Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

К ЗАДАЧЕ ОБ ИГРОВОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Для задачи об игровой встрече движений [1-4] описывается один способ формального обоснования схемы экстремального прицеливания [4].

§ 1. Рассмотрим задачу о встрече преследующего ($y[t]$) и преследуемого ($z[t]$) движений, которые описываются дифференциальными уравнениями

$$dy/dt = f^{(1)}[y,u] \tag{1.1}$$

$$dz/dt = f^{(2)}[z,v] \tag{1.2}$$

Здесь y, z — соответственно $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$-мерные фазовые векторы объектов; u, v — $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$-мерные векторы управляющих сил; $f^{(i)}$ — непрерывные и дифференцируемые вектор-функции. Реализации $u[t]$ и $v[t]$ допустимых управлений стеснены условиями

$$u[t] \in U, \quad v[t] \in V \tag{1.3}$$

где U, V — замкнутые ограниченные множества в $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$-мерных пространствах соответственно. Встреча движений $y[t]$ и $z[t]$ в момент $t = t_*$ определяется равенством

$$\{y[t_*]\}_m = \{z[t_*]\}_m \tag{1.4}$$

причем $\{y\}_m$ и $\{z\}_m$ — суть векторы, составленные из первых m ($m \leqslant n^{(i)}$) координат векторов y и z. (Рассматриваемые далее векторы трактуются как векторы-столбцы, если не будет соответствующей оговорки (например, о транспонировании)).

Задача состоит в таком выборе допустимого управления u, при котором обеспечивалась бы встреча движений $y[t]$ и $z[t]$, какова бы ни была кусочно-непрерывная реализация $v[t]$, удовлетворяющая условию (1.3) (речь идет об избранной области возможных начальных условий $y[t_0]$, $z[t_0]$). Для решения этой задачи в статье [4] было предложено одно правило построения u, которое будем называть экстремальным прицеливанием. Для линейных систем это правило обсуждено в книге [5]. Отмечено, что его использование и обоснование связано с трудностями. Одна из них состоит в том, что экстремальное прицеливание, вообще говоря, определяет управление $u^\circ[t] = u^\circ(y[t], z[t])$ как неоднозначную и разрывную функцию u (y, z) (см., например, [6]).

Первую из этих двух неприятностей можно обойти, если ограничиться лишь такими случаями, когда точка прицеливания $q^\circ[t]$, определяющая экстремальное управление, единственна. Тогда, пожалуй, еще остается для исследования в меру содержательный класс задач. Однако, если затем исключить и те задачи, где возможны разрывные функции n°, то оставшийся класс проблем окажется, пожалуй, неоправданно скудным. Поэтому представляется целесообразным исследование экстремального управления при условии единственности точки прицеливания $q^\circ(t)$, но без дальнейшего существенного сужения класса задач. Однако в таком случае надлежит работать с уравнением (1.1), содержащим разрывную функцию $u = u^\circ(y, z)$. Это вынуждает использовать обобщенные решения [7] таких уравнений.

Обобщенные решения $y[t]$, $z[t]$ позволяют преодолеть трудности, связанные с проблемой существования экстремального движения $y[t]$. Простой пример показывает, однако, что в достаточно естественном классе обобщенных решений $y(t)$ экстремальное управление $u^\circ(y[t], z[t])$ не обеспечивает каждый раз встречу движений $y[t]$ и $z[t]$.

В самом деле, рассмотрим систему (7) из статьи [6]. Назовем решением $y\,[t]$ соответствующего уравнения

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + u^\circ(y, z\,[t])$$

всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $y\,[t]$, которая при всех почти значениях $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условиям

$$\frac{dy_1\,[t]}{dt} = y_2\,[t], \qquad \frac{dy_2\,[t]}{dt} = -y_1\,[t] + u_0$$

причем $u_0 = u^\circ(y\,[t],\ z\,[t])$ в точках непрерывности функции $u^\circ(y, z)$ и u_0 — любое число из отрезка $-\mu \leqslant u_0 \leqslant \mu$ в точках $y = y\,[t]$, $z = z\,[t]$, где функция $u^\circ(y, z)$ разрывна. В случае $\mu - \nu = 1$, $\nu > 2$ трактуемая так система (7) из [6] при $v\,[t] = 2$ обладает обобщенным решением $y_1\,[t] - z_1\,[t] = -2$, $y_2\,[t] - z_2\,[t] = 0$ $(u_0 = 0)$, которое определяет не сближающиеся с ростом времени t движения $y\,[t]$ и $z\,[t]$.

Таким образом, и в классе обобщенных решений $y[t]$ и $z[t]$ правило экстремального прицеливания нуждается в усовершенствовании. Подобное усовершенствование, включающее тормозящую связь на величину момента поглощения [4, 5] $t^\circ = t + \vartheta^\circ[t]$ и опирающееся на дискретную по времени вычислительную схему, описано в заметке [6] для случая линейных однотипных объектов и обосновано в статье [8] для сравнительного общего случая линейных систем. Цель настоящей статьи — описать аналогичное усовершенствование правила экстремального прицеливания, также включающее новую связь для величины $\vartheta^\circ[t]$, но трактуемое теперь в рамках понятия обобщенных решений рассматриваемых дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Подчеркнем, что данная модификация задачи имеет формальный характер. При реализации на ЭВЦМ эта модификация раскрывается, например, в аппроксимирующей схеме, описанной в статье [8].

§ 2. Определим усовершенствованное экстремальное управление u°. Его построение опирается на вспомогательную конструкцию, которая сопоставляется реализующимся состояниям системы $y[t]$ и $z[t]$ в каждый текущий момент времени t.

Сделаем сначала ряд предварительных замечаний. Пусть t есть некоторый зафиксированный на время текущий момент времени. Как обычно, назовем областью достижимости $H^{(1)}[y, \vartheta]$ (для движения $y(\tau)$ из состояния $y[t]=y$ к моменту $\tau=t+\vartheta$) множество тех и только тех точек $\{y\}_m$ в m-мерном пространстве, в которые можно перевести систему $dy/d\tau = f^{(1)}[y,u]$ за время $t\leqslant\tau\leqslant t+\vartheta$ из данного состояния $y[t]=y$ за счет выбора программного управления $u(\tau)$ $(t\leqslant\tau<t+\vartheta)$, стесненного условием $u(\tau)\in U$. Аналогичным образом определяется область достижимости $H^{(2)}[z,\vartheta]$.

Если система (1.1) описывается линейным уравнением

$$dy/dt = A^{(1)}y + B^{(1)}u \tag{2.1}$$

причем ограничение (1.3) имеет вид

$$\|u[t]\|\leqslant\mu \qquad (\mu>0 - \text{const}) \tag{2.2}$$

где символ $\|u\|$ означает евклидову норму вектора u, то известно (см, например, [5]), что область $H^{(1)}[y,\vartheta]$ состоит из тех и только из тех точек $q=\{y\}_m$, которые удовлетворяют неравенству

$$\mu\int_0^\vartheta \|\{Y[\vartheta,\tau]B^{(1)}\}_m' l\|d\tau + \{Y[\vartheta,0]y\}_m' l - l'q \geqslant 0 \tag{2.3}$$

при любом выборе m-мерного вектора l. Здесь символ $Y[\tau,\tau_0]$ означает фундаментальную матрицу решений для уравнения $dy/d\tau = A^{(1)}y$; верхний индекс штрих означает транспонирование; символ $\{Q\}_m$ означает матрицу, составленную из первых m строк матрицы Q. Вследствие однородности левой части (2.3) по l, достаточно (и необходимо), чтобы условие (2.3) выполнялось лишь для какого-либо подходящего подмножества L векторов l, например, для всех l с нормой $\|l\|\leqslant 1$ или $-\|l\|=1$ и т. п. Аналогичным образом в случае линейного уравнения

$$dz/dt = A^{(2)}z + B^{(2)}v \tag{2.4}$$

и при ограничении

$$\|v[t]\|\leqslant\nu \qquad (\nu>0 - \text{const}) \tag{2.5}$$

область $H^{(2)}[z,\vartheta]$ подобно (2.3) описывается неравенством

$$\nu\int_0^\vartheta \|\{Z[\vartheta,\tau]B^{(2)}\}_m' l\|d\tau + \{Z[\vartheta,0]z\}_m' l - l'p \geqslant 0 \tag{2.6}$$

которое должно выполняться для каждой точки p из $H^{(2)}[z,\vartheta]$ при всех l (при всех l из L).

Области $H^{(1)}[y,\vartheta]$ будем предполагать выпуклыми и замкнутыми множествами. Наряду с областями достижимости $H^{(2)}[z,\vartheta]$ будем рассматривать некоторые связанные с ними ограниченные выпуклые и замкнутые множества $G^{(2)}[z,\vartheta]$, содержащие их, так что при всех рассматриваемых значениях z и ϑ должны выполняться включения

$$H^{(2)}[z,\vartheta]\subset G^{(2)}[z,\vartheta] \tag{2.7}$$

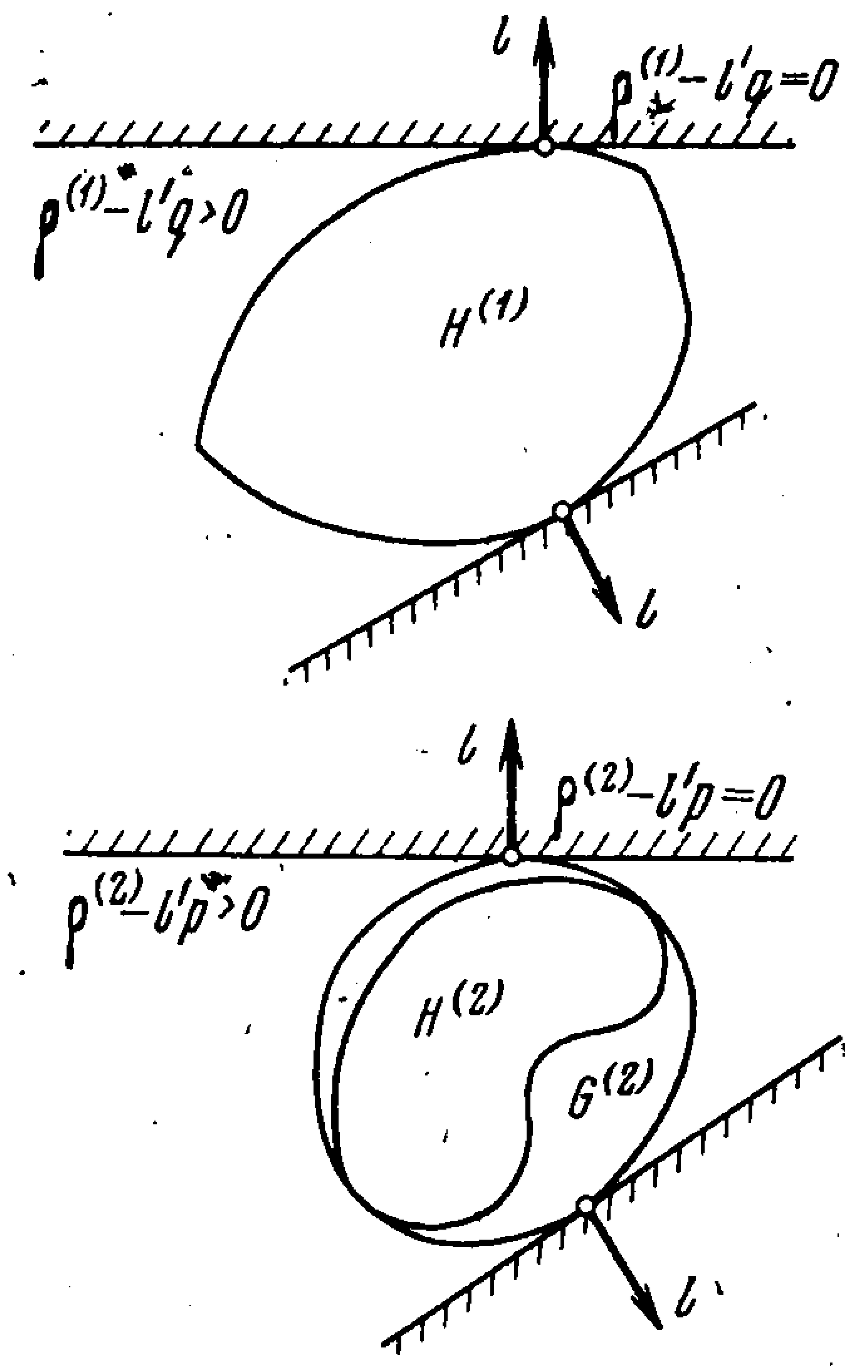
При этом будем предполагать, что множества $G^{(2)}[z,\vartheta]$ удовлетворяют еще следующему условию:

$$G^{(2)}[z[t^*],\vartheta-t^*]\subset G^{(2)}[z[t_*],\vartheta-t_*] \quad \text{при} \quad t^*>t_* \tag{2.8}$$

каково бы ни было движение $z[t]$ системы (1.2), порожденное допустимым управлением $v[t]$ $(t_*\leqslant t<t^*)$. Это условие выполняется автоматически, если $H^{(2)}[z,\vartheta]=G^{(2)}[z,\vartheta]$.

Множества $G^{(1)} = H^{(1)}$ и $G^{(2)}$ будут пересечениями их опорных полупространств [9]. Поэтому будем описывать их неравенствами, аналогичными условиям (2.3) и (2.6). Пусть, следовательно, области $G^{(1)}[y, \vartheta]$ и $G^{(2)}[z, \vartheta]$ описываются, соответственно, неравенствами (фиг. 1).

$$\rho^{(1)}[y, \vartheta, l] - l'q \geqslant 0, \quad \rho^{(2)}[z, \vartheta, l] - l'p \geqslant 0$$



Фиг. 1

которые должны выполняться для $q \in G^{(1)}$ и $p \in G^{(2)}$ при всех l ($\| l \| = 1$). Выпуклые и однородные по l функции $\rho^{(i)}$ будем предполагать непрерывными и удовлетворяющими условиям Липшица.

Момент $t^\circ = t + \vartheta^\circ(y[t], \ z[t]) \geqslant t$, когда впервые выполняется условие

$$G^{(2)}[z[t], \ \vartheta^\circ] \subset G^{(1)}[y[t], \vartheta^\circ]$$

назовем моментом поглощения процесса (1.2) процессом (1.1) (для данного исходного состояния $y[t], z[t]$). Для построения экстремального управления u° потребуется еще рассматривать замкнутые ε-окрестности областей $G^{(1)}[y, \vartheta]$. Будем обозначать эти ε-окрестности символом $H^{(1)}[y, \ \vartheta; \ \varepsilon]$.

В случае линейной системы (2.4) при выпуклом ограничении (2.5) можно положить $G^{(2)} = H^{(2)}$. Далее, в случае линейной системы (2.1) при ограничении (2.2) по определению область $G^{(1)}[y, \ \vartheta; \ \varepsilon]$ складывается из тех и только из тех точек p, для каждой из которых найдется точка q, удовлетворяющая условиям (2.3) и неравенству $\| q - p \| \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что в области $G^{(1)}[y, \ \vartheta; \ \varepsilon]$ будут содержаться те и только те точки p, для которых выполняется условие ($s = q - p$)

$$\max_s \min_l \left(\mu \int_0^\vartheta \| \{Y[\vartheta, \tau] B^{(1)}\}_m' l \| d\tau + \{Y[\vartheta, 0] y\}_m' l - l'(p + s) \right) \geqslant 0$$
$$\text{при } \| s \| \leqslant \varepsilon, \ \| l \| \leqslant 1 \qquad (2.9)$$

Операции max и min здесь можно переставить [9]. Но тогда из (2.9) сразу следует, что область $G^{(1)}[y, \ \vartheta; \ \varepsilon]$ описывается неравенством

$$\varepsilon + \mu \int_0^\vartheta \| \{Y[\vartheta, \tau] B^{(1)}\}_m' l \| d\tau + \{Y[\vartheta, 0] y\}_m' l - l'p \geqslant 0 \qquad (2.10)$$

которое должно выполняться для каждой точки $p \in G^{(1)}$ при всех l с нормой $\| l \| = 1$. Наконец, условие поглощения области $G^{(2)}[z, \ \vartheta]$ областью $G^{(1)}[y, \ \vartheta; \ \varepsilon]$ принимает вид

$$\varepsilon + \mu \int_0^\vartheta \| \{Y[\vartheta, \tau] B^{(1)}\}_m' l \| d\tau - \nu \int_0^\vartheta \| \{Z[\vartheta, \tau] B^{(2)}\}_m' l \| d\tau + \{Y[\vartheta, 0] y -$$
$$- Z[\vartheta, 0] z\}_m' l \geqslant 0 \qquad (\| l \| = 1) \qquad (2.11)$$

так как при этом условие (2.10) должно быть следствием условия (2.6) (при одном и том же значении $p \in G^{(2)}[z, \ \vartheta]$).

В общем случае область $G^{(1)}[y, \vartheta; \varepsilon]$ описывается неравенством

$$\varepsilon + \rho^{(1)}[y, \vartheta, l] - l' p \geqslant 0 \qquad (\|l\| = 1) \tag{2.12}$$

а условие поглощения области $G^{(2)}[z, \vartheta]$ областью $G^{(1)}[y, \vartheta; \varepsilon]$ принимает следующий вид:

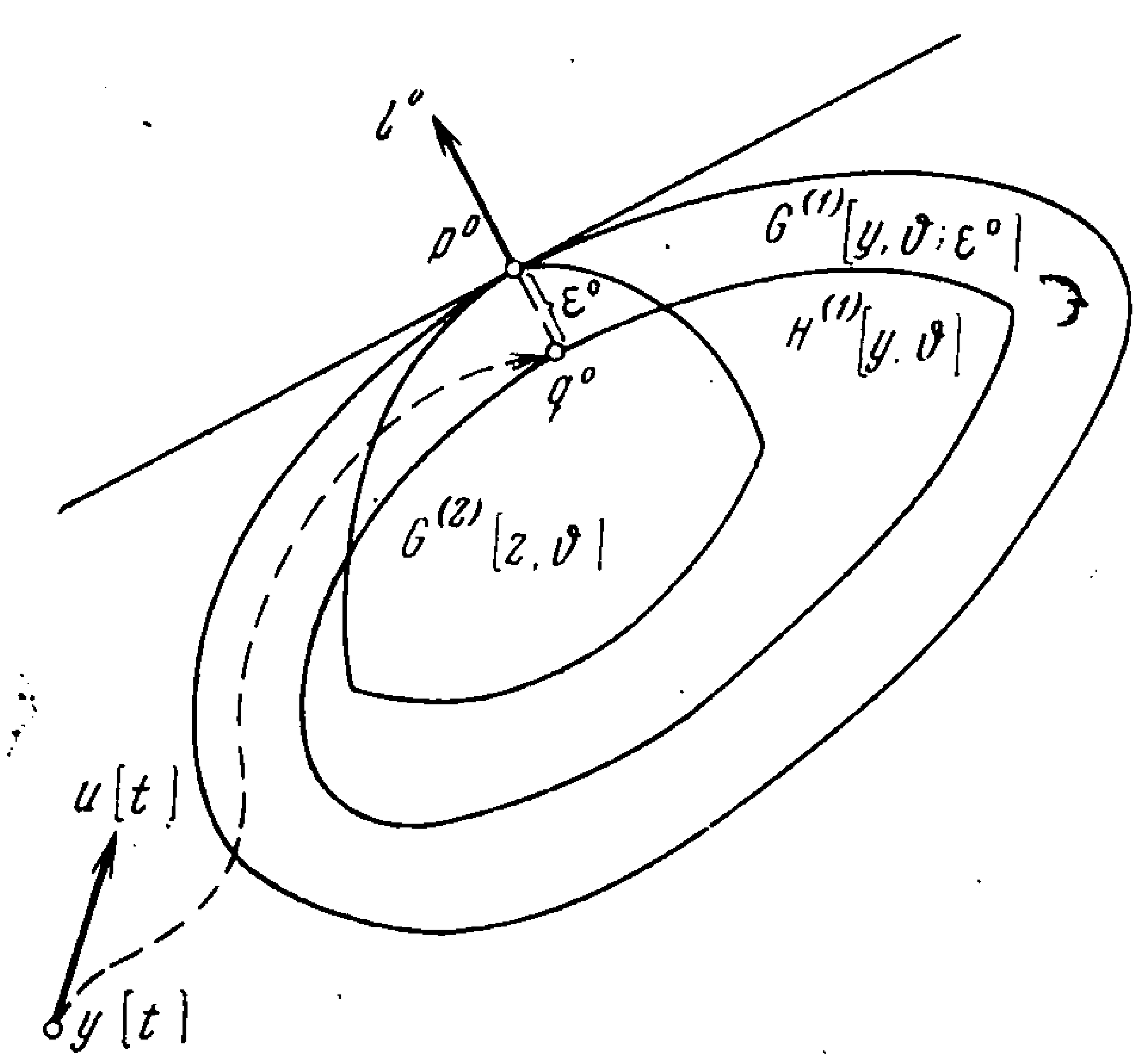
$$\varepsilon + \rho^{(1)}[y, \vartheta, l] - \rho^{(2)}[z, \vartheta, l] \geqslant 0 \quad (\|l\| = 1) \tag{2.13}$$

Теперь от этих вспомогательных замечаний перейдем непосредственно к построению экстремального управления u°. Для этого рассмотрим $(n^{(1)} + n^{(2)} + 1)$-мерное фазовое пространство W, элементами которого будут тройки $\{y, z, \vartheta\}$, причем ϑ — скалярная переменная, $\vartheta > 0$. Разобьем все пространство W на две части: W_0 и W^ε.

Множество W_0 будет состоять из тех и только тех троек $\{y, z, \vartheta\}$, для которых $\vartheta \geqslant \vartheta^\circ(y, z)$, множество W^ε, напротив, составится из всех тех троек $\{y, z, \vartheta\}$, для которых $\vartheta < \vartheta^\circ(y, z)$.

Управление u° будем строить в виде функции от величин y, z, ϑ, так что реализующееся значение управления $u^\circ[t]$ определится равенством $u^\circ[t] = u^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t])$. При этом изменение вектор-функций $y[t]$ и $z[t]$ будет определяться уравнениями (1.1) и (1.2), а закон изменения дополнительной переменной $\vartheta[t]$ будет указан ниже. В области W_0 управление u° будет функцией неоднозначной которая может принимать любые значения, удовлетворяющие условию

$$u^\circ \in U \tag{2.14}$$



Фиг. 2

В области W^ε управление u° строится следующим образом. Пусть $\varepsilon^\circ(y, z, \vartheta)$ — наименьшее значение $\varepsilon > 0$, при котором область $G^{(1)}[y, \vartheta; \varepsilon]$ содержит область $G^{(2)}[y, z]$. (По определению множества W^ε имеем $\varepsilon^\circ(y, z, \vartheta) > 0$, если $\{y, z, \vartheta\} \in W^\varepsilon$.) Скажем, что область $G^{(1)}$ поглощает область $G^{(2)}$ регулярно, если границы этих областей имеют единственную общую точку p°. Везде в дальнейшем это основное условие предполагается выполненным. Такую ситуацию будем называть регулярным случаем.

Пусть q° — точка из области $G^{(1)}[y, \vartheta]$, ближайшая к точке p°. Обозначим символом $u_*(y[t], z[t], \vartheta[t])$ то управление $u_*[t]$, которое в момент t прицеливает движение y в точку

$$\{y(t + \vartheta)\}_m = q^\circ$$

Иначе говоря, $u_*[t] = u_*(t)$, где $u_*(\tau)$ $(t \leqslant \tau < t + \vartheta)$ — програмное управление, которое переводит систему $dy/d\tau = f^{(1)}[y, u]$ из состояния $y[t]$ в состояние $\{y(t + \vartheta)\}_m = q^\circ$ (фиг. 2).

Функция $u_*(t)$ удовлетворяет условиям принципа максимума [10]. Будем считать функцию $u^\circ(y, z, \vartheta) = u_*[t]$ в точке y, z, ϑ, вообще говоря, неоднозначной и допустим, что она в этой точке может принимать любые значения, удовлетворяющие условиям принципа максимума.

Итак, управление $u^\circ(y, z, \vartheta)$ определено для всех значений $\{y, z, \vartheta\}$ из W. Теперь следует дополнить систему (1.1), (1.2) соотношениями, которые определяют изменение величины $\vartheta[t]$. Примем, что функция $\vartheta[t]$ (которая, вообще говоря, может быть разрывной), в области W^ε непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$d\vartheta/dt = -1, \{y, z, \vartheta\} \in W^\varepsilon \tag{2.15}$$

В области W_0 эта функция подчиняется неравенству

$$(d\vartheta/dt)^{(b)} \leqslant -1, \ \{y, z, \vartheta\} \in W_0 \tag{2.16}$$

Здесь символ $(d\vartheta/dt)^{(b)}$ означает верхнюю производную.

Обобщенным решением $y[t], z[t], \vartheta[t]$ $(t_0 \leqslant t < T)$ системы (1.1), (1.2), (2.15), (2.16) при $u = u^\circ(y, z, \vartheta)$ будем называть всякую вектор-функцию $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$ $(t_0 \leqslant t < T)$, которая удовлетворяет условиям:

(1) Вектор-функция $z[t]$ непрерывна и при всех $t \in [t_0, T)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (1.2), где $v = v[t]$. При этом символ dz/dt в (1.2) означает правую производную и допустима любая непрерывная справа реализация $v[t]$, стесненная условием (1.3).

(2) Вектор-функция $y[t]$ абсолютно непрерывна и при всех почти $t \in [t_0, T)$ удовлетворяет уравнению (1.1), где $u = u^\circ(y, z, \vartheta)$ и $z = z[t]$, $\vartheta = \vartheta[t]$.

(3) Функция $\vartheta[t]$ при всех $t \in [t_0, T)$ непрерывна справа и удовлетворяет условиям (2.15), (2.16). При этом в области W_0 должно выполняться условие $\varepsilon^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t]) = 0$.

Вектор-функции $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$, являющиеся обобщенными решениями системы (1.1), (1,2), (2.15), (2.16), будем называть также движениями этой системы, порожденными управлениями $u^\circ(y, z, \vartheta)$ и $v[t]$.

§ 3. Обсудим свойства экстремального управления $u^\circ(y, z, \vartheta)$, которое было определено в предыдущем параграфе. Прежде всего, следует заметить, что область W^ε будет открытым множеством.

В самом деле, пусть точка $\{y_*, z_*, \vartheta_*\} \in W^\varepsilon$. Тогда $\varepsilon^\circ(y_*, z_*, \vartheta) > 0$ при всех $0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_*$ и в соответствии с (2.13) имеем

$$\min_{\|l\|=1} (\varepsilon^\circ(y_*, z_*, \vartheta) + \rho^{(1)}[y_*, \vartheta, l] - \rho^{(2)}[z_*, \vartheta, l]) = 0 \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_*) \tag{3.1}$$

Функции $\rho^{(i)}$ непрерывны. Отсюда следует, что при достаточно малом $\delta > 0$ будет выполнено неравенство

$$\rho^{(1)}[y, \vartheta, l] - \rho^{(2)}[z, \vartheta, l] \leqslant -\alpha \qquad (\alpha > 0 - \mathrm{const}) \tag{3.2}$$

для всех $0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_* + \delta$ и $\| l \| = 1$, если только $\| y - y_* \| \leqslant \delta$, $\| z - z_* \| \leqslant \delta$. Но это, согласно (2.13), означает, что для таких y, z и ϑ справедливо неравенство $\varepsilon^\circ(y, z, \vartheta) \geqslant \alpha$, т. е. $\vartheta^\circ(y, z) > \vartheta_*$, и следовательно, некоторая окрестность точки $\{y_*, z_*, \vartheta_*\}$ действительно содержится в области W^ε.

Рассмотрим некоторую точку $\{y_*, z_*, \vartheta_*\} \in W^\varepsilon$. Пусть $u_*(\tau)$ $(t = 0 \leqslant \leqslant \tau < \vartheta_*)$ — то программное управление, которое определяет функцию $u_*(y_*, z_*, \vartheta_*)$, порождающую экстремальное управление $u^\circ(y_*, z_*, \vartheta_*)$ (см. выше стр. 795). (Для стационарных систем, рассматриваемых нами, момент отсчета времени не играет роли, поэтому полагаем здесь $t = 0$.) Управление $u_*(\tau)$ переводит систему

$$dy/d\tau = f^{(1)}[y, u] \tag{3.3}$$

в точку $\{y(\vartheta_*)\} = q^\circ$, лежащую на границе области достижимости $G^{(1)}[y_*, \vartheta_*]$. Поэтому функция $u_*(\tau)$ удовлетворяет условиям принципа максимума [10]

$$H(\psi(\tau), y(\tau), u_*(\tau)) = \max_{u \in U} H(\psi(\tau), y(\tau), u) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta_*) \tag{3.4}$$

При этом вектор-функция $\psi(\tau)$ удовлетворяет краевому условию

$$\psi_j(\vartheta_*) = l_j^\circ, \qquad \psi_i(\vartheta_*) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ i = m + 1, \ldots, n^{(1)}) \tag{3.5}$$

где l° — как раз тот m-вектор l, для которого согласно с (2.13) и (3.1) выполнено соотношение

$$\min_{\|l\|=1} [\varepsilon^\circ(y_*, z_*, \vartheta_*) + \rho^{(1)}[y_*, \vartheta_*, l] - \rho^{(2)}[z_*, \vartheta_*, l]] =$$
$$= \varepsilon^\circ(y_*, z_*, \vartheta_*) + \rho^{(1)}[y_*, \vartheta_*, l^\circ] - \rho^{(2)}[z_*, \vartheta_*, l^\circ] = 0 \tag{3.6}$$

Важно отметить, что в регулярном случае (который здесь рассматривается), вектор l° с изменением y_*, z_* и ϑ_* изменяется также непрерывно. Это обстоятельство будет следствием непрерывности функций $\rho^{(i)}$ и единственности этого вектора (при данных y_*, z_*, ϑ_*), которая, в свою очередь, есть следствие единственности точки p°. При достаточно общих предположениях (которые во всяком случае выполнены для линейной системы (2.1)) непрерывное изменение ϑ_* и вектора $\psi(\vartheta_*)$ (и точки прицеливания q_*) вызывает непрерывное изменение вектора $\psi(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta_*)$. Это условие будем полагать выполненным. Следовательно, в рассматриваемом регулярном случае вектор $\psi(0)$ в условии максимума (3.4) с непрерывным изменением y_*, z_*, ϑ_*, будет изменяться непрерывно (в области W^ε). Итак, управление $u^\circ(y_*, z_*, \vartheta_*)$ определяется условием максимума

$$\psi'(0) f^{(1)}[y_*, u^\circ] = \max_{u \in U} (\psi'(0) f^{(1)}[y_*, u]) \tag{3.7}$$

Замкнутые множества $U(y_*, \psi(0))$, которые определяют значения функции $u^\circ(y_*, z_*, \vartheta_*)$ согласно с условием (3.7), являются полунепрерывными сверху относительно включения (по y_* и $\psi(0)$).

Будем предполагать, что множества R, которые пробегает вектор $f^{(1)}$, когда u пробегает U, выпуклы [11].

Данное требование опять-таки обязательно выполняется в случае линейной системы (2.1) при ограничении (2.2).

Действительно, в этом случае условие максимума (3.7) имеет вид

$$l^{\circ\prime} \{Y [\vartheta_*, 0] B^{(1)}\}_m u_* = \max_{\|u\| \leqslant \mu} l^{\circ\prime} \{Y [\vartheta_*, 0] B^{(1)}\}_m u \tag{3.8}$$

Оно не вырождается тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\| Y [\vartheta_*, 0] B^{(1)}\}_m' l^0 \| > 0 \tag{3.9}$$

и в этом случае

$$u_* = \mu \frac{\{Y [\vartheta_*, 0] B^{(1)}\}_m' l^\circ}{\| \{Y [\vartheta_*, 0] B^{(1)}\}_m' l^\circ \|} \tag{3.10}$$

Теперь надлежит обсудить вопрос о существовании обобщенного решения $y[t]$, $z[t]$, $\vartheta[t]$ системы (1.1), (1.2), (2.15), (2.16). Здесь снова при достаточно общих условиях (см. [11]), которые во всяком случае выполняются для линейной системы (2.1) при ограничении (2.2), существование функций $y[t], z[t], \vartheta[t]$, удовлетворяющих требованиям (1)—(3) (вплоть до момента встречи или] до $T = \infty$, если встреча не произойдет), проверяется, например, предельным переходом от аппроксимирующей дискретной схемы, подобной той, какая описана в статье [8].

Не обсуждая ситуацию в общем случае и полагая условия существования обобщенных решений (1) — (3) выполненными, остановимся кратко лишь на доказательстве этого существования нужных функций $y[t]$, $z[t]$, $\vartheta[t]$ только для случая линейной системы (2.1) при выпуклом ограничении (2.2). Здесь строится последовательность ($s = 1,2,\ldots$) дискретных схем, описанных в статье [8], причем шаг этих схем $\delta_s = \tau_{k+1} - \tau_k$ стремится к нулю при $s \to \infty$. Далее проверяется, что в последовательности $\{y^{(s)}[t], z[t], \vartheta^{(s)}[t]\}$ решений, порождаемых соответствующими дискретными схемами, существует подпоследовательность $\{y^{(i)}[t], z[t], \vartheta^{(i)}[t]\}$ ($i = s_j$, $j = 1,2,\ldots$), сходящаяся должным образом к предельному элементу $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$ ($t_0 \leqslant t < T$), который и доставляет искомое обобщенное решение системы (2.1), (2.2), (2.15), (2.16). Возможность построения подпоследовательности $\{y^{(i)}[t], z[t], \vartheta^{(i)}[t]\}$ определяется следующими обстоятельствами: при $t_0 \leqslant t < T$ множество функций $u[t]$, которые стеснены условием (2.2) (по существу) и среди которых содержатся функции $u^{(s)}[t]$, слабокомпактно; функции $y^{(s)}[t]$ равномерно ограничены и удовлетворяют равностепенно условиям Липшица, поэтому среди них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно к нужной функции $y[t]$; функции $\vartheta^{(s)}[t] + t$ будут монотонно невозрастающими, поэтому среди них можно выделить подпоследовательности, сходящиеся к подходящей функции $t + \vartheta[t]$ в основном.

§ 4. Теперь надлежит проверить, что экстремальное управление $u^\circ(y, z, \vartheta)$ обеспечивает встречу движений $y[t]$ и $z[t]$, если только в начальный момент времени $t = t_0$ состояние $y[t_0]$, $z[t_0]$ было таким, что существовал момент поглощения $t^\circ = t_0 + \vartheta^\circ(y[t_0], z[t_0])$.

Для проверки справедливости высказанного утверждения о встрече движений $y[t]$ и $z[t]$ достаточно показать, что для всякого движения $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$, удовлетворяющего начальному условию

$$\{y[t_0], z[t_0], \vartheta[t_0]\} \in W_0 \tag{4.1}$$

будет при всех $t \geqslant t_0$ (пока не осуществится встреча) выполняться включение

$$\{y[t], z[t], \vartheta[t]\} \in W_0 \tag{4.2}$$

В самом деле, пусть исходное состояние системы (1.1), (1.2) в момент $t = t_0$ определяется фазовыми векторами $y = y[t_0]$, $z = z[t_0]$. Выберем начальное значение $\vartheta[t_0]$ равным величине $\vartheta^\circ(y[t_0], z[t_0])$. Тогда для рассматриваемого движения $y[t], z[t], \vartheta[t]$ $(t \geqslant t_0)$ системы (1.1), (1.2), (2.15), (2.16) выполнится условие (4.1).

При условии (4.2) имеем $\vartheta^\circ(y[t], z[t]) \leqslant \vartheta[t]$. Таким образом, при выполнении этого условия справедливо неравенство

$$t + \vartheta^\circ(y[t], \ z[t]) \leqslant t + \vartheta[t] \tag{4.3}$$

По условиям (2.15) и (2.16) величина $t + \vartheta[t]$ не возрастает. Поэтому из (4.3) следует неравенство

$$t + \vartheta^\circ(y[t], z[t]) \leqslant t_0 + \vartheta[t_0] = t_0 + \vartheta^\circ(y[t_0], z[t_0]) \tag{4.4}$$

из которого вытекает, что при некотором значении $t = t_* \leqslant t_0 + \vartheta[t_0]$ выполняется предельное соотношение

$$\lim\sup \vartheta^\circ(y[t], z[t]) = 0 \text{ при } t \to t_* - 0 \tag{4.5}$$

Так как при $\vartheta \to 0$ область $G^{(1)}[y, \vartheta]$ стягивается в точку и при $\vartheta = \vartheta^\circ(y, z)$ область $G^{(2)}[z, \vartheta]$ содержится в области $G^{(1)}[y, \vartheta]$, то предельное соотношение (4.5) показывает, что встреча движений $y[t]$ и $z[t]$ должна осуществиться не позже, чем в момент $t = t_* \leqslant t_0 + \vartheta[t_0]$. Остается проверить выполнение условия (4.2).

Предположим от противного, что условие (4.2) нарушается прежде, чем осуществляется встреча. Это означает, что в некоторый момент $t = t^*$ справедливо неравенство $\varepsilon^\circ(y[t^*], z[t^*], \vartheta[t^*]) > 0$. Так как в области W^ε все величины $y[t]$, $z[t]$ и $\vartheta[t]$ изменяются непрерывно и так как область W^ε есть область открытия, то можно указать момент времени $t = t_* < t^*$, когда движение $y[t]$, $z[t]$ и $\vartheta[t]$ в последний раз перед моментом $t = t^*$ покидает область W_0. При этом $\{y[t_*], z[t_*], \vartheta[t_*]\} \in W_0$, так как область W^ε открытая и функция $\vartheta[t]$ непрерывна справа при всех t, а при $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\} \in W^\varepsilon$ эта функция по определению ее должна быть также непрерывной и слева. Но в таком случае по свойству (3) функции $\vartheta[t]$ заключаем, что $\varepsilon^\circ(y[t_*], z[t_*], \vartheta[t_*]) = 0$. На отрезке $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ величина $\varepsilon^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t])$ меняется непрерывно, так как непрерывно меняются величины $y[t]$, $z[t]$ и $\vartheta[t]$. Итак, непрерывная функция $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t])$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^\circ[t_*] < \varepsilon^\circ[t^*] \qquad (t^* > t_*) \tag{4.6}$$

С другой стороны, можно проверить, что при каждом $t \in (t_*, t^*)$ правое верхнее производное число функций $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t])$, которое будем обозначать символом $(d\varepsilon^\circ[t]/dt)_+^{(b)}$, неположительно. Покажем, это.

Рассмотрим гиперплоскость $\varkappa^\circ$, касательную к границе области $G^{(1)}[y[t], \vartheta[t], \varepsilon^\circ[t]]$ в точке p°. В пространстве $\{p\}$ эта гиперплоскость описывается уравнением

$$\varepsilon^\circ[t] + \rho^{(1)}[y[t], \vartheta[t], l^\circ[t]] - l^{\circ\prime}[t]p = 0 \tag{4.7}$$

где $l^\circ[t]$ — тот единичный вектор, который в соответствии с (3.6) удовлетворяет равенству

$$\varepsilon^\circ[t] + \rho^{(1)}[y[t], \vartheta[t], l^\circ[t]] - \rho^{(2)}[z[t], \vartheta[t], l^\circ[t]] = 0 \tag{4.8}$$

При этом вследствие единственности точки p° для всякого другого единичного вектора l справедливо неравенство

$$\varepsilon^\circ[t] + \rho^{(1)}[y[t], \vartheta[t], l] - \rho^{(2)}[v[t], \vartheta[t], l] > 0 \tag{4.9}$$

Следовательно, можно для любого числа $\alpha > 0$ указать число $\beta(\alpha) > 0$ такое, что будет справедливо неравенство

$$\varepsilon^\circ [t] + \rho^{(1)} [y [t], \vartheta [t], l] - \rho^{(2)} [z [t], \vartheta [t], l] \geqslant \beta(\alpha) \qquad (4.10)$$

если только $\| l \| = 1$ и

$$\| l - l^\circ [t] \| \geqslant \alpha \qquad (4.11)$$

Так как при изменении t величины $y [t]$, $z [t]$ и $\vartheta [t]$ меняются непрерывно, то на движении $\{y [t], z [t], \vartheta [t]\}$ в момент $t + \Delta t$ выполнится неравенство (4.12)

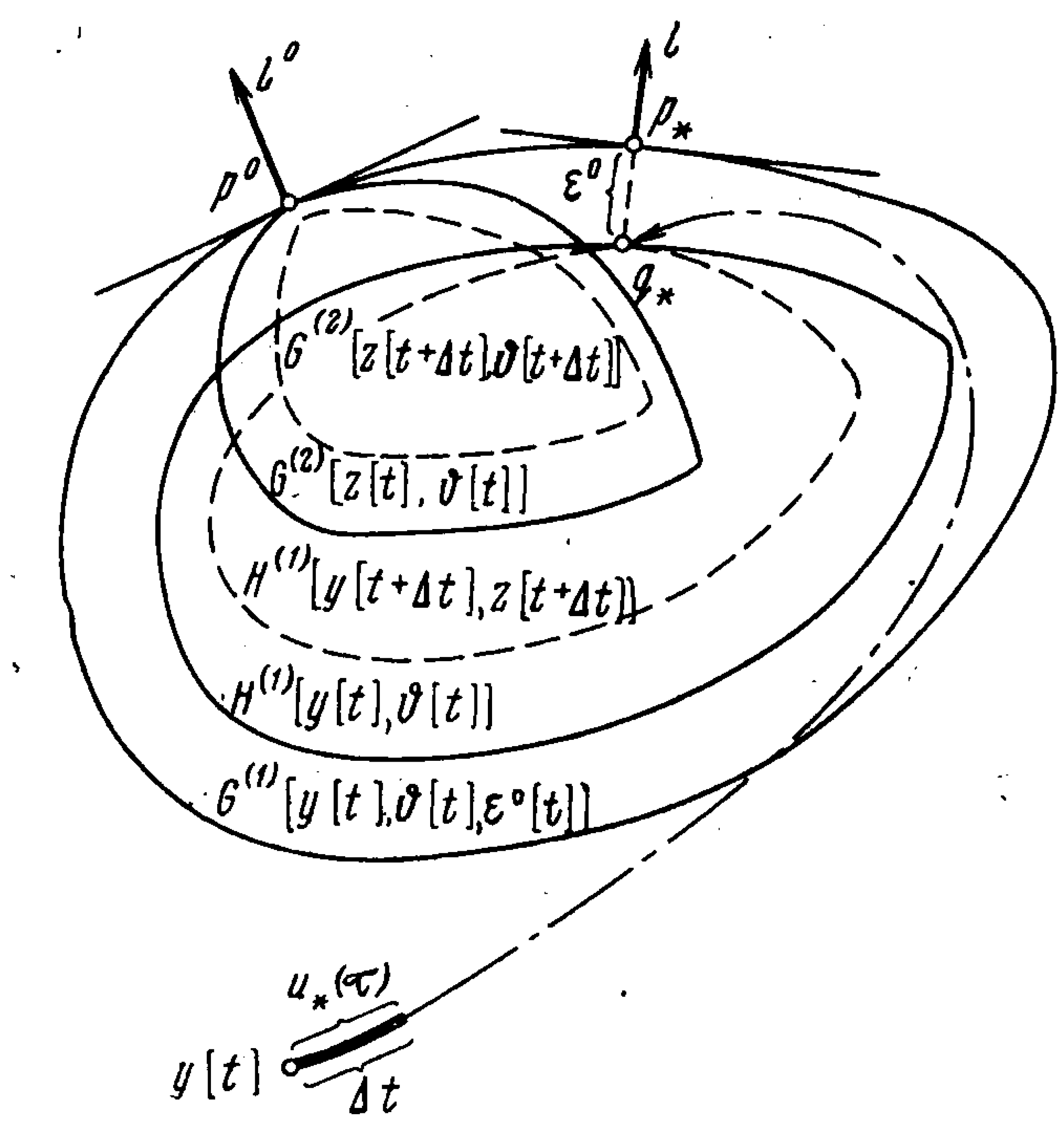
$$\varepsilon^\circ [t] + \rho^{(1)} [y [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], l] - \rho^{(2)} [z [(t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], l] \geqslant 0$$

каков бы ни был единичный вектор l (4.11), если только величина Δt достаточно мала. Но в таком случае из условия (3.6) заключаем, что для доказательства соотношения

$$\left(\frac{d\varepsilon^\circ [t]}{dt}\right)_+^{(b)} \leqslant 0 \qquad (4.13)$$

достаточно работать с условием (2.13), где вектор l стеснен неравенством

$$\| l - l^\circ [t] \| \leqslant \alpha \qquad (4.14)$$



Фиг. 3

Предположим сначала на время, что на отрезке $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ работает управление $u_*(\tau)$, которое прицеливает движение $y [t]$ в некоторую точку q_*, лежащую на границе области $G^{(1)} [y [t], \vartheta [t]]$ и ближайшую к некоторой точке p_*, лежащей на границе области $G^{(1)}[y [t], \vartheta [t]; \varepsilon^\circ [t]]$, в малой η-окрестности точки p° ($\lim \eta(\alpha) = 0$ при $(\alpha \to 0)$. В частности, если $p_* = p^\circ$, то управление $u_*(\tau)$ совпадает с тем управлением, которое определяет функцию и $u_* [y [t], z [t], \vartheta [t])$ (см. выше стр. 795). Обозначим соответствующее движение y символом $y_*(\tau)$.

При управлении $u_*(\tau)$ точка p_* из области $G^{(1)}[y [t], \vartheta [t]; \varepsilon^\circ [t]]$ осталась бы лежащей и в области $G^{(1)}[y_*(t + \Delta t), \vartheta (t + \Delta t); \varepsilon^\circ [t]]$, ибо при этом очевидно осталась бы в области $G^{(1)}[y_*(t + \Delta t), \vartheta [t + \Delta t]]$ точка q_* (фиг. 3). С учетом условия (2.8) это означает, что тогда выполнилось бы соотношение

$$\varepsilon^\circ [t] + \rho^{(1)}[y_*(t + \Delta t), \vartheta [t + \Delta t], l] - \rho^{(2)}[z [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], l] \geqslant 0$$

которое означает как раз тот геометрический факт, что расстояние от области $G^{(1)}$ $[y_*(t + \Delta t), \vartheta [t + \Delta t]; \varepsilon^\circ [t]]$ до гиперплоскости $\varkappa_*$, касательной к этой области $G^{(1)}[y_*(t + \Delta t), \vartheta [t + \Delta t]; \varepsilon^\circ [t]]$ в точке p_*, не больше, чем расстояние от этой же гиперплоскости до области $G^{(2)}$ $[z [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t]]$ (фиг. 3). На деле, однако, на отрезке $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ работает управление $u [\tau] = u^\circ (y [\tau], z [\tau], \vartheta [\tau])$.

Но при наших предположениях можно проверить, что при допустимой вариации $\delta u (\tau) = u [\tau] - u_*(\tau)$ управления $u_*(\tau)$ на отрезке $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$, в области $G^{(1)}[y [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], \varepsilon^\circ [t]]$ будут оставаться точки p, отклонения которых от точек p_* по направлению любого вектора l из множества (4.14) не превзойдут величину $\xi [\alpha, \Delta t] \Delta t$, где $\xi [\alpha, \Delta t] \to 0$ при $\{\alpha, \Delta t\} \to 0$. Отсюда следует оценка

$$\varepsilon^\circ [t] + \rho^{(1)} [y [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], l] - \rho^{(2)} [z [t + \Delta t], \vartheta [t + \Delta t], l] \geqslant$$
$$\geqslant - \Delta t\, \xi [\alpha, \Delta t]$$

Из этой оценки вследствие (2.13) заключаем, что выполняется соотношение (4.13).

Условия (4.6) и (4.13) противоречивы. Полученное противоречие доказывает утверждение о том, что в рассматриваемом регулярном случае экстремальное управление $u^\circ(y,z,\vartheta)$, построенное в § 2, будет обеспечивать встречу движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем в момент поглощения $t^\circ = t_0 + \vartheta^\circ(y[t_0], z[t_0])$, если только для исходного состояния системы (1.1), (1.2) этот момент существует.

Примечание. Заметим в заключение, что среди движений $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$ наиболее интересны те движения, для которых все время выполняется условие

$$\vartheta[t] = \vartheta^\circ(y[t], z[t]) \qquad (t \geqslant t_0) \tag{4.15}$$

так как это условие обеспечивает, пожалуй, наиболее благоприятное для преследователя течение процесса (в рамках рассматриваемой постановки задачи). Для класса решений $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$, выделяемых условием (4.15), экстремальное управление $u^\circ(y[t], z[t], \vartheta[t])$, построенное в § 2, также обеспечивает встречу, но здесь уже при $t > \tau$ встреча осуществляется не позже, чем в момент $t^\circ = \tau + \vartheta^\circ(y[\tau], z[\tau])$, каков бы ни был текущий момент τ, реализующийся до встречи. Отметим еще, что в линейном случае единственность точки p° не существенна. Важна лишь единственность вектора $l^\circ[t]$. Следует еще сказать, что и выпуклость областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ также не играет, вообще говоря, решающей роли. Однако, в случае невыпуклости этих областей условие регулярности поглощения выглядит, пожалуй, неестественным и трудно проверяемым. Наконец, надлежит отметить, что описанная выше схема построения управления u° понятным образом трансформируется на задачу, где условие встречи определено неравенством

$$\| \{y[t_*] - z[t_*]\}_m \| \leqslant \gamma \qquad (\gamma > 0 - \text{const})$$

При этом лишь в соответствующей конструкции для u° роль величины $\vartheta^\circ(y, z)$ будет играть время $\vartheta^{(\gamma)}(y, z)$ до момента γ-поглощения.

Поступила 18 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С. К теории дефференциальных игр. Усп. матем. н., т. 21, вып. 4. 1966.
3. Пшеничный Б. Н. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.
4. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы, М., «Наука», 1968.
6. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 3.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Задача о сближении управляемых объектов. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир.», 1964.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Физматгиз, 1961.
11. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, 1959, № 2.