquad Y_1(w_i)\frac{a}{A + a^2} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots)$$

Они не выполняются, так как $a \neq 0$.

Однако уравнения (2.14) все же дают правильные уравнения движения обруча. В самом деле, разрешая (3.15) по методу Вольтерра, получаем

$$a_{122} = -a_{212} = \mathrm{ctg}\theta, \qquad a_{123} = -a_{213} = -1$$

$$a_{231} = -a_{321} = -\frac{a}{A + a^2}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_1(u_i) + \frac{a}{A + a^2}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_1(v_i)$$
$$a_{232} = -a_{322} = -\frac{a}{A}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_2(u_i) + \frac{a}{A}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_2(v_i)$$
$$a_{233} = -a_{323} = -\frac{a}{C + a^2}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_3(u_i) + \frac{a}{C + a^2}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\sum_{i=1,2\ldots} m_i Y_3(v_i)$$

Подставляя полученные в (2.14), при учете

$$\frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_4} = \sum_{i=1,2\ldots} m_i u_i', \qquad \frac{\partial T^\circ}{\partial\eta_5} = \sum_{i=1,2\ldots} m_i v_i'$$

получаем (3.8), т. е. уравнения движения обруча.

Условия (2.20) и уравнения (2.21) для обруча имеют вид

$$u_i' = \sum_{s=1}^{3} \eta_s Y_s(u_i), \qquad v_i' = \sum_{s=1}^{3} \eta_s Y_s(v_i), \qquad w_i' = \sum_{s=1}^{3} \eta_s Y_s(w_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - \sum_{i=1,2,\ldots} m_i \left[u_i' \frac{dY_s(u_i)}{dt} + v_i' \frac{dY_s(v_i)}{dt} + w_i' \frac{dY_s(w_i)}{dt}\right] = Y_s(U) \qquad (s = 1, 2, 3)$$

Последние, в силу соотношений

$$\frac{dY_s(u_i)}{dt} = \sum_{r=1}^{3} \eta_r Y_r Y_s(u_i), \qquad Y_s(u_i') = \sum_{r=1}^{3} \eta_r Y_s Y_r(u_i) \qquad (s = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots)$$

приводятся к виду (2.24)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} - \sum_{r=1}^{3} \eta_r \sum_{i=1,2,\ldots} \left[\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i'}(Y_r, Y_s) u_i + \frac{\partial T^\circ}{\partial v_i'}(Y_r, Y_s) v_i + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial T^\circ}{\partial w_i'}(Y_r, Y_s) w_i\right] = Y_s(T + U) \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{3.17}$$

Подставляя (3.6) и (3.7) в (3.17), снова получаем (3.8). Здесь

$$T^\circ = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,\ldots} m_i (u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2)$$

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева за руководство при выполнении работы.

Поступила 11 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Фам Гуен. Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре — Четаева. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. Чаплыгин С. А. О движении твердого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
3. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Уч. зап. МГУ, Механика, 1948, т. 2. вып. 122.
4. Appell P. Sur les mouvements de roulement. Equations du mouvement analogues a celles de Lagrange. Comp. Rend. de l'Acad. de Sci. de Paris, 1899, t. 129, p. 317—320.
5. Hamel G. Die Lagrange — Eilerschen Gleichungen den Mechanik. Zeitschrift fur Math. und Phys., 1904, Bd. 50, S. 1—57.
6. Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamich. Atti Acad. Sci., Cl. Sci. Fis., Math. a Natur., Torino, 1898, vol. 33, p. 451.
7. Шаги-Султан Ш. З. Метод кинетических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата, «Наука», 1966.
8. Holder A. Uber die Principien von Hamilton und Maupertuis. Nachrichten von der Kon. Ges. der Wissenschaften zu Gottingen. Math.— Phys. Kl., 1896, vol. 2, p. 122—157.
9. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Перестановочные соотношения в аналитической механике неголономных систем. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
10. Лурье А. И., Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
11. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Об ошибке В. Вольтерра, допущенной им при выводе уравнений движения неголономных систем. ПММ, 1951, т. 15, вып. 5.
12. Ferrers N. M. Extentions of Lagrange's equations. Quart. J. Math., 1875, № 45.
13. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
14. Фуфаев Н. А. Уравнения Чаплыгина и теорема о приводящем множителе в случае квазикоординат. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.